

# UMA CURIOSA PROPRIEDADE DOS CAMINHOS RETIFICÁVEIS

Tomas Edson Barros

UFSCar

Inicialmente, lembramos que um *caminho* no  $\mathbb{R}^n$  é uma função contínua  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Se  $\alpha$  é um caminho “bem comportado” é possível associar-lhe um número real não negativo  $\ell(\alpha)$  de tal forma que, se  $\alpha$  representar uma poligonal, então  $\ell(\alpha)$  será seu comprimento.

Mais precisamente, dados um caminho  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e uma partição

$$P = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1\}$$

do intervalo  $[0, 1]$ , podemos associar o número real  $\ell(\alpha, P) = \sum_{j=0}^{m-1} |\alpha(t_{j+1}) - \alpha(t_j)|$ , que é o comprimento da poligonal inscrita em  $\alpha$  com vértices  $\alpha(t_j)$ ,  $j = 0, \dots, m$ . Não é difícil ver que, se as partições  $P$  e  $Q$  são tais que  $P \subset Q$ , então  $\ell(\alpha, P) \leq \ell(\alpha, Q)$ . Diz-se que o caminho  $\alpha$  é *retificável* se o conjunto

$$\mathcal{P}(\alpha) = \{\ell(\alpha, P) \subset \mathbb{R} : P \text{ é partição de } [0, 1]\}$$

é limitado e, neste caso, define-se o *comprimento* de  $\alpha$  como sendo

$$\ell(\alpha) = \sup(\mathcal{P}(\alpha)).$$

Essas definições podem ser encontradas em qualquer livro-texto de análise de várias variáveis ou de geometria diferencial como, por exemplo, [1], [2] ou [3].

A definição de  $\ell(\alpha)$  recorre à idéia de aproximação do caminho  $\alpha$  através de outros mais simples, como os ca-

minhos poligonais inscritos. Esse procedimento já era praticado na Antiguidade. Arquimedes, por exemplo, utilizou-o para o cálculo aproximado do número  $\pi$ , inscrevendo polígonos regulares na circunferência de raio unitário e supondo que, quanto maior fosse o número de lados do polígono, mais próximo seu comprimento ficaria do comprimento da circunferência.

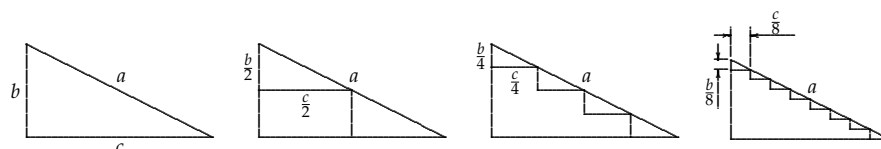
Veremos (isto é parte da demonstração do teorema abaixo) que é possível obter uma sequência  $(\alpha_k)$  de poligonais inscritas em  $\alpha$  que, além de aproximarem seu comprimento, se aproximam de  $\alpha$  uniformemente, ou seja, para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $k \geq k_0$  implica  $|\alpha_k(t) - \alpha(t)| < \epsilon$ , para qualquer  $t \in [0, 1]$ . Em outras palavras, quanto maior for  $k$ , mais a imagem de  $\alpha_k$  se “assemelhará” à imagem de  $\alpha$ .

O que acontece se aproximarmos um caminho retificável  $\alpha$  por outros caminhos poligonais não necessariamente inscritos em  $\alpha$ ? O limite dos comprimentos dessas poligonais coincidirá com o comprimento de  $\alpha$ ?

Não é difícil construir um exemplo mostrando que a resposta a essa pergunta não pode ser afirmativa. Consideremos um triângulo-retângulo tal que o comprimento da hipotenusa seja  $a$  e os comprimentos dos catetos sejam respectivamente  $b$  e  $c$ . Podemos construir uma sequência  $(\alpha_k)$  de poligonais que converge uniformemente para a hipotenusa, e tal que  $\ell(\alpha_k) = b + c > a$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Tal sequência é construída como se mostra na figura 1.

