Um breve panorama histórico da geometria

Claudio Gorodski

IME/USP

Por volta do ano 300 antes da era comum, Euclides escreveu os "Elementos", obra que sintetizava toda a geometria conhecida até então, sistematizada através do método lógico-dedutivo, e que se tornaria o livro-texto de maior sucesso em toda a história das ciências. Mesmo assim, talvez por sua complexidade relativa de formulação e insuficiente apelo intuitivo, o Postulado V suscitou controvérsias ao longo de sucessivas gerações de geômetras, os quais tentaram deduzi-lo dos demais axiomas e portanto prová-lo como um teorema. O resultado desse esforço continuado, que durou cerca de dois mil anos, culminou com a descoberta das geometrias não euclidianas por Gauss, Bolyai e Lobachevski no século XIX. Em um desenvolvimento paralelo, a geometria analítica de Fermat e Descartes e o cálculo infinitesimal de Newton e Leibniz forneceram as ferramentas necessárias para o surgimento da geometria diferencial, notadamente pelas mãos de Euler e Gauss. O passo seguinte foi dado por Riemann, que unificou as geometrias euclidianas e não euclidianas no contexto da geometria diferencial sob a égide de um novo conceito de espaço. A influência desse trabalho sobre as ciências físicas resultou na celebrada teoria da relatividade de Einstein. Desde então, a geometria conheceu vasta expansão em diversas direções, e continua a influenciar profundamente nossa visão do espaço físico e do universo.

(...) il voler tratar le quistioni naturali senza geometria è un tentar di fare quello che è impossibile ad esser fatto.
[G. Galilei, *Dialogo*, giornata seconda, 1632]

Este é um breve texto apresentando alguns aspectos do desenvolvimento da geometria desde a Antiguidade até os tempos modernos. Com ele, não pretendemos de modo algum escrever uma obra exaustiva sobre o assunto, mas tão somente identificar algumas poucas linhas históricas importantes na evolução da geometria que, na nossa opinião, estendem-se através dos tempos. É claro que a escolha dessas linhas particulares está condicionada aos interesses e visão pessoal do autor, e também a questões de brevidade do texto. Nesse sentido, o leitor atento certamente sentirá a omissão de áreas e nomes importantes da geometria. Enfatizamos ainda que o autor não é historiador, mas um matemático profissional trabalhando na área de geometria diferencial. No que diz respeito à matemática antiga em especial, os relatos – de maneira geral, e incluído o nosso – estão em grande parte baseados mais em tradições persistentes do que em documentos históricos, incluída aí também uma certa dose de julgamento pessoal. Sinta-se o leitor encorajado a confrontar nossa exposição das partes antiga e moderna com outros excelentes textos de história disponíveis na literatura.

As linhas históricas a que nos referimos estão relativamente descritas no resumo deste texto, mas gostaríamos de enfatizá-las ainda um pouco mais. A extraordinária percepção de Euclides na escolha de seus cinco postulados básicos no primeiro livro dos *Elementos* pode ser vista como resultado de um processo contínuo de aperfeiçoamento da geometria grega. Em especial, seu quinto postulado retém a natureza essencial da geometria euclidiana plana, o que se tornaria claro com a sensacional descoberta das geometrias não euclidianas por Gauss, Lobachevski e Bolyai. A síntese entre essas geometrias e a geometria intrínseca de superfícies seria sutilmente sugerida pelo gênio de Gauss, mas realizada *de facto* apenas com a abstração completa da ideia de geometria intrínseca, promulgada por Riemann através da introdução de uma nova noção de variedade. Os métodos sintéticos popularizados por Gromov podem ser interpretados como um glorioso retorno da geometria às suas origens.

* * *

Apesar do historiador grego Heródoto ter relatado que a geometria nasceu no antigo Egito, os registros mais antigos de que dispomos de atividades humanas nessa área parecem remontar à época das antigas civilizações da Mesopotâmia. Dignos de nota são alguns tabletes de argila datados do período 1900–1600 AEC, durante o antigo império babilônico, que contêm textos e diagramas indicando alguma familiaridade deste povo com instâncias do Teorema de Pitágoras. Os babilônios, os egípcios e outros povos da Antiguidade que desenvolveram formas primitivas de geometria, tais como hindus, chineses e japoneses, pareciam estar em geral motivados por necessidades práticas de medições geométricas, como por exemplo mensuração e demarcação de terras e construção de templos e altares, mas poderiam também estar parcialmente motivados por sentimentos estéticos em relação a configurações simétricas e ordenadas. Seja como for, nos papiros, tabletes e outros documentos que essas civilizações deixaram, encontramos algumas importantes relações geométricas, noções básicas sobre semelhança de triângulos e fórmulas para áreas ou volumes de várias figuras geométricas comuns, demonstrando por vezes alto nível de habilidade técnica; entretanto esses documentos são coleções de casos especiais e problemas específicos, sem formulações gerais, e pode-se indagar se essas civilizações antigas realmente percebiam os princípios unificadores subjacentes. Mesmo quando parecem entrar em cena certos elementos teóricos, os objetivos podem ter sido facilitar a técnica e aliviar as dificuldades computacionais mais do que melhorar a compreensão, pois as questões de princípios lógicos e justificativas nunca são mencionadas. Além disso, o que é talvez ainda mais grave, nota-se a ausência de distinções claramente marcadas entre resultados exatos e aproximados.

* * *

Ao contrário dos povos que os precederam, que mormente tomavam a geometria como um conjunto de regras empíricas e úteis, que eram aplicadas a casos particulares e cujas justificativas eram aparentemente negligenciadas, a atitude dos gregos perante essa disciplina seria de especular e buscar explicações racionais para seus resultados. O processo de transição entre visões tão diversas deve ter sido lento e gradual. É sabido que vários dentre os principais pensadores gregos visitaram antigos centros de conhecimento, tais como o Egito e a Babilônia, e lá adquiriram conhecimentos sobre astronomia e matemática. Pouca certeza se tem sobre a vida e a obra desses pioneiros. Tales de Mileto (c. 624AEC – c. 547AEC) é considerado por fontes antigas como sendo o introdutor da geometria na Grécia e o primeiro homem da história a quem foram atribuídas descobertas matemáticas específicas. Pitágoras de Samos (c. 569AEC – c. 475AEC), em suas andanças, parece ter encontrado Tales e sofrido influência dele. Conta-se que, mais tarde, Pitágoras teria fundado uma irmandade secreta em Croton, uma colônia grega no sul da Itália, cuja importância é avaliada pelas ideias que difundiu. Os membros dessa irmandade seguiam normas de conduta rígidas e acreditavam em doutrinas místicas, mas também aprendiam filosofia, matemática e ciências naturais. Mantinham suas descobertas em segredo e praticavam o comunalismo, de modo que nos é às vezes difícil distinguir o trabalho de Pitágoras daquele de seus seguidores. Pitágoras buscava na aritmética e na geometria a chave para a compreensão do universo e, devido às suas convicções, é frequentemente citado como sendo o primeiro matemático puro da história. Platão (c. 427AEC – c. 347AEC) nasceu em Atenas, mas travou contato com a escola pitagórica em suas viagens. De volta a Atenas, por volta de 389 AEC fundou sua célebre *Academia* (sobre cuja porta, segundo uma lenda, inscreveu: "Que ao ignorante em geometria seja proibido entrar aqui") e dedicou o resto de sua vida a escrever e ensinar. Fez pouco trabalho original em matemática, mas contribuiu com profundos aperfeiçoamentos na lógica e nos métodos usados em geometria.

