Artigo

Ordens de contato entre aplicações

Marcelo Polezzi (UEMS)
Claudemir Aniz (UFMS)

Neste artigo[1], motivaremo-nos pelo seguinte problema:

> Dadas duas aplicações contínuas $f, g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, obter uma condição suficiente (e não trivial) para que $\text{Graf}(f) \cap \text{Graf}(g) \neq \emptyset$, em que $\text{Graf}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}^m\}$.

Daremos uma solução parcial para o caso unidimensional, relacionaremos o problema com o Teorema de Sharkovskii, no caso particular em que $m = 1$ e $g = id$, e discutiremos resultados que apontam na direção contrária, em outras situações.

Períodos e ordens de contato

Denotaremos por $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ o conjunto dos números naturais. Para $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, definimos $f^1 = f$ e $f^n = f \circ f^{n-1}$, para todo natural $n \geq 2$. Diremos que o ponto $a \in \mathbb{R}^m$ é um *ponto periódico* de f com período $n \geq 1$ quando n for o menor natural tal que $f^n(a) = a$. Além disso, se $n = 1$ dizemos que a é um *ponto fixo* de f. Seja

$$\text{Per}_n(f)$$

o conjunto dos pontos periódicos de f com período n e

$$\text{Fix}(f)$$

o conjunto dos pontos fixos de f. Seja também

$$\text{Per}(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{Per}_n(f) \neq \emptyset\},$$

que é o conjunto dos *períodos* que ocorrem em f.

Dado um par de funções $f, g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, dizemos que a é um *ponto de contato de ordem n entre f e g*, se n é o menor natural tal que $f^n(a) = g^n(a)$. O conjunto desses pontos será denotado por

$$\text{Con}_n(f, g).$$

Seja também

$$\text{Con}(f, g) = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{Con}_n(f, g) \neq \emptyset\},$$

que é o conjunto de todas as *ordens de contato* entre f e g.

Note que um ponto periódico (de período n) de f é um ponto de contato (de ordem n) entre f e *id*.

Finalmente, dentro dessas definições, consideraremos a possibilidade de pontos de contato coincidirem com pontos periódicos. Seja

$$\text{Per}_n(f, g)$$

o conjunto dos pontos $a \in \mathbb{R}^m$ tais que n é o menor natural tal que $f^n(a) = a = g^n(a)$ e defina

$$\text{Per}(f, g) = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{Per}_n(f, g) \neq \emptyset\}.$$

Uma solução para o caso unidimensional

Para o caso em que $m = 1$ e g é a função identidade, nosso problema tem a seguinte solução.

Proposição 1. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $Per_n(f) \neq \emptyset$ para algum $n \geq 2$, então $Fix(f) \neq \emptyset$.*

A demonstração é uma aplicação direta do Teorema de Bolzano. Se f não tiver ponto fixo então ou $f(x) > x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ou $f(x) < x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Tomemos o primeiro caso, sem perda de generalidade. Por indução, mostra-se facilmente que $f^n(x) > x$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e qualquer $n \in \mathbb{N}$. Então não pode haver x e n tal que $f^n(x) = x$.

Essa proposição pode ser generalizada para ordens de contato, se a segunda função g for não decrescente.

Teorema 2. *Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas, com g não decrescente. Se $Con_n(f, g) \neq \emptyset$ para algum $n \geq 2$ então também $Con_1(f, g) \neq \emptyset$.*

[1] Este artigo é uma versão adaptada da referência [9].

Demonstração. Como g é não decrescente, então o mesmo vale para todas as suas iteradas g^i, $i \geq 2$. Suponha que $\mathrm{Con}_1(f,g) = \emptyset$. Pelo Teorema de Bolzano, concluímos que ou $f(x) > g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou $f(x) < g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. No primeiro caso, teremos $g^n(x) \leq g^{n-1}(f(x)) = g^{n-2}(g(f(x))) \leq g^{n-2}(f^2(x)) = g^{n-3}(g(f^2(x))) \leq g^{n-3}(f^3(x)) \leq \cdots \leq g(f^{n-1}(x)) < f^n(x)$. Ou seja, $g^n(x) < f^n(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, o que é uma contradição, pois $\mathrm{Con}_n(f,g) \neq \emptyset$. Analogamente, a suposição de que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ irá também conduzir a uma contradição. Portanto $\mathrm{Con}_1(f,g) \neq \emptyset$. □

O Teorema de Sharkovskii

A Proposição 1 pode também ser vista como um caso muitíssimo particular do Teorema de Sharkovskii. Antes de enunciarmos esse teorema, vamos dar mais algumas definições.