Esse exemplo revela que a função que associa a cada caminho retificável  $\alpha$  de  $\mathbb{R}^n$  seu comprimento  $\ell(\alpha)$  não é contínua. Mais precisamente, chamemos de  $\mathcal{C}R_n$  o con-

Figura 1:



junto dos caminhos retificáveis  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , munido da distância (ou métrica)

$$d(\alpha, \beta) = \sup\{|\alpha(t) - \beta(t)| : t \in [0, 1]\}.$$

Uma sequência  $(\alpha_k)$  em  $CR_n$  converge uniformemente para  $\alpha \in CR_n$  se e somente se  $(\alpha_k)$  converge para  $\alpha$  no espaço métrico  $(CR_n, d)$ , ou seja,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} d(\alpha_k, \alpha) = 0$ . Podemos concluir, do exemplo acima, que a função  $\ell : CR_n \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa a cada caminho retificável  $\alpha$  seu comprimento  $\ell(\alpha)$ , é descontínua. Na realidade, essa função é descontínua em todos os pontos de  $CR_n$ . Isso é consequência imediata do teorema a seguir, que revela uma curiosa e interessante propriedade dos caminhos retificáveis.

**Teorema.** *Seja  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  um caminho retificável e  $A$  um número real não negativo. Então existe uma sequência  $(\beta_k)$  de poligonais que converge uniformemente para  $\alpha$  tal que*

$$\ell(\beta_k) = \ell(\alpha) + A,$$

para qualquer  $k \in \mathbb{N}$ .

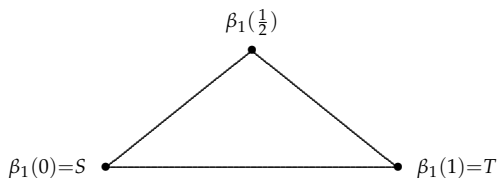
### Demonstração do Teorema

Antes de iniciarmos a demonstração, estabeleceremos que uma *curva poligonal* (ou simplesmente *poligonal*) em  $\mathbb{R}^n$  do ponto  $S$  ao ponto  $T$  é um caminho  $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , afim por pedaços, ou seja, existe uma partição  $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1\}$  de  $[0, 1]$  tal que  $\beta(0) = S$ ,  $\beta(1) = T$  e  $\beta(t) = \beta(t_j) + (t - t_j)v_j$ , se  $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ , em que

$$v_j = \left( \frac{1}{t_{j+1} - t_j} \right) (\beta(t_{j+1}) - \beta(t_j)),$$

para  $j = 0, 1, \dots, m - 1$ . Os pontos  $\beta(t_j)$ ,  $j = 0, \dots, m$  são chamados vértices de  $\beta$ ;  $\beta(0)$  é o vértice inicial,  $\beta(1)$  é o final e os demais são os vértices intermediários. Assim, para determinar uma poligonal  $\beta$  de  $S$  a  $T$ , preci-

Figura 2:



samos somente especificar uma partição de  $[0, 1]$  e os vértices intermediários.

Começamos provando o teorema para  $\alpha(t) = S + t(T - S)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , cuja imagem é o segmento de reta ligando os pontos  $S$  e  $T$  de  $\mathbb{R}^n$ . Este é um caminho retificável e  $\ell(\alpha) = |T - S| = \ell$ . Se  $A = 0$ , basta tomarmos  $\beta_k = \alpha$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Se  $A > 0$ , seja  $v$  um vetor unitário e ortogonal a  $T - S$ . Definimos  $\beta_1$  como a poligonal com partição  $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$  e vértices  $\beta_1(0) = S$ ,  $\beta_1(\frac{1}{2}) = \frac{S+T}{2} + \left( \frac{\sqrt{A^2+2A\ell}}{2} \right) v$  e  $\beta_1(1) = T$  (ver figura 2).