A ideia grega de usar a matemática para compreender os mistérios do universo dependia, para dar certo, de uma maneira de separar a asserção verdadeira daquela meramente hipotética. Em outras palavras, necessitava-se de uma noção de *demonstração matemática*. A percepção desse fato é provavelmente a primeira descoberta importante na história da ciência. A Tales e Pitágoras credita-se a introdução dessa noção. Mas o que é a "verdade" nesse contexto? Platão apresentou uma resposta a essa pergunta explicando que tanto as noções como as proposições matemáticas não se referem a objetos do mundo físico, mas a certas entidades ideais que habitam um mundo diferente do mundo físico. Por exemplo, uma reta que traçamos em uma folha de papel representa apenas aproximadamente uma reta que vive em um *mundo platônico de entidades ideais*. O mesmo se aplica às proposições matemáticas verdadeiras. Não se trata aqui de um conceito ficcional, produto de nossa imaginação, ou ainda de um conceito esotérico, mas de uma ideia extraordinária cujo significado pode ser colocado da forma seguinte. Em primeiro lugar, ele nos alerta para distinguirmos as noções matemáticas precisas das aproximações que encontramos no mundo físico. Mais interessante ainda é identificar a existência do mundo platônico das entidades matemáticas com a *objetividade da verdade matemática*. Em outras palavras, as proposições matemáticas que habitam o mundo platônico, ditas verdadeiras, estão submetidas a um padrão de objetividade externo que não depende de nossas mentes, opiniões ou culturas. É claro que isso se aplica igualmente às proposições que ainda não são conhecidas por nós. Uma visão simplista explicaria isso dizendo que as verdades matemáticas têm uma existência independente, em algum sentido, e são apenas pouco a pouco "descobertas" pelos matemáticos. Por outro lado, a visão oposta diria que a matemática é "inventada" pelas nossas mentes. Parece-nos verdadeiro dizer que, ao longo da história, a visão platônica da matemática tem sido adotada pela maioria silenciosa dos matemáticos no curso de seu trabalho diário, por força da natureza da disciplina em si, mesmo que implicitamente e inconscientemente.

Euclides (c. 325AEC – c. 265AEC) provavelmente estudou na Academia de Platão e foi o fundador da vigorosa escola matemática de Alexandria, numa época em que Atenas declinava como força política. Sua obra máxima, os *Elementos* consiste de treze volumes que contêm a maior parte da matemática conhecida na época. Trata-se de um texto sistemático, organizado segundo os critérios de rigor lógico-dedutivo, mas também de experiência intuitiva. O volume I trata de geometria plana e inicia-se com uma série de definições e axiomas. Finalmente, há uma lista de proposições, cada uma delas incluindo um enunciado imediatamente seguido de uma demonstração. Cada afirmação de uma demonstração é logicamente justificada com base em alguma definição, axioma, ou proposição anteriormente demonstrada, mas há também algumas afirmações cujas justificativas apoiam-se na intuição sobre o espaço físico. Dentre os axiomas, destacam-se os cinco postulados que transcrevemos em linguagem moderna:

1. Existe um único segmento de reta conectando dois pontos dados.

2. Todo segmento de reta pode ser estendido indefinidamente em ambas as direções.

3. Existe um círculo com quaisquer centro e raio dados.

4. Todos os ângulos retos são iguais entre si.

5. Se uma reta corta outras duas retas formando ângulos internos do mesmo lado cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas re-

tas, se suficientemente prolongadas, encontrar-se-ão do lado em que estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

Uma possível análise da relevância desses postulados é a que se segue. O primeiro expressa a natureza básica do segmento de reta. Lembrando que, na visão dos gregos, a noção de grandeza nos é dada em termos da distância entre dois pontos no espaço físico, este postulado permite identificar essa distância com a medida do correspondente segmento de reta. O segundo postulado expressa o fato do plano ser ilimitado, e o terceiro, de não conter "buracos". O quarto postulado contém o germe da ideia de *congruência*, segundo a qual uma figura no plano pode ter a "mesma" forma geométrica do que outra figura em outra posição do plano, fato que pode ser concretizado movendo-se rigidamente uma das figuras até superpô-la exatamente sobre a outra. Em linguagem moderna, os quatros primeiros postulados muito vagamente sintetizam a ideia do plano euclidiano como sendo um espaço métrico ilimitado, simplesmente conexo, homogêneo e isotrópico.

Voltemo-nos ao quinto postulado. Já à primeira vista, nota-se que a natureza de seu enunciado é diferente da dos precedentes. Segundo a definição 23 do volume I dos *Elementos*, "retas paralelas são retas que, estando no mesmo plano e sendo prolongadas em ambas as direções, não se encontram", de modo que ele exatamente descreve uma situação em que duas retas não são paralelas. Ainda na época dos gregos, algumas dúvidas foram levantadas quanto à colocação desse enunciado como um postulado e não como uma proposição passível de demonstração. Dentre as tentativas dos gregos de demonstrá-lo, destacam-se as de Claudio Ptolomeu e Proclo. Observa-se que, nessas e em muitas outras incontáveis tentativas frustradas de demonstrar o quinto postulado a partir dos outros, assume-se – explicitamente ou implicitamente – algo mais que acaba sendo equivalente ao próprio. O resultado desse esforço continuado, que durou cerca de dois mil anos, produziu um grande número de afirmações equivalentes, mas o quinto postulado resistiu a todas as tentativas.

Apesar de suas imperfeições, nenhum outro tratado matemático conheceu a mesma fama que os *Elementos*. Até a época moderna, ele representou não apenas a fonte primária de todo o conhecimento geométrico, mas também um modelo a ser seguido em toda a pesquisa matemática e, de fato, em todo conhecimento racional. Desde a primeira edição impressa de 1482, mais de mil outras edições foram publicadas e, segundo van der Waerden[1], depois da *Bíblia*, os *Elementos* são possivelmente o livro mais traduzido, publicado e estudado em todo o mundo ocidental.

* * *

Um capítulo crucial na história da geometria, que de fato representa o fio condutor que liga a geometria grega à geometria diferencial moderna, é a história do quinto postulado de Euclides, também conhecido como postulado das paralelas. Com a queda das antigas civilizações de Atenas e Roma e o declínio cultural do Ocidente, os centros de saber e conhecimento deslocaram-se para o Oriente nas cortes do califado de Bagdá. O primeiro matemático grego a ter sua obra traduzida para o árabe foi provavelmente Euclides. Existem traduções para o árabe de trabalhos feitos por estudiosos bizantinos tentando provar o quinto postulado, e sabemos também de diversos estudiosos que viveram no Oriente medieval e escreveram comentários sobre os *Elementos* com semelhantes tentativas, notadamente Omar Khayyam (1048–1122). As primeiras tentativas que conhecemos de provar o quinto postulado na Europa medieval datam dos séculos XIII e XIV, e foram empreendidas pelo polonês Vitello (c. 1230 – após 1275), pelo matemático, astrônomo e exegeta bíblico judeu Levi ben Gerson (1288–1344), que viveu no sul da França e escrevia em hebraico, e por um certo Alfonso (Alfonso de Valladolid? (1270–1346)), que viveu na Espanha e escrevia em ladino. O primeiro tratado em latim dedicado à teoria das paralelas na Europa medieval foi escrito por Federik Bartolaćić Grisogono

[1] "Euclid." Encyclopædia Britannica Online. 2009 *www.britannica.com/EBchecked/topic/194880/Euclid* .

(1472–1538), nascido em Zadar, atual Croácia, e que trabalhava na Itália. John Playfair (1748–1819), professor em Edimburgo, publicou em 1795 uma edição de parte dos *Elementos* em que substituía o quinto postulado por outro que julgava mais apropriado: *Por um ponto fora de uma reta dada pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.* É interessante notar que esse postulado já havia sido considerado anteriormente por Proclo, como o próprio Playfair apontou, mas é normalmente associado ao nome de Playfair.

