MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nº 41 – Dezembro/2006 – pp. 23–31

Produtos de potências racionais de números primos

Mário B. Matos e Mário C. Matos

INTRODUÇÃO

Um dos conceitos mais simples é o de número natural e ainda assim existem diversos resultados belos e interessantes sobre os mesmos. Um exemplo particularmente bem conhecido é o fato de que é possível escrever qualquer natural diferente de zero como um produto de primos. Mais precisamente, dado um natural diferente de zero podemos escrevê-lo, de maneira única, como um produto finito de potências naturais de números primos.

Números racionais estritamente positivos podem ser escritos como razões entre naturais não nulos. Usando o resultado anterior fica claro que dado um racional estritamente positivo podemos escrevê-lo, de maneira única, como um produto finito de potências inteiras de primos.

Infelizmente não é tão fácil estender este procedimento para números reais. Por exemplo: qual é o conjunto dos números que podem ser escritos como produtos finitos de potências racionais de números primos? Evidentemente esse conjunto inclui alguns números irracionais como $\sqrt{2}$ e outras potências racionais de racionais. Esse conjunto coincide com os reais? Essa representação é única? Para saber se é possível obter estas respostas usaremos outro conceito importante: Espaços Vetoriais.

Vamos imaginar que é possível pensar nos números primos como base de algum espaço vetorial no qual cada vetor seria um número real e os coeficientes de sua representação na base seriam os expoentes. Assim o espaço gerado pelos primos, ou seja o conjunto de todos os números escritos como produtos finitos de potências racionais de primos, é um espaço vetorial. Na próxima seção definimos adequadamente o espaço vetorial, as operações e mostramos que este espaço é um subconjunto próprio dos reais.

O passo seguinte para incluir todos os reais seria introduzir expoentes reais, mas neste caso a solução é trivial. Temos um espaço de dimensão 1 pois para qualquer primo (p) e para cada real x vale $x = p^{\log_p x}$. Até este ponto tudo que fizemos foi generalizar um resultado conhecido sem introduzir novos elementos. Uma outra possibilidade é abrir mão de certas propriedades e verificar se ganhamos alguma coisa. É claro que para tanto deveremos tomar certos cuidados e aceitar algumas restrições.

Um resultado interessante para o nosso problema é a representação de Wallis para o número π em termos de um produto infinito de naturais:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}$$

que não pode ser reescrita diretamente em termos de primos. Entretanto nos sugere uma possibilidade: a inclusão de produtos infinitos de potências racionais de primos no problema. Para verificar essa possibilidade introduzimos os conceitos de produtos infinitos e espaços de Banach.

Com estes conceitos mostramos na última seção que é possível escrever os reais estritamente positivos como produtos infinitos de potências racionais de números primos. Ou seja, obtivemos o resultado desejado, mas perdemos a propriedade da representação ser única.

Neste artigo procuramos estabelecer claramente os conceitos que poderiam não ser conhecidos por parte de alguns leitores desta revista. Um conhecimento elementar de Álgebra Linear, de Análise Matemática e de Espaços Métricos ajudam no completo entendimento destes resultados.

1. O ESPAÇO VETORIAL $(\mathbb{R}_+, \oplus, \odot)$ SOBRE $\mathbb{Q}$

Em primeiro lugar fixemos as notações que iremos usar neste artigo. Denotamos por $\mathbb{R}_+$ o subconjunto do conjunto $\mathbb{R}$ (de todos os números reais) que são estritamente positivos. Consideremos a seguinte operação sobre $\mathbb{R}_+$:

$$\oplus : (x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow x \oplus y = xy \in \mathbb{R}_+.$$

É claro que $(\mathbb{R}_+, \oplus)$ é um grupo comutativo e que 1 é o seu elemento neutro. O elemento oposto a x para esta operação é denotado por $\ominus x = x^{-1}$ e escrevemos $y \oplus (\ominus x) = y \ominus x = yx^{-1}$.

Denotamos por $\mathbb{Q}$ o corpo dos números racionais com as operações usuais de adição e multiplicação.

Agora definimos a seguinte operação:

$$\odot : (\alpha, x) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \alpha \odot x = x^{\alpha} \in \mathbb{R}_+.$$

É fácil provar que $(\mathbb{R}_+, \oplus, \odot)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$.

