

Sobre Variedades Polares de Superfícies

NIVALDO DE GÓES GRULHA JÚNIOR E THIAGO DE MELO

Resumo: Neste trabalho, abordamos de forma rápida e simples alguns conceitos de Variedades Polares, bem como a elaboração de exemplos que ilustram tais objetos.

1 Introdução

O conceito de Variedades Polares foi introduzido por Bernard Teissier e Lê Dung Tráng nos anos 70 ([7, 10, 11]). Desde então tem sido uma ferramenta de grande importância em vários domínios da Matemática, como Teoria de Singularidades, Teoria de Estratificação, Geometria Algébrica e Classes Características. Textos básicos dos assuntos acima são ([3, 4, 6, 9]). Uma relação entre Classes Características e Variedades Polares é dada em [1].

Abordagens mais avançadas de Variedades Polares foram desenvolvidas baseadas em conceitos mais abstratos, como por exemplo Projeções Genéricas, Modificação de Nash e Variedade Conormal ([2, 11]). Com isso, foi possível o desenvolvimento da teoria de Variedades Polares em objetos mais gerais tais como em Variedades Algébricas ou Analíticas.

Neste trabalho, pretendemos nos concentrar nas seguintes superfícies: a esfera S^2 e o toro T , utilizando basicamente Álgebra Linear e Cálculo Diferencial, como ferramentas. Isto se torna interessante pois a pre-

sença de figuras que ilustram a técnica utilizada, nos leva a uma melhor compreensão do assunto.

2 Variedades Polares

Primeiramente, introduziremos de forma sucinta as noções de Variedade Diferenciável e Espaço Tangente, necessárias ao desenvolvimento do trabalho. Maiores detalhes encontram-se em livros de Topologia Diferencial, por exemplo [5].

Os objetos centrais da Topologia Diferencial são as chamadas Variedades Diferenciáveis. Intuitivamente, podem ser pensadas como espaços topológicos obtidos a partir de uma união de abertos do espaço euclidiano, ‘colados’ de forma coerente a fim de manterem uma estrutura onde seja possível a utilização do Cálculo Diferencial.

De forma mais precisa, podemos definir uma variedade como segue: seja M um subespaço topológico de um espaço euclidiano \mathbb{R}^N . Então M é uma variedade diferenciável de dimensão d se é localmente difeomorfa a \mathbb{R}^d , isto é, cada ponto $p \in M$ possui uma vizinhança V em M que é difeomorfa a um conjunto aberto U de \mathbb{R}^d . Um difeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$ é chamado uma parametrização da vizinhança V .

Outro objeto importante para nosso trabalho, definido abaixo, é o Espaço Tangente a M em um ponto $p \in M$. Tal espaço nos permite a utilização da Álgebra Linear como ferramenta em nosso estudo.

Define-se o espaço tangente de M no ponto $p = \phi(q) \in M$ como sendo a imagem da aplicação $d\phi_q : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^N$, onde $d\phi_q$ é a derivada da função ϕ , no ponto q . Assim, o espaço tangente em p , denotado por T_pM , é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^N cujo paralelo transladado $p + T_pM$ é a melhor aproximação plana para M através de p . Vale lembrar que tal espaço não depende da parametrização ϕ usada.

Trataremos agora de uma simples questão, que nos levará à formalização do conceito de Variedades Polares. Observamos que, para uma melhor visualização, todos os planos e as retas nas figuras a seguir estão transladados, de modo a não se sobreporem.

Consideremos a esfera unitária $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, dada por $F^{-1}(0)$, onde $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Dado um plano $\pi \subset \mathbb{R}^3$ contendo a origem, queremos encontrar os pontos de S^2 com maior ordem de contato com π , ou seja, pontos $p \in S^2$ para os quais $\dim(T_p S^2 \cap \pi)$ seja a maior possível.

Por exemplo, para π dado por $z = 0$, encontramos apenas os pontos $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, -1)$, já que para qualquer outro ponto $q \in S^2$ temos que $T_q S^2 \cap \pi$ é uma reta.