A partir do século XVI, diversos autores europeus escreveram tratados sobre a teoria das paralelas, muitas vezes incluindo pretensas "demonstrações" do quinto postulado. No entanto, com o padre jesuíta Girolamo Saccheri (1667–1733) e Johann Heinrich Lambert (1728–1777) inicia-se uma nova época na história dessa teoria. Ainda que hipóteses contrárias às de Euclides já houvessem sido consideradas pelos matemáticos árabes dos séculos XI e XII, eles foram os primeiros a desenvolverem mais amplamente as consequências dessa hipóteses para a teoria das paralelas, mesmo que seu fim último fosse o de encontrar uma contradição e justificar Euclides. Destarte, chegaram a um certo número de conclusões levando a uma geometria diferente da euclidiana, e cuja coerência lógica nunca de fato ficou questionada. Tão forte era o poder da tradição, no entanto, que esses autores atingiram um ponto em que erraram e enganaram a si mesmos declarando que haviam encontrado uma contradição. Lambert, em particular, aparentemente é um dos primeiros a cogitar que qualquer corpo de hipóteses cujas consequências não dão lugar a uma contradição representa um possível sistema geométrico, mas não desenvolve essa ideia e não dá o passo decisivo que seria reconhecer que o quinto postulado é indemonstrável. O grande matemático francês Adrien-Marie Legendre (1752–1833), ao longo de quarenta anos de estudo sobre o problema, também realizou diversas "demonstrações". Ainda que do ponto de vista filosófico seu trabalho tenha sido menos inovador do que os de Saccheri e Lambert por nunca considerar hipóteses contrárias às de Euclides, do ponto de vista estritamente geométrico foi notável e exerceu uma influência importante sobre vários matemáticos de sua época.

Os primeiros que compreenderam que o quinto postulado de Euclides era indemonstrável e que se poderia, a partir de sua negação, construir geometrias novas e totalmente coerentes foram Gauss, Lobachevski e Bolyai, que chegaram às suas conclusões independentemente uns dos outros. É curioso notar que Gauss nunca publicou seus trabalhos nessa área, e os outros dois autores trabalhavam afastados dos centros matemáticos renomados da época, o que dificultou a circulação dessas ideias. Nikolai Ivanovitch Lobachevski (1792–1856) estudou na Universidade de Kazan, onde mais tarde tornar-se-ia professor e, nos últimos anos de sua vida, reitor. Em 1829, publicou suas ideias em um tratado em russo intitulado *Sobre os princípios da geometria*. Trata-se da primeira obra sobre geometria não euclidiana. No entanto, não foi bem recebida e menos ainda compreendida pela comunidade científica russa. Apenas com a publicação em alemão de *Pesquisas geométricas sobre a teoria das linhas paralelas*, em 1840, Gauss tomaria conhecimento de suas ideias e, com a tradução para o francês desse trabalho, em 1866, elas tornar-se-iam acessíveis a um grande número de matemáticos interessados na teoria das paralelas. János Bolyai (1802–1860) era filho de Farkas Bolyai, este um colega de estudos de Gauss em Göttingen e autor de várias "demonstrações" do quinto postulado. Influenciado por seu pai, interessou-se pela teoria das paralelas e redigiu uma breve apresentação de suas descobertas em latim, que foi publicada como apêndice de um livro de seu pai, em 1831. Em seguida, Farkas enviou uma cópia da obra a Gauss, ansioso por sua opinião. A resposta não tardou e dessatisfez bastante pai e filho. Na carta, Gauss escreveu que já estaria familiarizado com os resultados de János havia cerca de 30 ou 35 anos – uma declaração, em certa medida, exagerada. Foi nesse contexto também que Gauss usou a expressao ostentosa que ele nao deveria exaltar o trabalho de János, pois, segundo Gauss, exaltá-lo seria exaltar a si mesmo. Entretanto, é verdade que, já a partir de 1816, em sua correspondência mantida com ex-pupilos e amigos interessados na questão das paralelas, Gauss sustentava a inutilidade das tentativas de demonstração do quinto postulado e que seria possível obter um sistema geométrico novo e perfeitamente coerente apoiando-se sobre uma hipótese contrária àquela de Euclides. Ele ainda afirmava várias vezes que uma tal geometria poderia corresponder à geometria de nosso espaço. Aqui ele aparentemente estava menos interessado na questão filosófica da independência do postulado das paralelas do que na natureza geométrica verdadeira do espaço físico. Tal interpretação da questão era certamente ousada em vista da doutrina kantiana de considerar o conceito euclidiano de espaço como *a priori*, a saber, um componente essencial da estrutura de nossa mente. Segundo Gauss, a aritmética era *a priori*, mas – muito diferentemente de nosso ponto de vista atual – a geometria estava ligada à mecânica e consistia-se numa ciência experimental de forte teor intuitivo. Assim, a questão da natureza geométrica do espaço físico não deveria ser decidida *a priori*, mas experimentalmente.

Para os gregos seguidores de Platão, o espaço físico era uma entidade absoluta, a realização direta de um objeto platônico. A geometria euclidiana era a ciência do espaço físico e, portanto, a única geometria possível e certamente a "verdadeira", e constituía-se do estudo de propriedades das figuras geométricas mergulhadas nesse espaço. Este ponto de vista perdurou essencialmente até o século XIX. Com as descobertas de Gauss, Lobachevski e Bolyai, não apenas a geometria euclidiana deixou de ser a única possível, mas também deixou de ser necessariamente aquela "verdadeira". Eventualmente, o próprio espaço passou a ser uma entidade passível de estudo geométrico. Terminou assim uma época na história da matemática que fora inaugurada dois mil anos antes, originando-se uma transformação profunda não apenas do pensamento matemático, mas também do pensamento teórico em geral, que influenciaria nossas concepções do universo e do mundo físico. Apesar disso, as geometrias não euclidianas permaneceram um tanto marginais por várias décadas antes de serem completamente integradas. Para entender esse processo, é interessante interrompermos esse fluxo de ideias e retornarmos um pouco no tempo a fim de discutirmos um outro aspecto importante da geometria que estava emergindo...

* * *

A história da geometria diferencial inicia-se com o estudo de curvas. Noções como retas tangentes a curvas já eram encontradas entre os gregos Euclides, Arquimedes e Apolônio. No século XVII, os franceses Pierre de Fermat (1601–1665) e René Descartes (1596–1650) fundaram a moderna geometria analítica, enquanto que o alemão Gottfried von Leibniz (1646–1716) e o inglês *Sir* Isaac Newton (1643–1727) inventaram os algoritmos do cálculo infinitesimal, os quais permitiriam o estudo de curvas e superfícies através de suas propriedades diferenciais.

A *curvatura* de uma curva plana em um ponto da curva é a taxa de variação naquele ponto da direção tangente à curva em relação ao comprimento de arco. Essa curvatura é também o inverso do raio do círculo osculador à curva naquele ponto. Aqui o *círculo osculador* em um ponto P é o limite dos círculos determinados por três pontos sobre a curva quando eles aproximam-se de P. Esses conceitos já eram conhecidos por Newton e Leibniz, mas o precursor do assunto talvez tenha sido Christian Huygens (1629–1695), que ainda não conhecia o cálculo, mas que em 1673 publicou um trabalho sobre curvas planas introduzindo os conceitos de *involuta* e *evoluta*, curiosamente motivado por seu interesse em pêndulos e relógios. Durante o século XVIII, desenvolver-se-iam os fundamentos da teoria de curvas e superfícies no espaço tridimensional. Num trabalho de 1731, Alexis Clairaut (1713–1765) estudou tais curvas mas limitou-se a propriedades de primeira ordem. Mais tarde, em 1775, Gaspard Monge (1746–1818) aprofundou-se no assunto e publicou um artigo em que essencialmente considerava os conceitos de *curvatura* e *torção* de uma curva espacial, mas coube a Michel-Ange

Lancret (1774–1807), um de seus pupilos, fornecer a expressão analítica explícita de tais invariantes.

