MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
n^os 38/39 – julho/dezembro 2005 – pp. 105–114

Resenha de Livros[1]

ALI TAHZIBI

Ergodic theory of numbers, Dajani, K. e Kraaikamp, C., Carus Monographs, vol. 29, MAA (2002).

A relação entre a teoria dos números, uma das mais antigas áreas da Matemática, e a teoria geométrica e ergódica de sistemas dinâmicos, uma área relativamente recente, pode ser um assunto bastante interessante. De fato existem muitos trabalhos, alguns bem recentes, que estão realizando cada vez mais este desejo de aplicar um ramo de matemática em outro.

O estudo do problema da estabilidade do sistema solar deu origem ao problema dos "pequenos divisores" que está relacionado à aproximação diofantina. Dirichlet, Kronecker e Siegel trabalharam no problema de pequenos divisores. Em 1942, Siegel usou as idéias extraídas da teoria da aproximação diofantina para resolver um problema de iteração de funções analíticas próximo a um ponto fixo. Komolgorov, Arnold e Moser, na famosa teoria KAM, usaram as idéias de Siegel e podemos concluir que realmente a aproximação diofantina desempenhou ali um papel fundamental.

Entretanto, as aplicações dos conceitos e idéias de sistemas dinâmicos e teoria ergódica na teoria dos números é o assunto principal de nosso

[1] Seção coordenada por Sérgio Volchan.

interesse aqui e do livro desta resenha.

Para começar, podemos mencionar o teorema de Szemerédi. Este afirma que qualquer subconjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) com densidade superior positiva contém progressões aritméticas de comprimento arbitrariamente grande. H. Furstenberg [1] usou as idéias de sistemas dinâmicos, especificamente resultados do tipo teorema de recorrência de Poincaré (um dos resultados fundamentais na teoria ergódica) para demonstrar a existência de progressões aritméticas.

Um problema que esteve em aberto por muito tempo consistia em se determinar uma progressão aritmética arbitrariamente longa, porém finita, em que todos os termos fossem números primos. Uma contribuição importante para resolver esse problema foi dada por Van der Corput (1923) que provou a existência de infinitos triplos de primos em progressão aritmética. Somente em 1981 foi demonstrado a existência de infinitos quádruplos em progressão aritmética com três elementos primos e o quarto primo ou semi-primo (Heath-Brown). Recentemente (2004), Green e Tao [2] demonstraram positivamente a conjectura. Eles usaram o teorema de Szemerédi em combinação com trabalhos recentes de Goldston e Yildirim e fizeram um trabalho bastante técnico e sutil.

As aplicações do teorema ergódico de Birkhoff, um dos pilares da teoria ergódica, também são bastante interessantes. Na maioria dos casos, as afirmações são de tipo probabilística.

Para mencionar um exemplo simples, considere $T : [0,1] \to [0,1]$ tal que

$$T(x) = 10x - [10x].$$

Seja $J := (c, d) \subset [0,1]$ um sub intervalo, então usando o teorema ergódico de Birkhoff concluímos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Card\{0 \le j < n, T^j(x) \in J\}}{n} = d - c$$

para quase todo $x \in [0,1]$ com respeito a medida de Lebesgue. ou seja, por exemplo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Card\{0 \le j < n, a_j = 7\}}{n} = 0.1.$$

Nesta resenha vamos apresentar uma boa referência para estudar problemas da teoria dos números que podem ser estudados usando teoria ergódica de sistemas dinâmicos. O livro ("Ergodic theory of numbers") é acessível para os alunos de final de graduação e pós-graduação. Nele podemos encontrar belos exemplos de aplicações de teoremas ergódicos em teoria dos números.

1 Ergodic theory of numbers

O livro *Ergodic theory of numbers*, escrito por Karma Dajani (University of Utrecht) e Cor Kraaikamp (Delf university of Technology), da coleção "The Carus Mathematical Monographs" é um bom livro para iniciantes, assim como para aqueles com mais experiência na área de teoria ergódica. Uma grande vantagem deste livro é o fato de ser conciso. Os conceitos fundamentais da teoria ergódica e teoria dos números são fornecidos para tornar o livro auto-suficiente e mesmo assim pequeno em tamanho! Resumindo, é um livro prazeroso de ler.

