Um método de resolução de equações polinomiais de grau 4

Edvalter da Silva Sena Filho [1]

UFPI

Apresentaremos aqui um método de resolução de equações de quarto grau, reduzindo-as a equações de segundo e terceiro grau. Se o método não for novo, certamente é de rara ocorrência na literatura.

Consideremos, primeiramente, uma equação do tipo

$$y^4 + Ky^3 + My^2 + Ry + L = 0$$

em que $LK^2 = R^2$. Caso tivéssemos $K = 0$, teríamos também $R = 0$: a equação seria biquadrada e fácil de resolver. Caso K seja não nulo, podemos escrever $L = \left(\frac{R}{K}\right)^2$. Se $R = 0$ então y^2 é fator trivial e o problema se reduz a uma equação de segundo grau. Se $R \neq 0$ então $y = 0$ não é solução e, dividindo-se por y^2, a equação pode ser escrita como

$$y^2 + Ky + M + \frac{R}{y} + \frac{R^2}{K^2y^2} = 0\,.$$

Esta equação, por sua vez, pode ser escrita como

$$\left(y + \frac{R}{Ky}\right)^2 + K\left(y + \frac{R}{Ky}\right) + \left(M - 2\frac{R}{K}\right) = 0\,.$$

Assim, fazendo $z = y + \frac{R}{Ky}$, reduzimos a equação à equação do segundo grau

$$z^2 + Kz + \left(M - 2\frac{R}{K}\right) = 0\,.$$

Uma vez resolvida essa equação (em z), obtemos os valores de y resolvendo a equação $z = y + \frac{R}{Ky}$, que é equivalente a uma (outra) equação do segundo grau em y.

Considere agora uma equação geral do quarto grau $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$. Fazemos uma substituição do tipo $x = y + t$, em que t é uma constante a determinar, de modo a cair numa equação do tipo discutido acima. Obtemos então

$$(y+t)^4 + A(y+t)^3 + B(y+t)^2 + C(y+t) + D = 0\,,$$

ou seja,

$$y^4 + Ky^3 + My^2 + Ry + L = 0\,,$$

com $K = 4t + A$, $M = 6t^2 + 3At + B$, $R = 4t^3 + 3At^2 + 2Bt + C$ e $L = t^4 + At^3 + Bt^2 + Ct + D$.

Queremos que $LK^2 = R^2$, isto é,

$$\begin{aligned}(t^4 + At^3 + Bt^2 + Ct + D)\cdot(4t+A)^2 \\ = (4t^3 + 3At^2 + 2Bt + C)^2\,.\end{aligned}$$

Desenvolvendo os dois lados da equação e simplificando, resulta a equação

$$\begin{aligned}(8C + A^3 - 4AB)t^3 + (16D + 2AC + A^2B - 4B^2)t^2 \\ +(8AD + A^2C - 4BC)t + A^2D - C^2 = 0\,.\end{aligned}$$

Esta é uma equação de grau no máximo 3, que pode, portanto, ser resolvida com o auxílio da fórmula de Cardano-Tartaglia, desde que os coeficientes dos termos não constantes não se anulem simultaneamente. Caso esses coeficientes se anulem simultaneamente, tem-se, em particular,

$$8C + A^3 - 4AB = 8AD + A^2C - 4BC = 0\,,$$

de que resulta

$$\begin{aligned}0 &= A(8AD + A^2C - 4BC) - C(8C + A^3 - 4AB) \\ &= 8(A^2D - C^2)\,.\end{aligned}$$

Mas isso quer dizer que também o coeficiente do termo constante se anula, e a igualdade vale para qualquer t. Assim, em qualquer caso, podemos resolver a equação.

Agradecimentos. Gostaria de agradecer ao apoio do amigo e colega Ailton Campos, e ao editor Carlos Gustavo Moreira, que me ajudou na redação desta nota.

Edvalter da Silva Sena Filho
edvalter.filho@hotmail.com

[1] Estudante do Bacharelado em Matemática da UFPI.