Uma transição natural da teoria de curvas para a teoria de superfícies encontra-se no *problema geodésico*, i.e. o problema de encontrar o caminho mais curto entre dois pontos de uma superfície. Nunca ocorreu aos matemáticos do século XVIII a necessidade de mostrar a existência de um tal caminho, sendo que sua preocupação era apenas a de determinar a caracterização geométrica da curva que teria tal propriedade. O problema atraiu a atenção dos irmãos Bernoulli, Jakob (1654–1705) e Johann (1667–1748), que, dentre outros, forneceram ambos soluções corretas. Suas contribuições estão na base dos fundamentos do cálculo de variações. O pródigo Leonhard Euler (1707–1783), cuja torrente de descobertas dominou a matemática durante a maior parte do século XVIII, foi aluno de Johann Bernoulli. Sua maior contribuição à geometria diferencial, publicada em 1760, talvez tenha sido o estudo da curvatura das seções planas de uma superfície (uma bela apresentação desse assunto foi também elaborada em 1776 pelo menos conhecido engenheiro e general revolucionário francês Jean Baptiste Marie Meusnier (1754–1793)). Em 1772, Euler ocupou-se da questão de saber sob que condições uma superfície pode ser mapeada isometricamente sobre um plano, como são os casos do cilindro e do cone. Ele descobriu que uma condição necessária é que ela seja *regrada*, ou seja, folheada por retas. Uma de suas mais significativas observações acerca da teoria de superfícies encontra-se num fragmento sem importância: *"Et quia per naturum superficierum quaelibet coordinata debet esse functio binarum variabilium"*. Esse é o reconhecimento do fato das coordenadas (x, y, z) dos pontos de uma superfície serem funções de duas variáveis independentes. Monge também dedicou-se à teoria de superfícies, e escreveu um livro-texto em que introduziu o conceito de *linhas de curvatura* de uma superfície e que é uma bela apresentação do assunto, como então conhecido. Monge era, de fato, um professor de talento, e teve vários pupilos. Dentre esses, destaca-se Charles Dupin (1784–1873), cujo trabalho forma uma continuação natural daquele de seu mestre. Seu livro *Développements de géométrie*, de 1813, contém a introdução das noções de *linhas conjugadas* e *assintóticas* de uma superfície, bem como a invenção do que se costuma chamar de *indicatriz de Dupin*.

As reformas do sistema educacional francês realizadas por Napoleão a partir de 1802 faziam parte do movimento para destruir as regras obscuras do Antigo Regime. As universidades tornar-se-iam meritocráticas, permitindo a participação de alunos vindos de qualquer contexto social. Mas essas mesmas reformas também visavam em grande parte formar uma classe de burocratas que pudesse governar o país, bem como comprometer a educação e a ciência com a sociedade e os objetivos militares da França. Em 1815, um pouco depois da segunda abdicação do imperador Napoleão, o jovem Augustin Louis Cauchy (1789–1857) tornou-se Professor da École Polytechnique em Paris. Seu principal trabalho era lecionar o cálculo infinitesimal e, insatisfeito com o modo como isso era feito na época, revolucionou de maneira definitiva a apresentação do assunto no célebre livro-texto *Cours d'Analyse* de 1821. Um pouco mais tarde, em 1826, publicou *Leçons sur l'application du calcul infinitésimal à la géométrie*, em que introduziu novos métodos ao assunto, sistematizando e esclarecendo diversos cálculos feitos por seus predecessores. Em particular, precisou e refinou o trabalho de Monge sobre a curvatura κ e a torção τ de uma curva espacial, e chegou às fórmulas, hoje conhecidas como de Frenet-Serret, que expressam o comportamento local da curva em função de κ e τ em relação a um sistema de coordenadas móvel. Os teoremas de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias devidos a Cauchy permitem mostrar que as funções κ e τ determinam completamente a curva a menos de um movimento rígido do espaço. O trabalho de Cauchy marca o final brilhante de um período definido na história da geometria diferencial. Suas técnicas eram belas, mas tiveram de ceder espaço ao gigante que viria dar o tom final ao assunto e obter teoremas até então inimagináveis.

* * *

Por volta de 1818, Carl Friedrich Gauss (1777–1855), a então figura dominante no mundo matemático, foi chamado pelo governo de Hanover para supervisionar um levantamento topográfico do reino, e vários aspectos dessa tarefa, incluindo exaustivo trabalho de campo e tediosas triangulações, ocuparam-no por vários anos, mas propiciaram o estímulo que o conduziu à sua obra-prima *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, que foi completada em 1827 e publicada no ano seguinte. Além da geodesia teórica, outra fonte de inspiração de Gauss foram considerações astronômicas, incluindo trigonometria esférica, como ele mesmo escreveu.

Nessa obra, Gauss lançou seu famoso e influente programa para a *geometria diferencial intrínseca*, a saber, o estudo das propriedades geométricas de uma superfície que são independentes das várias maneiras de mergulhá-la no espaço tridimensional. Ele utiliza sistematicamente a representação paramétrica $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ introduzida por Euler, e define a *primeira forma fundamental* $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ em termos de três funções E, F e G de u e v, o que essencialmente determina as distâncias ao longo da superfície e assim define sua natureza essencial. As propriedades intrínsecas da superfície são exatamente aquelas que podem ser expressas exclusivamente em termos da primeira forma fundamental, tais como comprimentos, ângulos e áreas de figuras geométricas construídas sobre ela, e, em especial, as equações das curvas geodésicas. Suas construções astronômicas inspiram-no a definir a *representação esférica* de uma superfície na esfera unitária como sendo a aplicação ζ que associa continuamente a cada ponto da primeira um vetor normal unitário. A *curvatura total* de uma região da superfície é definida como sendo a área da representação esférica dessa região. Para definir a *medida de curvatura* K (ou *curvatura gaussiana*, como é hoje conhecida) em um ponto p, ele toma a razão entre a área da representação esférica de uma região em torno do ponto e a área da própria região, e passa ao limite considerando regiões infinitamente pequenas ao redor do ponto:

$$|K(p)| = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\text{área}(\zeta(D_\epsilon))}{\text{área}(D_\epsilon)},$$

onde D_ϵ é um disco de raio ϵ centrado em p. Para decidir o sinal de $K(p)$, compara os sentidos de percursos de $\zeta(\partial D_\epsilon)$ e ∂D_ϵ. Sobre o problema de calcular explicitamente a curvatura, Gauss fornece uma fórmula essencialmente em termos do determinante da diferencial da representação esférica (essa diferencial é o que conhecemos como *segunda forma fundamental*), e uma fórmula em termos de E, F, G e suas derivadas até ordem 2 (hoje conhecida como *equação de Gauss*). Da segunda fórmula decorre então o célebre *theorema egregium*, que afirma ser a curvatura gaussiana um invariante intrínseco da superfíce. Mencionemos que Euler e Olinde Rodrigues (este, um outro pupilo de Monge) já haviam notado alguns desses conceitos e resultados, mas é Gauss quem percebe toda a sua importância.

A última parte do *Disqu. Gen.* lida com as curvas que minimizam distância, ditas *curvas geodésicas*, na superfície. Aqui o principal resultado é que o excesso da soma dos ângulos internos de um triângulo ABC (formado por curvas geodésicas) em relação a dois ângulos retos é igual à curvatura total do triângulo:

$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi &= \text{área}(\zeta(\Delta ABC)) \\ &= \int_{\Delta ABC} K dS. \end{aligned}$$

Uma consequência importante é que a geometria das linhas geodésicas da superfície é não euclidiana no caso em que a curvatura gaussiana é não nula. Existe, assim, nas investigações de Gauss, um paralelo entre a geometria intrínseca das superfícies e as geometrias não euclidianas, mas não é claro o quanto e de que maneira cada uma dessas linhas de pesquisa influenciou a outra.