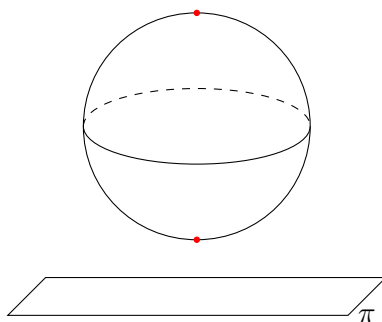


Figura 1: Variedade polar $P_2(S^2, \pi)$ de codimensão 2.

Isto se deve ao fato da equação geral do plano tangente a S^2 no ponto $p = (x_0, y_0, z_0)$ ser

$$\frac{\partial F}{\partial x}(p)x + \frac{\partial F}{\partial y}(p)y + \frac{\partial F}{\partial z}(p)z = 0,$$

ou seja,

$$2x_0x + 2y_0y + 2z_0z = 0.$$

Portanto, basta observar que os planos $T_p S^2$ e π coincidem se, e somente se, $x_0 = y_0 = 0$ e $z_0 = \pm 1$.

Uma situação mais interessante surge quando trocamos o plano π por uma reta L . Neste caso, procuramos por pontos $p \in S^2$ tais que $\dim(T_p S^2 \cap L) = 1$, isto é, $L \subset T_p S^2$.

Sejam $v = (v_1, v_2, v_3)$ um vetor diretor de L e $w = (\frac{\partial F}{\partial x}(p), \frac{\partial F}{\partial y}(p), \frac{\partial F}{\partial z}(p))$ um vetor normal de $T_p S^2$. Como a inclusão acima ocorre se, e somente

se, $v \perp w$, resolvemos o problema buscando as soluções de

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ v_1 \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) + v_2 \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) + v_3 \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

nas variáveis x, y, z .

Por exemplo, para $v = (1, 1, 1)$ temos

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

cuja solução é a intersecção de S^2 com o plano $2x + 2y + 2z = 0$, isto é, um grande círculo.

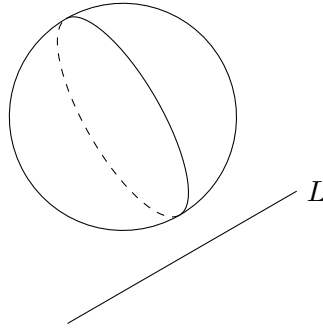


Figura 2: Variedade polar $P_1(S^2, L)$ de codimensão 1.

Buscando formalizar e também generalizar as idéias acima, necessitamos do conceito de transversalidade.

Lembramos que dois subespaços vetoriais $E, F \subset \mathbb{R}^N$ são transversais se $E + F = \mathbb{R}^N$. Além disso, valem as igualdades

$$\text{codim}(E \cap F) = \text{codim}(E) + \text{codim}(F),$$

$$\dim(E \cap F) = \dim(E) - \text{codim}(F),$$

onde $\text{codim}(E) = N - \dim(E)$.

Caso $E, F \subset \mathbb{R}^N$ não sejam transversais, temos

$$\dim(E \cap F) > \dim(E) - \text{codim}(F), \quad (2)$$

pois se $\dim(E \cap F) < \dim(E) - \text{codim}(F)$ teríamos

$$\dim(E) + \dim(F) - \dim(E + F) < \dim(E) - (N - \dim(F)),$$

isto é, $\dim(E + F) > N$, que é absurdo.

Resumindo:

$$E \text{ é transversal a } F \iff \dim(E \cap F) = \dim(E) - \text{codim}(F)$$

$$E \text{ não é transversal a } F \iff \dim(E \cap F) > \dim(E) - \text{codim}(F)$$

O conceito de transversalidade torna-se importante neste momento pois a ocorrência de maior contato entre uma variedade M e um subespaço vetorial D , em um dado ponto $p \in M$, equivale a não-transversalidade entre os espaços vetoriais $T_p M$ e D .

Note que, nos exemplos acima, $D_{(1)} = \pi$ e $D_{(2)} = L$, onde o índice representa a co-dimensão de D em \mathbb{R}^3 . Assim, a não-transversalidade entre S^2 e $D_{(1)}$ ocorre se, e somente se,

$$\dim(T_p S^2 \cap D_{(1)}) > \dim(T_p S^2) - \text{codim}(D_{(1)}) = \dim(S^2) - 1 = 1.$$

Logo, a não-transversalidade equivale a $\dim(T_p S^2 \cap D_{(1)}) = 2$, já que $\dim(T_p S^2) = \dim(D_{(1)}) = 2$. O cálculo para $D_{(2)}$ é análogo.