Indicamos por $\mathbb{P}$ o conjunto de todos os números primos contidos no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Quando escrevemos $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \dots\}$ estamos considerando todos os números primos $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $\dots$, enumerados em ordem crescente.

1.1. Proposição - O conjunto $\mathbb{P}$ é linearmente independente em $\mathbb{R}_+$.

Demonstração - Se $p_j \in \mathbb{P} \subset \mathbb{R}_+$, $\alpha_j = r_j/q_j \in \mathbb{Q}$, $r_j \in \mathbb{Z}$, $q_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, n$ são tais que $\alpha_1 \odot p_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_n \odot p_n = 1$, podemos escrever

$$(\alpha_1 \odot p_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_n \odot p_n)^{q_1 \dots q_n} = p_1^{r_1 q_2 \dots q_n} \dots p_n^{q_1 \dots q_{n-1} r_n} = 1.$$

Pelo Teorema da Representação Única, que estabelece que os números naturais são escritos de modo único como um produto finito de potências naturais de primos, segue que $r_1 = \cdots = r_n = 0$. $\square$

Consideramos agora o subespaço vetorial $[\mathbb{P}]$ de $\mathbb{R}_+$ gerado por $\mathbb{P}$.

1.2. Proposição - $[\mathbb{P}]$ é o conjunto de todos os números da forma β^{γ}, com $\gamma, \beta \in \mathbb{Q}$ e $\beta > 0$.

Demonstração - Se $x \in [\mathbb{P}]$, podemos escrever x na forma

$$\alpha_1 \odot x_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_n \odot x_n = \bigoplus_{j=1}^{n} \alpha_j \odot p_j = \prod_{j=1}^{n} p_j^{\alpha_j}$$

para algum $n \in \mathbb{N}$, com $\alpha_j = r_j/q_j \in \mathbb{Q}$, $r_j \in \mathbb{Z}$, $q_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \ldots, n$. Logo

$$p_1^{r_1 q_2 \ldots q_n} \ldots p_n^{q_1 \ldots q_{n-1} r_n} = x^{q_1 \ldots q_n}.$$

Como o lado esquerdo desta identidade é um número racional β, segue que $x = \beta^\gamma$, com

$$\gamma = \frac{1}{q_1 \ldots q_n} \in \mathbb{Q}.$$

Sabemos que cada número racional é um produto finito de potências inteiras de primos. Logo β^γ, com $\gamma, \beta \in \mathbb{Q}$ e $\beta > 0$, está em $[\mathbb{P}]$. $\square$

Agora, para facilitar o entendimento deste artigo, vamos recordar alguns conceitos estudados nas disciplinas iniciais do curso de Graduação em Matemática, e adaptá-los ao nosso caso.

Assim, uma *norma* definida no espaço vetorial $\mathbb{R}_+$ sobre $\mathbb{Q}$ é uma aplicação:

$$\| \ . \ \| : x \in \mathbb{R}_+ \longrightarrow \|x\| \in \mathbb{R}$$

que satisfaz

(1) $\|x\| \geq 0$, para cada $x \in \mathbb{R}_+$,

(2) $\|x\| = 0$ se, e só se, $x = 0$,

(3) $\|\alpha \odot x\| = |\alpha| \|x\|$, para cada $\alpha \in \mathbb{Q}$ e $x \in \mathbb{R}_+$,

(4) $\|x \oplus y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+$.

Uma norma $\| \ . \ \|$ define uma métrica d em $\mathbb{R}_+$ pela fórmula

$$d(x, y) = \|y \ominus x\|.$$

Se o espaço métrico $(\mathbb{R}_+, d)$ for completo, diz-se que o espaço normado $(\mathbb{R}_+, \| \ . \ \|)$ é um espaço de Banach. Observemos que, neste caso, uma seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathbb{R}_+$ é de Cauchy se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tal que

$$n, m \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \|x_n \ominus x_m\| \leq \varepsilon.$$

Para $(\mathbb{R}_+, \|\ .\ \|)$ ser de Banach, devemos ter a convergência de cada seqüência de Cauchy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathbb{R}_+$. Isto significa que existe $x \in \mathbb{R}_+$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, isto é: para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, satisfazendo

$$n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \|x_n \ominus x\| \leq \varepsilon.$$

Agora definimos

$$\|\ .\ \|_{\log} : x \in \mathbb{R}_+ \longrightarrow \|x\|_{\log} = |\log x| \in \mathbb{R}.$$