* * *

Alguns destacados continuadores da obra de Gauss foram Carl Jacobi (1804–1851), Pierre Bonnet (1819–1892) e Ferdinand Minding (1806–1885). Jacobi começou a trabalhar em geometria a partir de 1836, sob influência direta do trabalho de Gauss. Em 1838, obteve um resultado importante de geometria intrínseca global no contexto de suas contribuições ao cálculo de variações. O problema tratava de entender de que maneira uma geodésica que é prolongada cessa de ser o caminho mais curto entre dois pontos. Nesse artigo, ele introduziu o conceito de *ponto conjugado* e deu uma resposta correta em termos de uma equação diferencial de segunda ordem.

Em 1848, Bonnet generalizou o teorema de Gauss relativo à curvatura total de um triângulo geodésico de modo a obter uma fórmula para a curvatura total de qualquer região simplesmente conexa de uma superfície. Em outra contribuição importante à teoria de superfícies, estabeleceu o que chamamos hoje em dia de *teorema fundamental de existência e unicidade de superfícies*. Os italianos Gaspare Mainardi (1800–1879) e Delfino Codazzi (1824–1873) já haviam derivado as equações de compatibilidade entre os coeficientes da duas formas fundamentais de uma superfície, independentemente um do outro e respectivamente em 1856 e 1867. Bonnet demonstrou em 1867 que essas equações, juntamente com a equação de Gauss, são suficientes para que haja uma superfície com as formas fundamentais dadas, e tal superfície fica então unicamente determinada a menos de um movimento rígido do espaço. Menos conhecido é o fato do letão Karl Peterson (1828–1881), que foi pupilo de Minding, ter chegado antes às equações de Codazzi-Mainardi e ao teorema de Bonnet em sua tese de doutoramento, que foi escrita em alemão em 1853 mas publicada somente em 1952 (em uma tradução para o russo).

Em 1839, Minding mostrou que, para duas superfícies de curvatura gaussiana constante, a igualdade entre essas constantes é uma condição suficiente para que as superfícies possam ser transformadas isometricamente uma sobre a outra. Em outro trabalho, no ano seguinte, estabeleceu as relações trigonométricas de triângulos geodésicos em superfícies de curvatura constante negativa. Apesar desse trabalho ter sido publicado no mesmo periódico (*Journal du Crelle*, cognome para *Journal für die reine und angewandte Mathematik*) em que aparecera em 1837 a tradução para o francês do artigo de Lobachevski *Geometria imaginária*, nenhum dos dois autores notou que essas relações coincidiam com aquelas para triângulos da geometria não euclidiana de Lobachevski. O primeiro matemático a perceber tal coincidência foi Eugenio Beltrami (1835–1900), que considerou o assunto em *Saggio di interpretazione della geometria non-Euclidea*, em 1868. Beltrami mostrou que a geometria plana do matemático russo e a geometria intrínseca de uma superfície de curvatura constante negativa (a *pseudoesfera*) são (localmente) equivalentes, construindo assim o primeiro modelo concreto do plano de Lobachevski e demonstrando por fim a consistência da geometria não euclidiana, o que promoveu a aceitação definitiva dessa geometria nos meios matemáticos. Por outro lado, essa aceitação também teve o efeito de conscientizar os matemáticos do alcance das deficiências dos *Elementos*, e de disseminar a percepção da necessidade de reconstruir os fundamentos da geometria euclidiana em bases modernas, o que foi concretizado principalmente pelas mãos de Pasch, Peano e Hilbert durante as últimas duas décadas do século XIX.

* * *

Em 1809, Wilhelm von Humboldt, o irmão mais velho do importante naturalista e explorador Alexander von Humboldt, foi nomeado ministro da educação do estado da Prússia e encabeçou uma profunda reforma do sistema educacional prussiano. Em oposição à filosofia utilitarista pregada por Napoleão do outro lado da fronteira, Humboldt era desfavorável à prática da ciência como meio para atingir certos objetivos e defendia um retorno à tradição clássica, em que a busca do conhecimento era um fim em si mesmo. Sob seu comando, as universidades alemãs teriam novas disciplinas incluídas em seus currículos e deveriam promover a pesquisa, além da docência. Em particular, os alunos seriam estimulados a estudar matemática como disciplina própria, e não mais apenas como apoio às demais ciências. O impacto na compreensão dos matemáticos sobre muitos aspectos de sua disciplina foi grande, permitindo-lhes instituir uma nova linguagem, mais abstrata do que a anterior.

É nesse contexto que devemos entender a formação matemática do jovem Bernhard Riemann (1826–1866). Em 1846, matriculou-se na Universidade de Göttingen, onde Gauss era Professor Catedrático e numa época em que este ainda estava no auge de sua carreira. Entretanto, é pouco provável que os dois homens tenham tido contato pessoal nessa ocasião. Um ano mais tarde, transferiu-se para a Universidade de Berlim, onde aprofundou seus estudos com Dirichlet e Jacobi. Em 1849, retornou a Göttingen, onde, em 1851, apresentou sua tese de doutoramento *Fundamentos de uma teoria geral de funções de uma variável complexa*. Mais tarde, em junho de 1854, Riemann preparava-se para proferir uma conferência para os docentes da faculdade de filosofia, com o intuito de satisfazer os requerimentos para a promoção a *Privatdozent*, o que essencialmente significava obter a posição de instrutor na universidade. Como era de costume, ele oferecera ao comitê responsável três possíveis tópicos para a sua conferência, com o entendimento implícito de que o primeiro da lista seria aquele escolhido. Os dois primeiros tópicos de fato lidavam com partes de sua *Habilitationsschrift*, uma outra tese também requerida para a promoção, que fora apresentada alguns meses antes. Mas, seguindo a recomendação de Gauss e para a surpresa de Riemann, o comitê escolheu o terceiro tópico, que lidava com os fundamentos da geometria. Mesmo assim, o resultado foi, cremos nós, uma das conferências científicas mais importantes da história: *Sobre as hipóteses que estão nos fundamentos da geometria (Über die hypothesen, welche zu Grunde der Geometrie liegen)*.

O ensaio de Riemann de 1854 consiste de duas partes. A primeira contém considerações puramente matemáticas. Ele introduz o conceito de *variedade n-dimensional* de pontos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, que generaliza a ideia de superfície. Em seguida, introduz uma *forma diferencial quadrática* (chamada hoje em dia de *métrica riemanniana*) na variedade que generaliza a primeira forma fundamental das superfícies e essencialmente define as distâncias sobre a variedade (a variedade equipada com tal métrica é chamada hoje em dia de *variedade riemanniana*). Esse é um dos pontos essenciais de sua visão: a separação entre os conceitos de espaço e as possíveis métricas que podem ser definidas sobre ele. Dessa maneira, Riemann aprofundou brutalmente o conceito de geometria intrínseca da teoria de superfícies de Gauss. Ele ainda define a *curvatura de uma variedade riemanniana* como sendo a função que, a cada 2-plano tangente à variedade em um certo ponto, associa a curvatura gaussiana naquele ponto da superfície, esta que é formada pelas linhas geodésicas da variedade que são tangentes ao 2-plano naquele ponto. Finalmente, discute o caso de espaços de curvatura constante. Na segunda parte do ensaio, Riemann essencialmente pondera sobre a relação entre a geometria e o espaço físico. Aqui ele procura indicar a maneira pela qual as novas concepções geométricas podem contribuir para mudar nossa visão da natureza dos fenômenos físicos e, em especial, a visão clássica euclidiana-newtoniana do espaço físico.