Se  $T \neq S$ , a imagem de  $\beta_1$  é a união de dois segmentos, cada um com comprimento  $\frac{\ell+A}{2}$ , que formam um triângulo isósceles tendo como base o segmento de reta unindo  $S$  a  $T$ . Se  $S = T$ , a imagem de  $\beta_1$  é o segmento de reta unindo  $S$  a  $S + \frac{A}{2}v$ , percorrido em ida e volta. Em qualquer dos casos  $\ell(\beta_1) = \ell(\alpha) + A$ .

Supondo, por indução, que já tenhamos construído a poligonal  $\beta_k$  com partição dada por  $\{0, \frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k}, \dots, \frac{2^k-1}{2^k}, 1\}$  tal que  $\ell(\beta_k) = \ell(\alpha) + A$ , definimos a próxima poligonal  $\beta_{k+1}$  como sendo construída a partir da partição  $\{0, \frac{1}{2^{k+1}}, \frac{2}{2^{k+1}}, \dots, \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}, 1\}$  e cujos vértices são  $\beta_{k+1}(\frac{j}{2^{k+1}}) = \beta_k(\frac{j}{2^{k+1}})$ , se  $j$  for ímpar, e  $\beta_{k+1}(\frac{j}{2^{k+1}}) = \alpha(\frac{j}{2^{k+1}})$ , se  $j$  for par. Desta forma, quando  $S \neq T$ , obteremos configurações como as mostradas na figura 3.

Como sugere a figura 3, pode ser mostrado, através de cálculos simples, que

$$d(\beta_{k+1}, \alpha) = \frac{1}{2} d(\beta_k, \alpha) = \frac{\sqrt{A^2 + 2A\ell}}{2^{k+1}},$$

para qualquer  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , e que  $\ell(\beta_{k+1}) = \ell(\beta_k)$ , de onde segue o teorema para segmentos de reta.

É consequência do que acabamos de mostrar acima que, se  $\alpha$  é uma poligonal com partição  $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1\}$  e  $A > 0$ , então, para cada segmento de reta  $\alpha_j = \alpha|_{[t_{j-1}, t_j]}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , existe uma sequência  $(\beta_k^j)$  de poligonais tal que:  $\ell(\beta_k^j) = \ell(\alpha_j) + \frac{A}{m}$ ;  $\lim_{k \rightarrow +\infty} d(\beta_k^j, \alpha_j) = 0$ ; e os vértices inicial e final de cada  $\beta_k^j$  coincidem respectivamente com os vértices inicial e final de  $\alpha_j$ . Assim, para cada  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , podemos considerar a poligonal  $\beta_k$  definida por  $\beta_k(t) = \beta_k^j(t)$ , se  $t \in [t_{j-1}, t_j]$ , e claramente, pela construção,  $\ell(\beta_k) = \ell(\alpha) + A$  e  $\lim_{k \rightarrow +\infty} d(\beta_k, \alpha) = 0$ .

Agora seja  $\alpha$  um caminho retificável qualquer em  $\mathbb{R}^n$  e seja  $A > 0$ . Dado  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , segue da continuidade uniforme de  $\alpha$  que existe  $\delta_k > 0$  tal que, se  $|t - s| < \delta_k$  então  $|\alpha(t) - \alpha(s)| < \frac{1}{k}$ . Seja  $n_k$  um inteiro positivo tal que  $\frac{1}{n_k} < \delta_k$  e seja  $\lambda_k$  a poligonal inscrita em  $\alpha$  determinada pela partição  $\mathcal{L}_k = \{t_j \in [0, 1] : t_j = \frac{j}{n_k}, j = 0, 1, \dots, n_k\}$ . Desta forma,  $(\lambda_k)$  é uma sequência de poligonais inscritas em  $\alpha$  e, se  $t \in [0, 1]$  está entre  $t_j$  e  $t_{j+1}$ , então

$$\lambda_k(t) = \alpha(t_j) + \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j} (\alpha(t_{j+1}) - \alpha(t_j))$$