Intuitivamente vemos que não-transversalidade e maior contato são conceitos equivalentes.

Estamos em condições de introduzir a definição de variedades polares.

Sejam $M^d \subset \mathbb{R}^N$ uma variedade diferenciável de dimensão d e $D_{(d-k+1)}$ um subespaço vetorial de codimensão $d - k + 1$ em \mathbb{R}^N . Definimos a k -ésima variedade polar de M com relação a $D_{(d-k+1)}$ como sendo

$$P_k(M, D_{(d-k+1)}) = \{p \in M; \dim(T_p M \cap D_{(d-k+1)}) \geq k\},$$

onde \dim denota a dimensão complexa no caso complexo e dimensão real no caso real. No caso complexo se pode provar que, para todo $k = 0, 1, \dots, d$, $\text{codim}(P_k(M, D_{(d-k+1)})) = k$, para $D_{(d-k+1)}$ em um aberto denso da variedade grassmannianna $G(N-d+k-1, N)$ (para mais informações sobre a variedade grassmannianna, o leitor pode consultar a referência [8]).

Com o intuito de fixar melhor as idéias discutidas acima, exibiremos mais alguns exemplos, utilizando superfícies bem conhecidas.

No caso do toro T , obtido por $F^{-1}(0)$, onde

$$F(x, y, z) = z^2 + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2\right)^2 - 1,$$

$P_2(T, \pi)$ é exatamente o conjunto dos pontos $p \in T$ tais que o vetor normal a T em p é múltiplo do vetor normal de π . Isto torna-se claro nas figuras abaixo.

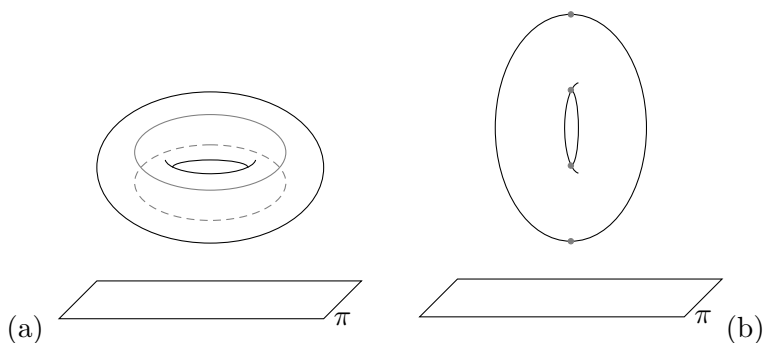


Figura 3: (a) $P_1(T, \pi_1)$, (b) $P_2(T, \pi_2)$.

Note que na figura (2), a variedade polar não possui codimensão 2. Isto ocorre pois o plano π_1 não pertence ao aberto denso citado acima.

Para exibirmos $P_1(T, L)$, encontramos as soluções de (1) com o auxílio do computador e obtemos duas configurações possíveis, representadas na figura abaixo, para as retas L_1 e L_2 .

Note que, apesar das codimensões de $P_1(T, L)$ serem iguais em (2) e (2), para pequenas perturbações de L_2 obtemos duas curvas como em

(2) e não mais quatro como em (2). Isto se deve ao fato da reta L_2 não pertencer ao aberto denso, citado acima.

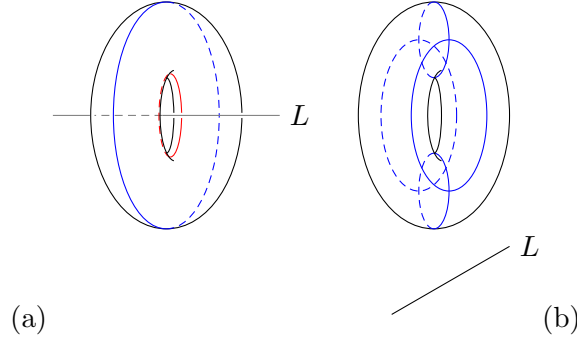


Figura 4: (a) $P_1(T, L_1)$, (b) $P_1(T, L_2)$.