Anos depois, em 1861, num trabalho para resolver um problema prático sobre condução de calor submetido à Academia Parisiense, Riemann desenvolveu mais o aparato analítico de sua nova geometria. Ele notou que o problema estudado era equivalente a determinar sob que condições uma forma diferencial quadrática pode ser transformada por meio de uma mudança de coordenadas em uma soma de quadrados, e estudou o problema mais geral de equivalência de métricas riemannianas. No curso de sua solução, foi levado a considerar os *símbolos de Christoffel* Γ^k_{ij} e os símbolos do *tensor de curvatura* R^l_{ijk}.

O ensaio de 1854 passou praticamente despercebido em sua época e foi apenas publicado postumamente em 1868 por Dedekind, amigo íntimo de Riemann e seu primeiro biógrafo (o *Pariserarbeit* de 1861 só seria publicado em 1876 no volume de suas obras completas). A publicação teve repercussões importantes. O artigo supracitado de Beltrami não concluía seu estudo da geometria não euclidiana. Ele deixara em aberto o problema de construir o espaço hiperbólico de Lobachevski em três dimensões e, na verdade, acreditava ser impossível a construção de tal espaço. No entanto, em 1869, um ano após a publicação do ensaio de Riemann, Beltrami publicou uma análise de espaços de curvatura constante em dimensões arbitrárias baseada nas ideias de Riemann, incluindo uma versão detalhada do espaço hiperbólico tridimensional. Mais tarde, Felix Klein (1849–1925) e o grande matemático e físico francês Henri Poincaré (1854–1912) proporiam outros modelos para a geometria de Lobachevski.

As investigações de Riemann foram continuadas por Elwin Christoffel (1829–1900) (quase simultaneamente, Rudolf Lipschitz examinou algumas questões similares). Em um importante artigo de 1869, ele reconsidera e expande o tema já abordado por Riemann em 1861, a saber, a questão de decidir sob que condições duas métricas riemannianas determinam a mesma geometria, e deriva como condição necessária (em linguagem moderna) a coincidência dos tensores de curvatura calculados para as duas métricas. É nesse trabalho que ele introduz os hoje chamados símbolos de Christoffel. Seus cálculos estão na base dos métodos invariantes em geometria riemanniana que caracterizariam o estágio seguinte de desenvolvimento.

* * *

No final do século XIX os fundamentos da teoria de superfícies já estavam bem estabelecidos. Entre 1887 e 1896 surgiram os quatro volumes do clássico *Leçons sur la théorie générale de surfaces*, de Gaston Darboux, e em 1893 foi publicado *Lezioni di Geometria Differenziale*, de Luigi Bianchi, ocasião em que foi cunhado o nome *geometria diferencial*. Por outro lado, o trabalho de Riemann despertara considerável interesse em variedades riemannianas de dimensão arbitrária e curvatura constante, e o problema de classificação (local) de tais variedades, proposto por Killing em um artigo de 1891, ficou conhecido como *problema das formas espaciais de Clifford-Klein* pelas contribuições desses dois matemáticos ao assunto. Em um desenvolvimento paralelo, o *Erlanger Programm*, apresentado por Klein em 1872, sintetizava cada tipo de geometria como sendo o estudo das propriedades do espaço que são invariantes sob um grupo de transformações dado. O norueguês Sophus Lie (1842–1899), inspirado por discussões com Klein e motivado pelo desejo de criar uma teoria de solubilidade de equações diferenciais ordinárias análoga à teoria de equações algébricas de Galois, inventou a teoria geral dos grupos de transformações contínuos (hoje conhecidos como *grupos de Lie*) em 1885–1886.

O estudo de invariantes diferenciais que fora iniciado por Riemann, Beltrami, Christoffel e Lipschitz tomou novas proporções a partir do trabalho de Gregorio Ricci-Curbastro (1853–1925). Em quatro artigos entre 1888 e 1892, ele expôs a técnica do *cálculo diferencial absoluto*, um novo formalismo invariante inicialmente concebido para lidar com a teoria de transformações de equações diferenciais parciais, mas que ele usou para estudar a teoria de transformações de formas diferenciais quadráticas. Em 1901, Ricci e seu famoso pupilo Tulio Levi-Civita (1873–1941) colaboraram em um artigo em que expunham de maneira completa os novos métodos, incluindo a derivação covariante, e que é considerado o marco do nascimento da análise tensorial.

As pesquisas de Riemann também influenciaram questões de filosofia do espaço físico. Um dos primeiros cientistas a apreciar as ideias contidas na segunda parte do ensaio de 1854 foi William Clifford (1845–1879). Em 1870, ele formulou um programa de geometrização da física em que admitia a possibilidade de que pequenas variações de curvatura, dependentes do tempo, pudessem ocorrer de ponto para ponto no nosso espaço e causar efeitos que nós atribuímos a causas físicas. Ainda a respeito da filosofia do espaço, Poincaré escreveu que espaço, tempo, assim como todas as leis da natureza, são meros símbolos criados pelo homem por mera conveniência, e que as hipóteses fundamentais da geometria não são fatos baseados em lógica ou experimentos, mas a observação de certos fenômenos físicos leva-nos a acolher certas hipóteses em detrimento de outras. Albert Einstein (1879–1955) escreveu sobre a filosofia do espaço referindo-se a Poincaré, mas interpretando sua posição em termos mais materialistas. Assim, ele acreditava na escolha inicial arbitrária de axiomas geométricos e de parte das leis físicas, mas que o restante das leis físicas deveria então ser escolhido de modo que a totalidade dessas hipóteses pudesse ser confrontada experimentalmente.

O pensamento de Klein que enfatizava invariantes de transformações transferiu-se da matemática para a mecânica e para a física-matemática em geral. O problema de expressar leis físicas de maneira independente de sistemas de coordenadas tornou-se predominante na física depois da descoberta de que as equações do eletromagnetismo de Maxwell são invariantes pelo grupo de transformações de Lorentz. Essa linha de pensamento conduziu Einstein a fundar a teoria restrita da relatividade no artigo *Sobre a eletrodinâmica dos corpos móveis (Zur Elektrodynamik der bewegter Körper)* de 1905. Quase simultaneamente, Poincaré desenvolveu ideias semelhantes em um artigo de 1906 em que é discutido o caráter pseudoeuclidiano da geometria do espaço-tempo, mas não penetrou tão profundamente quanto Einstein nas leis da física, possivelmente devido a seus preconceitos filosóficos. Todavia, a teoria restrita de Einstein não envolvia a ação da gravitação, e assim ele começou a buscar alguma estrutura adicional que pudesse ser imposta à geometria do espaço-tempo de modo a incorporar essa ação. Foi através de um colega em Praga, o matemático George Pick, que Einstein tomou conhecimento da teoria de Ricci e Levi-Civita, e por meio de outro colega em Zurique, Marcel Grossmann (1878–1936), que ele aprendeu essa teoria. A apresentação da teoria geral da relatividade, baseada no cálculo tensorial, foi iniciada por Einstein e Grossmann em *Esboço de uma teoria generalizada de relatividade e teoria de gravitação (Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und Theorie der Gravitation)*, de 1913, e concluída com *Fundamentos da teoria da relatividade geral (Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie)*, de 1916. O mais importante elemento dessa teoria é a interpretação geométrica da gravidade: a densidade da matéria numa certa região e, portanto, a intensidade do campo gravitacional, é tanto maior quanto maior for a curvatura da métrica pseudorriemanniana do espaço-tempo, segundo a equação de Einstein (uma equação diferencial parcial não linear para a métrica que relaciona uma certa componente do tensor de curvatura da métrica com outro tensor que descreve a distribuição de matéria); além disso, a teoria prevê que uma partícula sujeita apenas ao campo gravitacional move-se ao longo de uma geodésica nessa métrica. Esse interesse ampliado em geometria advindo da teoria da relatividade levou Levi-Civita a descobrir o importante conceito de *transporte paralelo* em 1917. Por sua vez, as tentativas de unificar as teorias dos campos gravitacional e eletromagnético também beneficiaram a geometria e incentivaram o desenvolvimento de *conexões afins em espaços fibrados*, através dos sucessivos esforços de Hermann Weyl (1918), Jan Schouten (1922), Élie Cartan (1923) e Charles Ehresmann (1950).