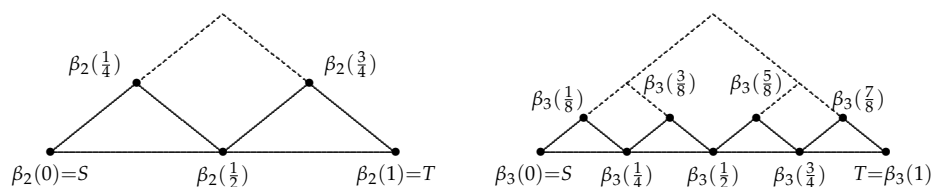
e, portanto,

$$\begin{aligned} |\alpha(t) - \lambda_k(t)| &\leq \\ &\leq |\alpha(t) - \alpha(t_j)| + |\alpha(t_{j+1}) - \alpha(t_j)| \\ &< \frac{2}{k}. \end{aligned}$$

Logo,  $(\lambda_k)$  converge uniformemente para  $\alpha$ . Além disso, como  $\alpha$  é retificável, para cada  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  existe uma poligonal  $\theta_k$ , inscrita em  $\alpha$ , tal que  $\ell(\alpha) - \ell(\theta_k) < \frac{1}{k}$ . Se  $\theta_k$  é determinada pela partição  $\mathcal{Q}_k = \{0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{m_k} = 1\}$ , definimos a poligonal  $\alpha_k$ , inscrita em  $\alpha$  e determinada pela partição  $\mathcal{P}_k = \mathcal{L}_k \cup \mathcal{Q}_k$ . Cada subintervalo determinado por  $\mathcal{P}_k$  tem comprimento menor que  $\delta_k$ . Portanto, o mesmo argumento usado acima mostra que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} d(\alpha_k, \alpha) = 0$ . Por outro lado, como  $\mathcal{Q}_k \subset \mathcal{P}_k$  e  $\ell(\alpha) - \ell(\theta_k) < \frac{1}{k}$ , temos que  $\ell(\alpha) - \ell(\alpha_k) \leq \ell(\alpha) - \ell(\theta_k) < \frac{1}{k}$ , o que implica  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \ell(\alpha_k) = \ell(\alpha)$ .

Para cada inteiro positivo  $k$ , seja  $A_k = \ell(\alpha) - \ell(\alpha_k) + A \geq 0$ . Pelo que já provamos acima, existem sequências de poligonais  $(\gamma_j^k)$  tais que  $\lim_{j \rightarrow +\infty} d(\gamma_j^k, \alpha_k) = 0$  e  $\ell(\gamma_j^k) = \ell(\alpha_k) + A_k = \ell(\alpha) + A$ . Assim, para cada  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  existe um índice  $j_k$  tal que  $d(\gamma_{j_k}^k, \alpha_k) < \frac{1}{k}$ .

Figura 3:



Definindo  $\beta_k = \gamma_{j_k}^k$ , teremos

$$\begin{aligned} d(\beta_k, \alpha) &= d(\gamma_{j_k}^k, \alpha) \\ &\leq d(\gamma_{j_k}^k, \alpha_k) + d(\alpha_k, \alpha) \\ &< \frac{1}{k} + d(\alpha_k, \alpha), \end{aligned}$$

de onde concluímos que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} d(\beta_k, \alpha) = 0$ . Além disso,  $\ell(\beta_k) = \ell(\alpha) + A$ , e a demonstração do teorema está completa.

**Agradecimentos.** Gostaria de agradecer ao professor Francesco Mercuri, que me inspirou, através do exemplo acima e de outros mais, a escrever este trabalho; ao professor Dirceu Penteadó por valiosas sugestões acerca da formatação do texto; e ao parecerista pelas correções e sugestões propostas para a versão final deste texto.

### Referências

- [1] DO CARMO, M. P. *Differential geometry of curves and surfaces*. Englewood-Cliffs: Prentice-Hall, 1976.
- [2] FLEMING, W. H. *Functions of several variables*. 2ed. New York: Springer Verlag, 1977. (Undergraduate Texts in Mathematics)
- [3] LIMA, E. L. *Curso de Análise, Vol. 2*. Rio de Janeiro: IMPA, 1981. (Projeto Euclides, 13)

Tomas Edson Barros (dteb@dm.ufscar.br)

DM-UFSCar, CP 676

13565-905 – São Carlos – SP