Uma aplicação do conceito de Variedades Polares aparece quando se tenta explicitar uma classe característica de uma variedade analítica singular V , que até então era dada principalmente em função da obstrução local de Euler, que é de difícil cálculo. Para variedades singulares, a variedade polar é definida por

$$P_k(V, D_{(d-k+1)}) = \overline{P_k(V_{\text{reg}}, D_{(d-k+1)})},$$

com V_{reg} sendo a parte regular da variedade V .

Lê D.T. e B. Teissier provaram em [7] que a obstrução local de Euler pode ser calculada, em termos das multiplicidades das variedades polares, por

$$Eu_V(p) = \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^{d-k-1} m_{d-k-1}(V, p), \quad (3)$$

onde $m_i(V, p)$ é a multiplicidade da i -ésima variedade polar, no ponto p .

Calculemos a obstrução local de Euler $Eu_V(0)$ da variedade singular

$$V = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3; y^2 - x^3 - t^2 x^2 = 0\},$$

mostrada na figura (5). Neste caso, $P_0(V, \{0\}) = V$ e $P_1(V, L)$ é a parábola descrita por $\{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3; x = -t^2, y = 0\}$, de onde obtemos

$m_0(V, 0) = 2$ e $m_1(V, 0) = 1$. Substituindo em (3) temos

$$Eu_V(0) = 2 - 1 = 1.$$

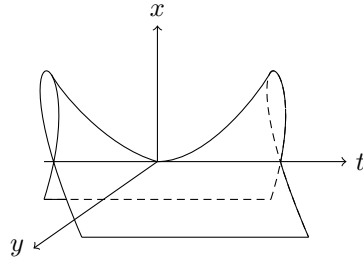


Figura 5: Variedade Singular.

Para finalizar, mostramos um algoritmo para o Maple, dependendo apenas de $v = (v_1, v_2, v_3)$, que permite uma visualização dos conceitos acima.

Com os valores especificados abaixo, obtemos a figura (2), mostrando o toro T , a reta L cujo vetor diretor é $v = (1, \frac{1}{2}, \frac{3}{5})$ e a superfície dada implicitamente pela equação

$$2 \left[\frac{(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)(x + \frac{1}{2}y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{3}{5}z \right] = 0.$$

A variedade polar $P_1(T, L)$ é a intersecção destas duas superfícies, mostrada na figura (2). Vale observar que o leitor pode alterar as coordenadas de v , movimentar facilmente as superfícies, alterar as cores, entre outros recursos, podendo assim ter uma melhor visualização, como por exemplo em (2), obtida usando $v = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{10})$. Quando $v_3 = 0$, temos um “caso limite”, mostrado em (2) e (2).

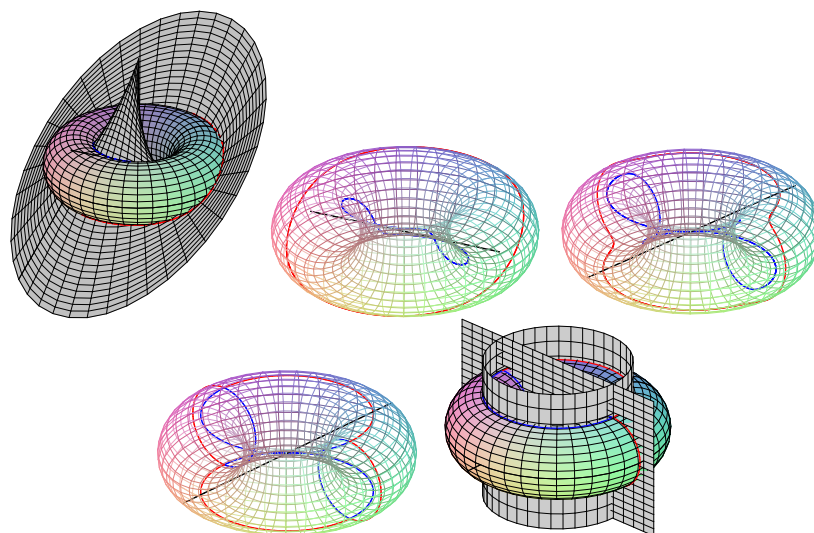


Figura 6: Variedade polar $P_1(T, L)$ de codimensão 1.