1.3. Proposição - $(\mathbb{R}_+, \oplus, \odot, \|\ .\ \|_{\log})$ é um espaço de Banach sobre $\mathbb{Q}$.

Demonstração - É fácil verificar que $\|\ .\ \|_{\log}$ define uma norma sobre $\mathbb{R}_+$. Consideremos agora a seqüência de Cauchy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathbb{R}_+$. Isto implica que $(\log x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência de Cauchy de números reais. Como $(\mathbb{R}, |\ .\ |)$ é completo, segue que $(\log x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para algum $y = \log x \in \mathbb{R}$. Isto é equivalente a

$$0 = \lim_{n\to\infty} |\log x_n - \log x| = \lim_{n\to\infty} \|x_n \ominus x\|_{\log}.$$

Logo $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x in $(\mathbb{R}_+, \|\ .\ \|_{\log})$. □

1.4. Proposição - Cada número real $x > 0$ está na aderência de $[\mathbb{P}]$ em $(\mathbb{R}_+, \|\ .\ \|_{\log})$.

Demonstração - Lembremos que $\frac{\log x}{\log 2}$ é o limite de uma seqüência $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ de números racionais na norma usual de $\mathbb{R}$. Logo

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|2^{r_n} \ominus x\|_{\log} &= \lim_{n\to\infty} \|2^{r_n} \ominus 2^{\frac{\log x}{\log 2}}\|_{\log} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \left(r_n - \frac{\log x}{\log 2} \right) \log 2 \right| = 0\end{aligned}$$

□

No nosso espaço de Banach $(\mathbb{R}_+, \oplus, \odot, \|\ .\ \|_{\log})$ dizer que uma série de elementos x_n de $\mathbb{R}_+$ converge a x significa que a seqüência de suas somas parciais $s_n = \bigoplus_{j=1}^{n} x_j = \prod_{j=1}^{n} x_j$ converge a x na norma $\|\ .\ \|_{\log}$. Portanto, isso significa que

$$0 = \lim_{n\to\infty\|} \left\| \bigoplus_{j=1}^{n} x_j \ominus x \right\|_{\log} = \lim_{n\to\infty} \log\left(x_1 \ldots x_n x^{-1}\right). \qquad (1)$$

Tal expressão equivale a escrever

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \log(x_j) = \log x.$$

Por outro lado, usando a continuidade da função esponencial, isto também significa que tal expressão equivale a dizer que

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} x_j = x. \tag{2}$$

Em vista de (2) dizemos que o *produto infinito da seqüência* $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ *converge para* x e escrevemos

$$\prod_{j=1}^{\infty} x_j = x.$$

Para maiores informações sobre a teoria de produtos infinitos consulte, por exemplo, Ahlfors [1].
Tendo em vista a expressão (1), podemos dizer que a *série de termos* $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ *converge a* x *em* $(\mathbb{R}_+, \oplus, \odot, \| \,.\, \|_{\log})$ e escrevemos

$$\bigoplus_{j=1}^{\infty} x_j = x.$$

Pelo que vimos acima, deduzimos que a convergência da série de elementos $x_n, n \in \mathbb{N}$ e do produto infinito desses mesmos elementos ocorrem, quando, e apenas quando, vale a convergência da série numérica $\sum_{j=1}^{\infty} \log(x_j)$.

Sabemos da teoria de séries numéricas, que, para uma série $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j$, são equivalentes as afirmações:

(1) A série $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j$ *converge incondicionalmente*, isto é: para cada bijeção σ de $\mathbb{N}$ sobre si mesmo, a série $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{\sigma(j)}$ é convergente.

(2) A série $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j$ *converge absolutamente*, isto é: a série $\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|$ converge.

Veja, por exemplo, Rudin [2].

Se $x_j \in \mathbb{R}_+$, $j \in \mathbb{N}$, a convergência de de $\sum_{j=1}^{\infty} |\log(x_j)|$ é equivalente a dizer que $\bigoplus_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_{\log}$ converge (neste caso dizemos que $\bigoplus_{j=1}^{\infty} x_j$ converge absolutamente em $(\mathbb{R}_+, \oplus, \odot, \| \,.\, \|_{\log})$). Portanto, motivados pelo que se afirmou acima, podemos dizer que, tanto a série $\bigoplus_{j=1}^{\infty} x_j$ como o produto $\prod_{j=1}^{\infty} x_j$ *convergem incondicionalmente*.

