Uma nota sobre o Teorema Fundamental da Álgebra

Cecília S. Fernandez

Raphael A. dos Santos

UFF

A maioria das demonstrações sobre o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA, daqui em diante) apresentadas nos cursos de bacharelado em matemática segue, muito facilmente, do Teorema de Liouville (cf. [1], [2], [3] ou [5]). Em contrapartida, para se chegar ao Teorema de Liouville, o aluno precisa ter cursado uma disciplina de análise complexa ou de funções analíticas, como queiram denominar. Um ponto que também consideramos importante ressaltar é que, embora o TFA seja assunto obrigatório no Ensino Médio, muitos professores de matemática nunca viram, em seus cursos de licenciatura, uma demonstração desse importante resultado.

O objetivo desta nota é apresentar uma demonstração elementar do TFA que não utiliza as técnicas usuais da análise complexa. De fato, a prova que aqui será apresentada utiliza basicamente as noções de continuidade e compacidade no plano complexo. Observamos que esta prova é conhecida (cf. [4]). Nosso trabalho aqui é destacar essa demonstração para o aluno de graduação em matemática, desde que tenha sido apresentado aos conceitos e teoremas básicos de compacidade e continuidade. De fato, fica aqui a sugestão de fazer essa demonstração em alguma disciplina que apresente o Teorema de Weierstrass. Para o leitor interessado em relembrar os resultados básicos sobre a topologia do plano complexo indicamos o livro [3].

Comecemos lembrando que chamamos de *função complexa de uma variável complexa* a toda função $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, em que o domínio A é um subconjunto de $\mathbb{C}$. Assim, a menos que se mencione o contrário, sempre que considerarmos uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, admitiremos implicitamente que $A \subset \mathbb{C}$. Aqui estamos interessados particularmente nas funções polinomiais complexas de uma variável complexa. Uma *função polinomial* complexa de uma variável complexa é uma função do tipo

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \,, \tag{1}$$

em que os coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ são números complexos. Se $a_n \neq 0$ em (1), dizemos que f é uma função polinomial de *grau* n. Observamos que não é atribuído grau à função polinomial nula $f(z) = 0$. Dada uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, dizemos que um número complexo $z_0 \in A$ é um *zero* de f (ou uma *raiz* de f) se $f(z_0) = 0$. Por exemplo, $i/2$ é o único zero da função $f(z) = 2z - i$.

Vejamos a seguir três resultados simples sobre funções polinomiais que nos serão úteis mais tarde.

Proposição 1. *Seja $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ uma função polinomial. Se $z_0 \in \mathbb{C}$ é uma raiz de p, então $z - z_0$ é um fator de p, isto é, existe uma função polinomial g tal que $p(z) = (z - z_0)g(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.*

Demonstração. Com efeito, $p(z_0) = a_n z_0^n + \ldots + a_1 z_0 + a_0 = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} p(z) &= p(z) - p(z_0) \\ &= a_n(z^n - z_0^n) + \ldots + a_2(z^2 - z_0^2) + a_1(z - z_0)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

É fácil verificar que

$$z^k - z_0^k = (z - z_0)\left(z^{k-1} + z^{k-2}z_0 + \ldots + z z_0^{k-2} + z_0^{k-1}\right),$$

para todo inteiro $k \geq 1$. Substituindo essas igualdades em (3) e pondo-se $(z - z_0)$ em evidência, segue que $p(z) = (z - z_0)g(z)$, em que g é a função polinomial $g(z) = a_1 + a_2(z + z_0) + \ldots + a_n\left(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \ldots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1}\right)$. □

Proposição 2. *Se $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ é uma função polinomial em $\mathbb{C}$ de grau $n \geq 1$, então $\lim_{|z| \to +\infty} |p(z)| = +\infty$.*

Demonstração. Com efeito, por causa da desigualdade triangular temos que

$$|p(z)| \quad \geq \quad |z^n| \left(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \ldots - \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right).$$

Como $\lim_{|z|\to+\infty} \frac{1}{|z|^k} = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}^*$, então $\lim_{|z|\to+\infty} |p(z)| = +\infty$. □

Proposição 3. *Seja $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ a função polinomial $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, com $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$. Se $q(z) = p(z + z_0)$, $z \in \mathbb{C}$, então existe $1 \leq k \leq n$ tal que $q(z) = p(z_0) + z^k[a + r(z)]$, em que $a \neq 0$ e $r(z)$ é uma função polinomial com $r(0) = 0$.*