Ao final de cada capítulo os autores sugerem algumas referências mais técnicas para quem estiver interessado em aprofundar-se. Claro que não se trata de um livro-texto de teoria ergódica, mas os autores tentam fazer uma breve introdução à mesma em alguns capítulos do livro.

O primeiro capítulo contém uma breve introdução à teoria de medida e a relação entre sistemas dinâmicos e a representação dos números reais numa base qualquer ou por frações contínuas.

Observamos que na expansão numa base $n \in \mathbb{N}$ qualquer; dado $x \in [0,1]$ temos

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(x)}{n^k}, \; a_k = a_k(x) \in \{0, 1, \cdots, n-1\}.$$

Essas expansões são geradas pela iteração da função $T(x)=nx$ (mod 1). Isto é, $T(x) = nx - a_1$ onde $a_1 = a_1(x)$ é tal que $nx - a_1 \in [0,1)$. Iterando a função pode-se mostrar que $T^k(x) = nT^{k-1}(x) - a_n(x)$.

Curiosidade: Como é sabido, a representação na base 2 (binária) é bastante utilizada na ciência da computação. Antes do uso da base dez (expansão decimal), a expansão na base 6 era utilizada. Na França, por um decreto de Napoleão Bonaparte, a base 6 foi substituída pela base decimal!

Como vimos, a transformação $T(x) = nx \pmod 1$ gera um sistema dinâmico que corresponde a expansão de x na base n . Essa transformação é expansora ($T'(x) = n > 1$) e de Markov com intervalos de continuidade todos do mesmo tamanho. Tais transformações são muito bem estudadas em teoria ergódica.

Para a transformação $T(x) = nx - [nx]$ não é difícil verificar que a medida de Lebesgue é invariante. Isto significa que $m(T^{-1}J) = m(J)$ onde J é qualquer subintervalo de $[0,1]$. De fato, a medida de Lebesgue é ergódica, ou seja, todo subconjunto invariante tem medida zero ou tem medida total. A demonstração da ergodicidade de uma medida, em geral, não é uma tarefa simples.

A representação por fração contínua é outra forma bastante conhecida. O sistema dinâmico correspondente neste caso é a transformação de Gauss, $G(x) = \frac{1}{x}$ (mod-1). Seja $I_k = [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k})$, então $a_n(x) = k$ se $T^n(x) \in I_k$ e

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

A transformação de Gauss admite uma medida de probabilidade invariante e ergódica que é absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue.

Ainda neste capítulo, os autores relacionam a representação por fração contínua com as transformações de Möbius. Existem também exercícios interessantes nessa direção.

No capítulo II, os autores apresentam a expansão de Lüroth (introduzida por J. Lüroth em 1883). O intervalo $[0,1)$ é dividido em subintervalos (não necessariamente de mesmo comprimento). Por exemplo, considere a partição de $[0,1)$ por intervalos $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ onde $n \in \mathbb{N}$. Qualquer número $x \in [0,1)$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} x = & \frac{1}{a_1(x)} + \frac{1}{a_1(x)(a_1(x)-1)a_2(x)} + \cdots \\ & + \frac{1}{a_1(x)(a_1(x)-1)\cdots a_{n-1}(x)(a_{n-1}(x)-1)} + \cdots ; \end{aligned}$$

onde $a_k(x) \geq 2$ para $k \geq 1$. Essa expansão é relacionada com a seguinte função que também é expansora e de tipo Markov,

$$T(x) = \begin{cases} n(n+1)x - n, & x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}), \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

De fato, se colocarmos $a_k(x) = a_1(T^{k-1}(x))$ e $a_1(x) = n$ se $x \in [\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1})$, então vamos obter a expansão de Lüroth de x. Resolvendo alguns exercícios, o leitor poderá demonstrar que a transformação correspondente a expansão de Lüroth preserva a medida de Lebesgue e que o sistema é conjugado, no sentido de teoria de medidas, ao *shift* no espaço de seqüências. Generalizações da série de Lüroth também são apresentadas neste capítulo. Sempre a medida de Lebesgue de intervalo é preservada por transformações correspondentes a estas expansões.

Os autores introduzem também $\beta-$expansões que são exemplos de expansões geradas de uma maneira análoga à expansão de Lüroth com a diferença que, neste caso, a medida de Lebesgue não é mais invariante. Para $\beta > 1$ considere

$$T_\beta(x) := \beta x \quad \mathrm{mod} 1.$$

Se $\beta \in \mathbb{N}$, então T_β é a transformação correspondente a expansão na base β como conhecemos. Quando β não é um número natural, a medida de Lebesgue não vai ser invariante. Os pontos periódicos ou eventualmente periódicos de T_β são estudados por vários autores.