Agora, podemos afirmar que, para $\alpha_j \in \mathbb{Q}$ e $j \in \mathbb{N}$,

$$\bigoplus_{j=1}^{\infty} \alpha_j \odot p_j = \prod_{j=1}^{\infty} p_j^{\alpha_j}$$

converge (incondicionalmente) se, e somente se, a série

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \log(p_j),$$

converge (absolutamente) a norma usual de $\mathbb{R}$.

Isto Motiva a seguinte pergunta:

1.5. Problema - Considere o subespaço vetorial de $\mathbb{R}_+$ formado pelas somas das séries incondicionalmente convergentes da forma

$$\bigoplus_{j=1}^{\infty} \alpha_j \odot p_j$$

onde $\alpha_j \in \mathbb{Q}$ para $j \in \mathbb{N}$. Este subespaço é fechado em $(\mathbb{R}_+, \oplus, \odot, \| \,.\, \|_{\log})$? Neste caso, esse subespaço é próprio?

Na próxima secção veremos que esse subespaço coincide com o espaço todo $\mathbb{R}_+$.

2. RESPOSTA AO PROBLEMA 1.5

2.2. Teorema - Para cada $x > 0$, existe uma seqüência $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ de números racionais tal que

$$x = \prod_{j=1}^{\infty} p_j^{\alpha_j},$$

com a convergência sendo incondicional.

Demonstração - Desejamos construir uma seqüência $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ tal que

$$\log x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \log p_j.$$

de modo que esta soma seja absolutamente convergente.

Iremos utilizar a seqüência $(1/j)_{j=1}^{\infty}$, juntamente com o Teorema do Confronto para determinar intervalos para os valores de α_j.

Se a seqüência das somas parciais

$$S_j = \sum_{k=1}^{j} \alpha_k \log p_k. \tag{3}$$

satisfizer

$$\frac{1}{j} < S_j - \log x < \frac{1}{j-1}. \tag{4}$$

para todo j maior que algum natural n, então a série converge a $\log x$.

Definimos $\alpha_1 = 1$ e escolhemos α_2 satisfazendo

$$\frac{\frac{1}{2} - \log p_1 + \log x}{\log p_2} < \alpha_2 < \frac{1 - \log p_1 + \log x}{\log p_2}.$$

Por indução finita verificamos facilmente que podemos escolher todos os α_j, $j > 1$. Para tanto, assumimos que todos os α_j, $j \leq l$ foram escolhidos de tal forma que (4) seja satisfeito. A seguir usando $j = l + 1$ em (4) e isolando α_{l+1} obtemos

$$\frac{\frac{1}{l+1} - S_l + \log x}{\log p_{l+1}} < \alpha_{l+1} < \frac{\frac{1}{l} - S_l + \log x}{\log p_{l+1}} \tag{5}$$

É evidente que podemos escolher um α_{l+1} que satisfaça a relação acima. Assim fica demonstrado que podemos escolher todos os α_j, $j \geq 1$ de tal forma que a série seja convergente.

Notemos que, com nossas escolhas, temos $\alpha_j < 0$ para $j > 2$. De fato da condição (4) sobre as somas parciais obtemos

$$\frac{1}{j} - S_j + \log x < 0.$$

e segue de (5) com $l = j$ que $\alpha_j < 0$ para $j > 2$. Subtraindo $\frac{1}{j+1}$ em (4), usando (5) e o resultado anterior obtemos

$$\frac{-2}{j^2 - 1} < \alpha_{j+1} \log p_{j+1} < 0.$$

Dessa forma como a série $\frac{-2}{j^2-1}$ converge absolutamente o mesmo acontece com a nossa.

Pelos argumentos utilizados (escolha de racionais em um dado intervalo) segue que a representação obtida não é única (escolhas distintas resultam em representações distintas para o mesmo x).

Apesar de trabalhoso o resultado é bastante interessante: é possível escrever qualquer número real maior que zero como um produto (possivelmente infinito e nesse caso não único) de potências racionais de primos.

REFERÊNCIAS

[1] Ahlfors, Lars V., - Complex Analysys, International Series In Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Company, 1966, 317pages.

[2] Rudin, W. - Princípios de Análise Matemática, Ao Livro Técnico S.A., Editora Universidade de Brasília, 1971, 296 páginas.

Mário B. Matos e Mário C. Matos

Universidade Federal de São Carlos e
Universidade Estadual de Campinas