Demonstração. Com efeito, temos que $q(z) = p(z_0) + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_n z^n$, em que, para cada $1 \leq j \leq n$, $A_j = \sum_{p=j}^{n} \binom{p}{p-j} a_p z_0^{p-j}$ (lembre que $\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$). Tome o menor k entre 1 e n tal que A_k seja diferente de zero. Então

$$\begin{aligned} q(z) &= p(z + z_0) = p(z_0) + A_k z^k + \ldots + A_n z^n \\ &= p(z_0) + z^k[A_k + A_{k+1} z + \ldots + A_n z^{n-k}]. \end{aligned}$$

Tomando $a = A_k \neq 0$ e $r(z) = A_{k+1} z + \ldots + A_n z^{n-k}$, temos que $q(z) = p(z_0) + z^k[a + r(z)]$. Note que $r(0) = 0$. □

Enunciaremos abaixo uma versão complexa do Teorema de Weierstrass, que será utilizada para a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra.

Teorema 1 (Teorema de Weierstrass)**.** *Se $K \subset \mathbb{C}$ é compacto, então toda função contínua $f : K \to \mathbb{R}$ é limitada e atinge seus valores máximo e mínimo em K, ou seja, existem $z_0, z_1 \in K$ tais que $f(z_0) \leq f(z) \leq f(z_1)$ para todo $z \in K$.*

Vejamos agora o resultado central desta nota. Observamos que, no que se segue, os símbolos $\Delta(z\,;s)$ e $\overline{\Delta}(z\,;s)$, em que z é um número complexo e s é um número real positivo, denotam, respectivamente, o disco aberto e o disco fechado de centro z e raio s.

Teorema 2 (Teorema Fundamental da Álgebra)**.** *Toda função polinomial $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$, com $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$, possui uma raiz em $\mathbb{C}$.*

Demonstração. Seja

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

uma função polinomial em $\mathbb{C}$ de grau $n \geq 1$. Se $a_0 = 0$ então 0 é raiz. Suponhamos então $a_0 = p(0) \neq 0$. Pela Proposição 2, temos que $\lim_{|z|\to+\infty} |p(z)| = +\infty$, isto é, para todo $k > 0$, existe $r > 0$ tal que $|z| > r$ implica que $|p(z)| > k$. Assim, existe $r > 0$ tal que $|z| > r$ implica que $|p(z)| > |a_0| = |p(0)|$. Como o disco fechado $\overline{\Delta}(0\,;r)$ é um conjunto compacto, pelo Teorema 4 temos que a função contínua $\overline{\Delta}(0\,;r) \ni z \mapsto |p(z)| \in \mathbb{R}$ assume seu valor mínimo em algum ponto z_0 de $\overline{\Delta}(0\,;r)$. Assim, $|z| \leq r$ implica que $|p(z)| \geq |p(z_0)|$. Como $0 \in \overline{\Delta}(0\,;r)$, então $|p(0)| \geq |p(z_0)|$ e então, pela escolha de r, $|p(z_0)| \leq |p(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Portanto $|p| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ assume seu valor mínimo no ponto z_0.

Vamos mostrar que $p(z_0) = 0$. Por absurdo, suponhamos que $p(z_0) = c \neq 0$. Escrevamos $q(z) = p(z + z_0)$. Pela Proposição 3, temos que existe $1 \leq k \leq n$ tal que

$$q(z) = c + z^k[a + r(z)]\,,\ a \neq 0\,,\ r(0) = 0\,. \tag{3}$$

Vamos mostrar que existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $|q(z_1)| < |c|$, o que nos dará uma contradição. Para isto, bastará tomarmos $B = \Delta(-c; |c|)$ e encontrarmos z_1 tal que $q(z_1) - c \in B$.

Tomemos agora $w \in \mathbb{C}$ tal que $aw^k = -c$, em que k e a são dados em (3). Ou seja, w é uma raiz k-ésima do complexo $-c/a$. Consideremos a função $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = zw^k.$$