Neste capítulo os autores apresentam os números de Salem e Pisot. Seja α um inteiro algébrico, i.e, raiz de um polinômio com coeficientes inteiros. Chamamos de polinômio minimal, aquele com grau mínimo que tem α como raiz. Todas as outras raízes de polinômio minimal de α são chamadas de conjugados de α.

Um número inteiro algébrico $\alpha > 1$ é chamado Pisot-Vijayaraghavan, se todos os conjugados tenham norma menor que um. Por exemplo $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ é Pisot-Vijayaraghavan, pois o conjugado dele é $\frac{-\sqrt{5}+1}{2} < 1$.

Um número inteiro algébrico é Salem se os conjugados não tenham norma maior do que um e pelo menos um dos conjugados tenha norma um. Números Salem são estudados na teoria da aproximação diofantina e em análise harmônica. O menor número Pisot é a raiz real de $P(z) = z^3 - z - 1$ que é aproximadamente 1.32471795572....

O capítulo III, contém uma breve introdução à teoria ergódica. O teorema ergódico de Birkhoff é o principal resultado neste capítulo e algumas aplicações em teoria dos números são dadas. Pelo fato de que no enunciado do teorema ergódico aparecem integrais de Lebesgue, os autores também apresentam resumidamente o tópico de integração.

Existem alguns resultados interessantes que podemos destacar aqui. Seja $x \in [0,1)$ e $\frac{p_n}{q_n} = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$ a seqüência dos números racionais obtidos por representação x por fração contínua. Os autores demonstram o seguinte resultado de P. Lévy, que é uma conseqüência do teorema ergódico de Birkhoff e da ergodicidade de transformação de Gauss. Fixemos um número inteiro k, e denotemos por C_n o número de ocorrências do dígito k no conjunto $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, então, para quase todo $x \in [0,1)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{n} = \frac{1}{\log 2} \log(1 + \frac{1}{k(k+2)})$$

Isto implica, por exemplo, que o dígito 1 aparece mais ou menos 41.5 por cento na fração contínua de um número "típico" (no sentido da medida de Lebesgue). Lévy também provou que

$$\frac{\log(q_n)}{n} \to \frac{\pi^2}{12 \log 2}$$

e

$$\log |x - \frac{p_n}{q_n}| \to -\frac{\pi^2}{6 \log 2}.$$

Outro resultado interessante neste capítulo é o teorema de Khinchine afirmando que para quase todo $x \in [0,1]$, se

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}},$$

é a representação por frações contínuas, então

$$\lim_{n\to\infty}(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + \frac{1}{k(k+1)})^{\frac{\log k}{\log 2}} = 2.6854\cdots.$$

Estudar sistemas induzidos a partir de um sistema dinâmico original é muito freqüente na teoria ergódica. No capítulo IV, a transformação de primeiro retorno e suas extensões naturais são discutidas. Uma relação entre expansão de Lüroth e expansão na base β é dada. Para começar, os autores definem transformações de retorno e provam o teorema de recorrência de Poincaré, deixando o lema de Kac como exercício. Este capítulo exige um pouco mais de paciência para quem não está familiarizado com a teoria ergódica. Por outro lado, para quem esta começando a estudá-la, ele pode servir como um ótimo exemplo de aplicação de construção de transformações induzidas.

O Capítulo V é dedicado às aproximações diofantinas e representação por fração contínua. Hurwitz, em 1981, provou que para qualquer x irracional existem infinitos pares de inteiros (p, q) tais que

$$|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

Mencionamos que a constante $\frac{1}{\sqrt{5}}$ é optimal.

Dado $x \in [0,1)$ irracional e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, define-se o coeficiente de aproximação de x por $\frac{p}{q}$ como

$$\Theta(x, \frac{p}{q}) = q|qx - p|$$

e definimos

$$\epsilon(x, \frac{p}{q}) = \begin{cases} 1 & x > \frac{p}{q} \\ -1, & x > \frac{p}{q}, \end{cases}$$
$$\delta(x, \frac{p}{q}) = (-1)^n \epsilon(x, \frac{p}{q}),$$

onde n é o comprimento da fração contínua de $\frac{p}{q}$. Observe que o comprimento de

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}}$$

é igual a n. Seja RCF(x) o conjunto de todos os números racionais da forma $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ onde $x = [a_1, a_2, \cdots]$ é a fração contínua de x.