* * *

As variedades introduzidas por Riemann e os grupos introduzidos por Lie, bem como outros espaços considerados pelos geômetras até o início do século XX – à parte alguns bem conhecidos poucos exemplos de objetos globalmente definidos – tinham um caráter local: estavam definidos apenas no domínio de um sistema de coordenadas. A passagem para o ponto de vista global em geometria dependia, em certa medida, da introdução de ideias topológicas.

Os primórdios da topologia remontam ao século XVII. Em 1679, Leibniz, em seu livro *Characteristica geometrica*, tentou abstrair propriedades de figuras geométricas relacionadas com “localização” (*situs*), em oposição à natureza do tratamento dado pela geometria analítica de Fermat e Descartes, cuja noção principal era a de “magnitude”. Ele chamou esse estudo de *analysis situs*. Os matemáticos do século XVIII não se interessaram muito pela topologia, com a notável exceção de Euler, que obteve dois resultados fundamentais para o desenvolvimento da área: a célebre fórmula para poliedros convexos fechados ($V - A + F = 2$, onde V, A, F denotam os números de vértices, arestas e faces, respectivamente), e a resolução do problema das sete pontes de Königsberg (que perguntava se era possível atravessar todas as sete pontes da cidade cada uma exatamente uma vez). No século XIX, destacam-se inicialmente as contribuições de August Ferdinand Möbius (1790–1868) e Johann Listing (1808–1882) (este cunhou o termo *topologia* em seu livro de 1848), que foram discípulos de Gauss em Göttingen. Entretanto, o maior ímpeto às investigações topológicas nesse período deve ser creditado à tese de Riemann sobre funções complexas algébricas, de 1851. Sua altamente original e frutífera ideia foi que funções multivalentes no plano complexo (tais como $w = \sqrt{z}$, por exemplo) podem ser representadas por funções univalentes definidas sobre certas superfícies (de Riemann) construídas a partir dos pontos de ramificação da função. Nesse trabalho, ele enfatizou que os teoremas da *analysis situs* eram indispensáveis para trabalhar-se com tais funções, definiu a conectividade de uma superfície (noção que é equivalente à de *gênero*) e esboçou uma classificação das superfícies fechadas em termos desse invariante. Mais tarde, Camille Jordan (1838–1922) e Felix Klein fizeram outras contribuições à teoria de superfícies fechadas. A necessidade de estudar a conectividade em dimensões maiores foi apreciada por Enrico Betti (1823–1892), professor em Pisa e amigo de Riemann, em um artigo de 1871, mas o passo decisivo foi dado por Poincaré, considerado o fundador da topologia de variedades n-dimensionais. No artigo *Analysis situs* de 1895 e nos seus cinco apêndices, Poincaré definiu os conceitos básicos da nova área, e suas ideias e resultados de fato definiram o desenvolvimento posterior da topologia.

De outro ponto de vista, o conceito de *espaço topológico* surgiu de forma explícita no livro sobre teoria de conjuntos de Felix Hausdorff (1868–1942), de 1914. Mais ou menos na mesma época, em 1913, Hermann Weyl (1885–1955) publicou um livro sobre superfícies de Riemann em que definia tais superfícies globalmente, explicando como "colar" os diversos sistemas de coordenadas de maneira compatível. Em 1924, o mesmo Weyl reconheceu a importância dos métodos topológicos na teoria de grupos de Lie e assim inaugurou o ponto de vista global nessa teoria. O conceito de *variedade diferenciável* amadureceu lentamente até atingir seu formato definitivo com os trabalhos de O. Veblen e J. H. C. Whitehead (1933) e H. Whitney (1936).

Como consequência da evolução do conceito de variedade diferenciável, antigos problemas em geometria foram revistos sob o novo ponto de vista global e novos problemas surgiram. S. Cohn-Vossen, W. Blaschke, S. S. Chern e outros estudaram as propriedades globais relacionando os invariantes riemannianos com a topologia das variedades. H. Poincaré, G. Birkhoff, M. Morse, J. Hadamard e E. Hopf estudaram várias propriedades de geodésicas de diversos pontos de vistas diferentes. H. Hopf estudou as propriedades globais dos espaços de curvatura constante e Élie Cartan definiu e investigou exaustivamente os *espaços simétricos*, uma classe notável de variedades riemannianas. Através desse esforço monumental, a geometria riemanniana foi ligada a diversas áreas da matemática, e foi reconhecido que a relação entre as propriedades locais determinadas pela métrica riemanniana e as propriedades geométricas ou topológicas relacionadas com a estrutura global da variedade são importantes objetos de investigação. Através da noção de *completude* introduzida por H. Hopf e W. Rinow em 1931, as considerações globais foram firmemente estabelecidas.

* * *

Na década de 1930, começaram a enraizar-se certas ideias relacionadas com a capacidade de estimar magnitudes geométricas básicas – tais como funções distância e funções volume – em variedades riemannianas com cotas de curvatura em termos das magnitudes correspondentes em variedades de curvatura constante, através do trabalho de H. Hopf, Morse, Schoenberg, Myers e Synge. Na década de 1950, sobreveio a real ruptura com o trabalho pioneiro de Rauch e os trabalhos fundamentais de Alexandrov, Toponogov e Bishop. Desde então, os *métodos de comparação*, ou a ideia simples de comparar a geometria de uma variedade riemanniana arbitrária com as geometrias dos espaços de curvatura constante experimentaram uma evolução brutal. O livro *Comparison theorems in riemannian geometry* de Cheeger e Ebin, que foi publicado em 1975, lida com as contribuições mais relevantes ao assunto entre 1959 e 1974, tais como o teorema da esfera de Berger-Klingenberg e suas generalizações, o teorema diferenciável da esfera, a estrutura de variedades completas de curvatura não negativa e resultados sobre a estrutura de variedades completas de curvatura não positiva.

Mais recentemente, começou-se a entender que esses métodos de comparação e, por conseguinte, uma vasta parte da geometria, essencialmente pertencem ao âmbito da *geometria métrica*, e que o aparato diferencial pode ser utilizado apenas para definir uma classe de objetos e extrair os dados iniciais a serem usados nos métodos sintéticos. Nesse sentido, a variedade riemanniana é despida de sua estrutura diferencial e sua subjacente estrutura de espaço métrico é abstraída no conceito de *espaço métrico intrínseco*; nesse contexto, cotas sobre a curvatura são expressas em termos de desigualdades entre distâncias envolvendo quádruplas de pontos. Esse ponto de vista revolve em torno da noção de convergência de variedades riemannianas, apresentada pioneiramente na tese de doutorado de Cheeger em 1967, e extraordinariamente desenvolvida no enigmático livro *Structure métriques des variétés riemanniennes* de Gromov[2], Lafontaine e Pansu, publicado em 1979 e reeditado em inglês em 1999. Além de surpreendentes novos resultados concretos, essa mudança de paradigma também trouxe outros benefícios, tais como enriquecer nossa compreensão de variedades riemannianas e aumentar enormemente o escopo de aplicações de técnicas geométricas a ponto de incluir, por exemplo, análise clássica e teoria combinatória dos grupos.

[2] Recentemente, foi anunciado que Mikhail Gromov é o ganhador do Prêmio Abel de 2009, "pelas suas contribuições revolucionárias à geometria". O Prêmio Abel foi instituído em 2003 pelo governo norueguês e atualmente disputa com a Medalha Fields a primazia de ser reconhecido como a maior distinção do mundo em matemática.