Um algoritmo para o Maple

```
[> restart:
[> with(plots):
[> Gtoro:=proc (V)
local u,v,t0,toro,Gtoro,NV,DV,Greta,S,Gsup,Gsup2,
      C1,C2,C3,C4,GC1,GC2,GC11,GC12,GC13,GC14,GC21,GC22,GC23,GC24:
toro:=(u,v)->[(2+cos(v))*cos(u),(2+cos(v))*sin(u),sin(v)]:
Gtoro:=plot3d(toro(u,v),u=-Pi..Pi,v=0..2*Pi,grid=[40,30],
      scaling=constrained):
NV:=sqrt(V[1]^2+V[2]^2+V[3]^2):
DV:=[V[1]/NV,V[2]/NV,V[3]/NV]:
Greta:=spacecurve([t*Dv[1],t*Dv[2],t*Dv[3]],t=-3.5..3.5,
      color=black,thickness=3):
if V[3] <> 0 then
S:=(r,theta,V)->[r*cos(theta),r*sin(theta),
      -(r-2)*(V[2]*sin(theta)+V[1]*cos(theta))/V[3]]:
Gsup:=plot3d(S(r,t,V),r=0..4,t=0..2*Pi,color=gray,
      scaling=constrained,grid=[30,30]):
C1:=t->[(2+V[3])/sqrt((V[1]*cos(t)+V[2]*sin(t))^2+V[3]^2)*cos(t),
      (2+V[3])/sqrt((V[1]*cos(t)+V[2]*sin(t))^2+V[3]^2)*sin(t),
      -1/sqrt((V[1]*cos(t)+V[2]*sin(t))^2+V[3]^2)*
```

```

(V[1]*cos(t)+V[2]*sin(t)):
C2:=t->[(2-V[3])/sqrt((V[1]*cos(t)+V[2]*sin(t))^2+V[3]^2))*cos(t),
(2-V[3])/sqrt((V[1]*cos(t)+V[2]*sin(t))^2+V[3]^2))*sin(t),
1/((V[1]*cos(t)+V[2]*sin(t))^2+V[3]^2)^(1/2)*
(V[1]*cos(t)+V[2]*sin(t)):
GC1:=spacecurve(C1(t),t=0..2*Pi,color=red,
thickness=3,numpoints=1000):
GC2:=spacecurve(C2(t),t=0..2*Pi,color=blue,
thickness=3,numpoints=1000):
display(Gtoro,Gsup,Greta,GC1,GC2,view=-2..2,
orientation=[153,-124]):
elif V[2] <> 0 then
Gsup:=plot3d([2*cos(t),2*sin(t),z],t=0..2*Pi,z=-2..2,
color=gray,scaling=constrained):
Gsup2:=plot3d([u/sqrt(1+V[1]^2/V[2]^2),
-u*V[1]/V[2]/sqrt(1+V[1]^2/V[2]^2),z],
u=-3.5..3.5,z=-2..2,color=gray,scaling=constrained):
C1:=t-> [2*cos(t),2*sin(t),1]:
C2:=t-> [2*cos(t),2*sin(t),-1]:
C3:=t-> [(2+cos(t))/sqrt(1+V[1]^2/V[2]^2),
-(2+cos(t))*V[1]/(V[2]*sqrt(1+V[1]^2/V[2]^2)),sin(t)]:
C4:=t-> [-C3(t)[1],-C3(t)[2],sin(t)]:
t0:=-arctan(V[1]/V[2]):
GC11:=spacecurve(C1(t),t=t0+Pi..t0+2*Pi,color=red,thickness=3):
GC13:=spacecurve(C2(t),t=t0..t0+Pi,color=red,thickness=3):
GC12:=spacecurve(C3(t),t=-Pi/2..Pi/2,color=red,thickness=3):
GC14:=spacecurve(C4(t),t=-Pi/2..Pi/2,color=red,thickness=3):
GC21:=spacecurve(C1(t),t=t0..t0+Pi,color=blue,thickness=3):
GC23:=spacecurve(C2(t),t=t0+Pi..t0+2*Pi,color=blue,thickness=3):
GC22:=spacecurve(C3(t),t=Pi/2..3*Pi/2,color=blue,thickness=3):
GC24:=spacecurve(C4(t),t=Pi/2..3*Pi/2,color=blue,thickness=3):
display(Gtoro,Gsup,Greta,Gsup2,GC11,GC12,GC13,GC14,
GC21,GC22,GC23,GC24,view=-2..2):
else
Gsup:=plot3d([2*cos(t),2*sin(t),z],t=0..2*Pi,z=-2..2,
color=gray,scaling=constrained):
Gsup2:=plot3d([0,u,z],u=-3.5..3.5,z=-2..2,
color=gray,scaling=constrained):
t0:=Pi/2:
C1:=t-> [2*cos(t),2*sin(t),1]:
C2:=t-> [2*cos(t),2*sin(t),-1]:
C3:=t-> [0,(2+cos(t)),sin(t)]:

```

```
C4:=t-> [-C3(t)[1],-C3(t)[2],sin(t)]:
C12:=spacecurve(C3(t),t=-Pi/2..Pi/2,color=red,thickness=3):
C11:=spacecurve(C1(t),t=t0+Pi..t0+2*Pi,color=red,thickness=3):
C13:=spacecurve(C2(t),t=t0..t0+Pi,color=red,thickness=3):
C14:=spacecurve(C4(t),t=-Pi/2..Pi/2,color=red,thickness=3):
C21:=spacecurve(C1(t),t=t0..t0+Pi,color=blue,thickness=3):
C23:=spacecurve(C2(t),t=t0+Pi..t0+2*Pi,color=blue,thickness=3):
C22:=spacecurve(C3(t),t=Pi/2..3*Pi/2,color=blue,thickness=3):
C24:=spacecurve(C4(t),t=Pi/2..3*Pi/2,color=blue,thickness=3):
display(Gtoro,Gsup,Gsup2,Greta,GC11,GC12,GC13,GC14,
        GC21,GC22,GC23,GC24):
fi: end:
[> Gtoro([1,.5,.6]);
```

Agradecimento: Gostaríamos de agradecer ao Prof. Dr. Wladimir Seixas, do Departamento de Matemática da Unesp Rio Claro, pela grande ajuda na elaboração do programa acima.

Referências Bibliográficas

- [1] Brasselet, J.-P., *Milnor classes via polar varieties*, Singularities in algebraic and analytic geometry (San Antonio, TX, 1999), 181–187, Contemp. Math., 266 (2000), Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- [2] Gaffney, T., *Polar multiplicities and equisingularity of map germs*, Topology 32 (1993), No. 1, 185–223.
- [3] Gibson, C.G., *Singular points of smooth mappings*, Research notes in mathematics, 25, London, San Francisco, Pitman, 1979.
- [4] Gibson, C.G., Wirthmüller, K., du Plessis, A.A. and Looijenga, E.J.N., *Topological stability of smooth mappings*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 552, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.
- [5] Guillemin, V., Pollack, A., *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc. New Jersey, 1974.
- [6] Hartshorne, Robin, *Algebraic geometry*, Graduate texts in mathematics, 52, New York, Springer-Verlag, 1977.
- [7] Lê Dung, T., Teissier, B., *Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières*, Ann. of Math. (2) 114 (1981), No. 3, 457–491.
- [8] Lima, E.L., *Variedades diferenciáveis*, IMPA, 1973.
- [9] Milnor, J.W., Stasheff, J.D., *Characteristic Classes*, Annals of Mathematics Studies, No. 76. Princeton University Press, Princeton, N.J. 1974.
- [10] Teissier, B., *Variétés polaires. I. Invariants polaires des singularités d'hypersurfaces*, Invent. Math. 40 (1977), No. 3, 267–292.
- [11] Teissier, B., *Variétés polaires. II. Multiplicités polaires, sections planes, et conditions de Whitney*, Lecture Notes in Math., 961, Springer, Berlin, 1982.

IVALDO DE GÓES GRULHA JÚNIOR
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP
Av. Trabalhador São-carlense, 400 - Centro
Caixa Postal: 668 - CEP: 13560-970 - São Carlos - SP
E-mail: njunior@icmc.usp.br

THIAGO DE MELO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP
Av. Trabalhador São-carlense, 400 - Centro
Caixa Postal: 668 - CEP: 13560-970 - São Carlos - SP
E-mail: tmelo@icmc.usp.br