Um resultado de Barbolosi e Jager (1994) demonstra o seguinte:

Sejam p, q dois inteiros tais que $(p, q) = 1, q > 0$ e seja x um número irracional.

- Se $\delta(x, \frac{p}{q}) = +1$, então

$$\Theta(x, \frac{p}{q}) < \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{p}{q} \in RCF(x)$$

e

$$\Theta(x, \frac{p}{q}) > 1 \Rightarrow \frac{p}{q} \notin RCF(x)$$

- por outro lado, se $\delta(x, \frac{p}{q}) = -1$, então

$$\Theta(x, \frac{p}{q}) < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{p}{q} \in RCF(x)$$

e

$$\Theta(x, \frac{p}{q}) > \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{p}{q} \notin RCF(x)$$

Como um corolário temos o teorema de Legendre que fornece um critério para decidir se um número racional dado $\frac{p}{q}$ pertence a RCF(x) ou não.

Sejam p, q dois números inteiros tais que $(p, q) = 1$ e $q > 0$ e x irracional. Então, $\Theta(x, \frac{p}{q}) < \frac{1}{2}$ implica que $\frac{p}{q} \in \mathrm{RCF}(x)$.

No capítulo final (capítulo VI) os autores apresentam uma breve introdução à teoria da entropia e da aleatoriedade. A entropia métrica, com respeito de uma medida invariante, é uma constante para medir a "complexidade" de sistemas dinâmicos. Os autores provam que a entropia é um invariante para a conjugação de sistemas dinâmicos. A entropia de T_β (transformação de $\beta-$expansão) é $\log(\beta)$. Para calcular a entropia de transformação de Gauss usa-se o teorema de Shannon-McMillan-Breiman e pode provar-se que ela é igual $\frac{\pi^2}{6\log 2}$.

Os teoremas de Lochs e Saleski são apresentados. O Teorema de Lochs é um resultado de teorema do tipo Shannon-MacMillan-Breiman na teoria ergódica. Vamos enunciar este resultado. Seja x um número irracional e $x = .d_1 d_2 \cdots$ a expansão decimal e $[0; a_1, a_2, \cdots]$ a representação por fração contínua de x. Seja $y \in \mathbb{Q}$ o truncamento da expansão de x, i.e $y = .d_1 d_2 \cdots d_n$ e $y = [0; c_1, c_2, \cdots, c_k]$. Definimos $m = m(n, x)$ como o maior número m tal que $a_i = c_i$ para $i \leq m$ então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m(n,x)}{n} = \frac{6\log 2 \log 10}{\pi^2} \quad \text{para quase todo} \quad x \in [0,1].$$

2 Conclusões

O livro aqui descrito serve para um curso de um semestre de final de graduação ou início de pós-graduação. De fato, um tal curso pode conter resultados básicos de teoria ergódica e sistemas dinâmicos além de teoria dos números. Para os alunos de graduação um conhecimento de teoria de medida pode ajudar bastante.

Existe uma ótima referência básica para teoria ergódica com aplicações, escrita pelo Prof. Krerley Oliveira, da Universidade Federal de Alagoas, e publicada como um dos livros do 25° colóquio Brasileiro de Matemática.

Para os interessados recomendo também o livro "Number theory and Dynamical systems", que é uma coleção de artigos de vários autores que participaram do evento "Number theory and dynamical systems", em

"University of York", em 1987. Este livro é mais avançado e requer um conhecimento mais amplo de sistemas dinâmicos.

3 Agradecimento

O autor da resenha gostaria de agradecer o Professor Sérgio Volchan por ter lido cuidadosamente a primeira versão e corrigir os (muitos) erros de português para deixar o texto mais compreensível.

Referências

[1] H. Furstenberg *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory.*, Princeton, 1981.

[2] B. Green and T. Tao *The primes contain arbitrary large arithmetic progressions.*, to appear, Annals of Mathematics.

Ali Tahzibi
Departamento de Matemática,
ICMC-USP São Carlos, Caixa Postal 668, 13560-970 São Carlos-SP, Brasil.
email: tahzibi@icmc.sc.usp.br
urladdr: http://www.icmc.sc.usp.br/~tahzibi