Do ponto de vista da relação entre geometria e física, as tentativas de unificar as teorias dos campos gravitacional e eletromagnético, empreendidas já na época de Einstein, expandiram seu objetivo ao longo do século XX a ponto de incluir também as posteriormente descobertas interações nucleares forte e fraca. A busca por essa *teoria de campo unificada* continua a beneficiar a geometria até os dias de hoje e a *teoria de cordas* é apenas uma – se bem que certamente a mais popular – dentre muitas teorias em voga que pretendem resolver essa questão. Segundo essa teoria, as menores partículas que compõem o universo são cordas vibrantes que vivem num espaço-tempo de múltiplas dimensões. Em 1990, a então maior distinção em matemática, a Medalha Fields, foi pela primeira vez concedida a um físico, Edward Witten. Witten fez contribuições fundamentais à teoria quântica dos campos e à teoria de cordas, e sua habilidade única de interpretar ideias físicas em forma matemática gerou profundos resultados em geometria e topologia.

Finalmente, antes de concluir este curto ensaio, não poderíamos deixar de mencionar uma das mais espetaculares aplicações recentes da geometria à topologia, a saber, a prova da centenária *conjectura de Poincaré* por Hamilton e Perelman. Em 1904, motivado pela classificação de superfícies fechadas e após um longo estudo da topologia de 3-variedades, Poincaré mencionou a questão, reformulada em linguagem moderna, de decidir se toda variedade topológica tridimensional compacta e simplesmente conexa é homeomorfa à esfera de mesma dimensão. O desenvolvimento de ferramentas para atacar esse problema orientou a maior parte do trabalho em topologia de 3-variedades durante o século passado. Na década de 1980, William Thurston desenvolveu uma nova metodologia para estudar a topologia de 3-variedades e colocou a conjectura de Poincaré no âmbito de uma conjectura mais geral, conhecida como *conjectura de geometrização*, que de certa maneira postulava uma relação mais estreita entre a topologia e a geometria de 3-variedades e, portanto, sugeria um caminho mais analítico para classificá-las. Em 1982, Richard

Hamilton formalizou um tal caminho introduzindo o *fluxo de Ricci* como uma equação de evolução no espaço de métricas riemannianas em uma variedade de dimensão arbitrária. Ele então conjecturou que, começando com uma métrica arbitrária em uma 3-variedade compacta, o fluxo de Ricci deveria produzir uma família a um parâmetro de métricas convergindo para uma métrica bem comportada, como previsto na conjectura de geometrização. Mas esse programa esbarrou em uma série de dificuldades técnicas: em geral, o fluxo de Ricci desenvolve singularidades em tempo finito, e um método para analisar essas singularidades e continuar o fluxo para além delas precisava ser encontrado; além disso, mesmo que o fluxo esteja definido para todos os valores do tempo, restam ainda questões delicadas sobre a natureza do objeto-limite. Numa série de artigos publicados entre 1982 e 1999, Hamilton realizou progresso considerável no seu programa, sem no entanto completá-lo. Mais recentemente, em três manuscritos surgidos entre 2002 e 2003 e apoiando-se no trabalho de Hamilton, Grigori Perelman anunciou ter resolvido todas as dificuldades técnicas de natureza geométrica e analítica do programa daquele. Em linhas gerais, mostrou como estender o fluxo de Ricci através das singularidades por meio do que chamou de *fluxo de Ricci com cirurgia*, e estendeu as estimativas de Hamilton para o fluxo de Ricci com cirurgia, bem como sua análise do processo de limite. Desse modo, ele afirmou ter estabelecido a conjectura de geometrização e portanto a conjectura de Poincaré. Após cerca de dois anos de intenso escrutínio, a comunidade matemática finalmente reconheceu a validade dos argumentos de Perelman no que concerne à conjectura de Poincaré e o agraciou com a Medalha Fields em 2006. No que concerne à mais geral conjectura de geometrização, nos últimos dois anos foram colocados à disposição pelo menos quatro manuscritos, de autoria de especialistas, expondo uma série de detalhes que faltavam nos artigos de Perelman, de modo que parece se estar formando um razoável consenso também em torno da solução desse problema. De toda maneira, as contribuições de Perelman vão muito além da prova dessas conjecturas. As técnicas que ele introduziu causaram grande sensação na área de análise geométrica e estão agora sendo usadas para resolver outros problemas importantes nessa área.

Agradecimentos. Expressamos nossa gratidão aos pareceristas anônimos pelos seus comentários úteis, e aos editores da *Matemática Universitária* pelo convite para escrever este texto, pela paciência e pelo trabalho editorial minucioso. Também agradecemos a outros leitores que tiveram a oportunidade de comentar sobre uma versão preliminar deste texto. A responsabilidade por quaisquer erros ou omissões remanescentes cabe, como sempre, exclusivamente ao autor.

Referências

[1] BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. *Math through the ages: a gentle history for teachers and others*. Expanded edition. Farmington: Oxton House Publishers/Washington: The Mathematical Association of America, 2004.

[2] BOI, L. *Le problème mathématique de l'espace. Une quête de l'intelligible*. Berlin: Springer, 1995.

[3] BÜHLER, W. K. *Gauss. A biographical study*. Berlin: Springer, 1981.

[4] COOLIDGE, J. L. *A history of geometrical methods*. New York: Oxford University Press, 1940.

[5] DOMBROWSKI, P. *150 years after Gauss' "Disquisitiones generales circa superficies curvas"*. With the original text of Gauss. Paris: Société Mathématique de France, 1979. (Astérisque, 62)

[6] GERSTELL, M. Prussian education and mathematics. *American Mathematical Monthly*, v. 82, p. 240–245, 1975.

[7] JACKSON, A. Conjectures no more? Consensus forming on the proof of the Poincaré and geome-

trization conjectures. *Notices of the American Mathematical Society*, v. 53, n. 8, p. 897–901, 2006.

[8] KENNEDY, H. C. The origins of modern axiomatics: Pasch to Peano. *American Mathematical Monthly*, v. 79, p. 133–136, 1972.

[9] KLINE, M. *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York: Oxford University Press, 1972.

[10] LAPTEV, B. L.; ROSENFELD, B. A. *Geometry*. In: *Mathematics of the 19th century: geometry, analytic function theory.* Edited by A. N. Kolmogorov and A. P. Yushkevich. Translated from the Russian by Roger Cooke. Basel: Birkhäuser, 1996. p. 1–115.

[11] MARKHAM, J. D. The revolution, Napoleon, and education. In: *Consortium on Revolutionary Europe. Selected Papers.* Charleston: University of South Caroline Press, 1999. p. 436–445.

[12] MONASTYRSKY, M. *Riemann, topology, and physics.* With a foreword by Freeman J. Dyson. Translated by James King and Victoria King. Edited by R. O. Wells Jr. Boston: Birkhäuser, 1987.

[13] MORGAN, J. W. Recent progress on the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 42, n. 1, p. 57–78, 2005.

[14] PENROSE, R. *The road to reality. A complete guide to the laws of the universe*. New York: Alfred A. Knopf Inc., 2005.

[15] ROSENFELD, B. A. *A history of non-Euclidean geometry. Evolution of the concept of a geometric space.* Translated from the Russian by Abe Shenitzer. New York: Springer, 1988. (Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, 12)

[16] STRUIK, D. J. Outline of a history of differential geometry: I. *Isis*, v. 19, n. 1, p. 92–120, 1933.

[17] STRUIK, D. J. Outline of a history of differential geometry: II. *Isis*, v. 20, n. 1, p. 161–191, 1933.

[18] STRUIK, D. J. *Theory of linear connections.* Berlin: Springer, 1934.

Claudio Gorodski
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
Rua do Matão, 1010
05508–090 – São Paulo – SP
gorodski@ime.usp.br