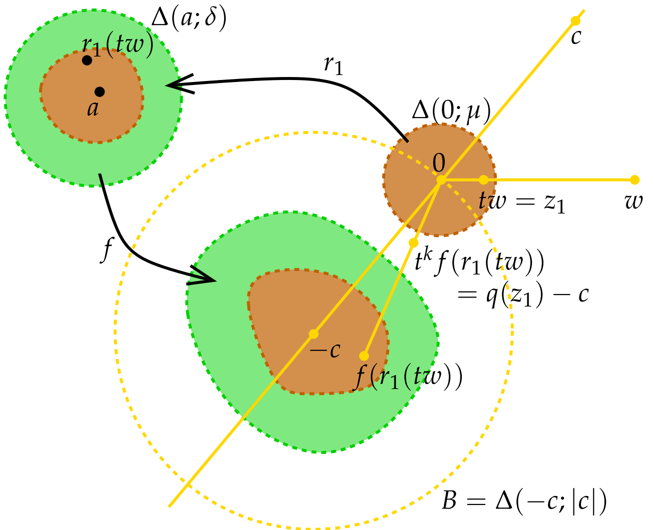
Tomemos agora a função

$$\begin{aligned} r_1 : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto r_1(z) = a + r(z) \end{aligned}$$

com a e $r(z)$ dados em (3).

Temos que r_1 é uma função polinomial e, portanto, uma função contínua. Em particular, r_1 é contínua em 0 e $r_1(0) = a$. Assim, existe $\mu > 0$ tal que $|z - 0| = |z| < \mu$ implica que $r_1(z) \in \Delta(a\,;\delta)$ e, com isso,

$$f(r_1(z)) = w^k[a + r(z)] \in B\,.$$



Note que f é contínua (em particular, é contínua em a) e $f(a) = -c$. Assim, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(\Delta(a;\delta)) \subset \Delta(-c;|c|) = B\,.$$

Seja $0 < t < 1$ tal que $|tw| < \mu$. Daí, como $r_1(tw) \in \Delta(a\,;\delta)$, então $f(r_1(tw)) = w^k[a + r(tw)] \in B$. Agora, se $0 < s < 1$ e $z \in B$, então $sz \in B$. Portanto, $t^k w^k[a + r(tw)] \in B$, pois $0 < t^k < 1$. Logo, pondo $z_1 = tw$, temos que

$$q(z_1) - c = z_1^k[a + r(z_1)] \in B\,.$$

□

Corolário 1. *Toda função polinomial $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ de grau n, dada por $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, pode ser fatorada como produto de exatamente n fatores, a saber: $p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$, em que $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ são as raízes de p.*

Demonstração. Vamos demonstrar este corolário por indução sobre o grau n da função polinomial p. Quando $n = 1$, temos $p(z) = a_1 z + a_0$, com $a_1 \neq 0$, de maneira que p possui a raiz $z_1 = -a_0/a_1$ e pode ser escrito como $p(z) = a_1(z - z_1)$. Suponhamos que toda função polinomial $g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_{n-1}z^{n-1}$ de grau $n - 1$ possa ser fatorada como $g(z) = b_{n-1}(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_{n-1})$. Pelo TFA, existe $z_n \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_n) = 0$. Daí, pela Proposição 1, segue que existe uma função polinomial $g(z)$ de grau $n - 1$, tal que $p(z) = (z - z_n)g(z)$. Observe que

$$\begin{aligned} a_n z^n &+ \ldots + a_1 z + a_0 \\ &= (z - z_n)\left(b_{n-1}z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0\right) \\ &= b_{n-1}z^n + (b_{n-2} - z_n b_{n-1})z^{n-1} + \ldots\,. \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes de z^n, temos que $b_{n-1} = a_n \neq 0$. Como g tem grau $n - 1$, segue que $p(z) = (z - z_n)\cdot b_{n-1}\cdot(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_{n-1})$, ou seja, $p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$. □

Agradecimento. Os autores são muito gratos aos editores pelas correções e sugestões propostas para a versão final desta nota.

Referências

[1] AHLFORS, L. V. *Complex analysis: an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. 3.ed. New York: McGraw-Hill, 1979. (International Series in Pure and Applied Mathematics)

[2] CONWAY, J. B. *Functions of one complex variable, I*. 2.ed. New York: Springer, 1978. (Graduate Texts in Mathematics, 11)

[3] FERNANDEZ, C. S.; BERNARDES JR., N. C. *Introdução às funções de uma variável complexa*. 2.ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2008. (Coleção Textos Universitários)

[4] SEELEY, R. T. *Cálculo de uma variável*. Tradução de João Bosco Pitombeira de Carvalho. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1975.

[5] SOARES, M. G. *Cálculo em uma variável complexa*. Rio de Janeiro: IMPA, 1999. (Coleção Matemática Universitária)

Cecília S. Fernandez (gancsfz@vm.uff.br)
Raphael A. dos Santos (raphaelsantos08@hotmail.com)
Departamento de Análise, Instituto de Matemática
Universidade Federal Fluminense