Chamemos de $\alpha(n)$ o expoente da maior potência de 2 que divide n. Por exemplo, se $n = 40$, então $\alpha(40) = 3$. Agora consideremos os conjuntos $2\mathbb{N} = \{2,4,6,\ldots\}$, $2\mathbb{N}+1 = \{3,5,7,9,\ldots\}$ e $2^{\mathbb{N}} = \{2,4,8,16,\ldots\}$, e vamos construir uma *relação de ordem total* em $\mathbb{N}$, representada pelo símbolo $\prec$. Dados $a \neq b$, a *ordem de Sharkovskii* é definida de forma que $a \prec b$ se e somente se uma das condições é satisfeita:

$$\begin{array}{rcl} a \in 2\mathbb{N}+1 & e & b \in 2\mathbb{N} \\ a,b \in 2\mathbb{N}+1 & e & a < b \\ a \in 2\mathbb{N} \setminus 2^{\mathbb{N}} & e & b \in 2^{\mathbb{N}} \\ a,b \in 2\mathbb{N} \setminus 2^{\mathbb{N}} & e & \alpha(a) < \alpha(b) \\ a,b \in 2\mathbb{N} \setminus 2^{\mathbb{N}} & e & \alpha(a) = \alpha(b), a < b \\ a,b \in 2^{\mathbb{N}} & e & \alpha(a) > \alpha(b) \\ b = 1 & & \end{array}$$

Agora, denotando por $n \preceq p$ quando $n \prec p$ ou $n = p$, temos claramente que (i) $a \preceq a$, (ii) $a \preceq b$ e $b \preceq a$ implica $a = b$ e (iii) $a \preceq b$ e $b \preceq c$ implica $a \preceq c$, para quaisquer $a,b,c \in \mathbb{N}$. Com isso, o conjunto dos números naturais, ordenado pela ordem de Sharkovskii, é dado por $3 \prec 5 \prec 7 \prec 9 \prec \cdots \prec 2\cdot 3 \prec 2\cdot 5 \prec 2\cdot 7 \prec 2\cdot 9 \prec \cdots \prec 2^2\cdot 3 \prec 2^2\cdot 5 \prec 2^2\cdot 7 \prec 2^2\cdot 9 \prec \cdots\cdots\cdots \prec 2^4 \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1$.

O Teorema de Sharkovskii (veja, por exemplo, [2], [3], [4] e [7]) é um resultado notável em sistemas dinâmicos discretos.

Teorema 3 (Teorema de Sharkovskii)**.** *(a) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $Per_n(f) \neq \emptyset$ e $n \prec p$, então $Per_p(f) \neq \emptyset$. ([10])*

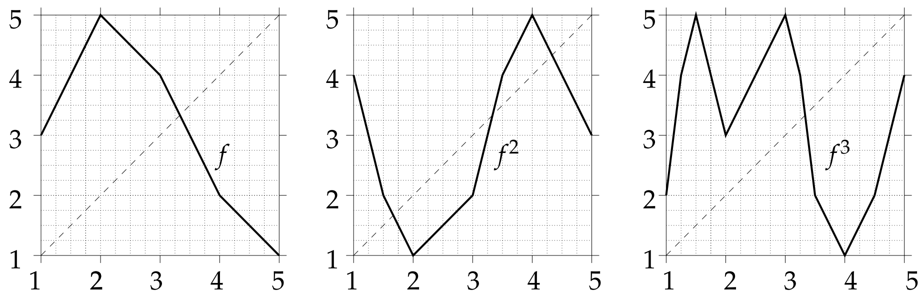
(b) Considere o conjunto $S(n) = \{p \in \mathbb{N} \mid n \preceq p\}$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe uma função contínua $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $Per(f_n) = S(n)$. Além disso, existem funções contínuas $g,h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $Per(g) = 2^{\mathbb{N}} \cup \{1\}$ e $Per(h) = \emptyset$. ([11])

Façamos agora algumas observações sobre o significado e as implicações desse belo teorema.

I. A primeira parte diz, em particular, que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem um ponto periódico de período 3 então obrigatoriamente tem pontos periódicos com período n, para todo natural n. Ou seja, se $3 \in \mathrm{Per}(f)$ então $\mathrm{Per}(f) = \mathbb{N}$. Esse corolário é conhecido como o Teorema de Li-Yorke, devido a Tien-Y. Li e James A. Yorke, que foi publicado em 1975 ([6]), *onze anos* depois de Alexander N. Sharkovskii ter publicado seu artigo em russo ([10]).

À época, não era tão raro descobrir-se que um resultado original já havia sido publicado na União Soviética, pois os artigos em russo não eram lidos e disseminados no ocidente. Yorke soube disso, em relação a seu trabalho, alguns anos após tê-lo publicado, quando teve um encontro inusitado com o próprio Sharkovskii, em Berlim, onde estava sendo realizado um congresso internacional. Sharkovskii o abordou durante um passeio de bote, tentando se fazer compreender, sem sucesso, por meio de gestos. Com a ajuda de um amigo polonês, Yorke compreendeu que Sharkovskii queria lhe dizer que seu resultado era apenas um pequeno corolário do teorema que ele já havia provado mais de uma década antes. Ao final, Sharkovskii se recusou a dar mais detalhes, mas se comprometeu a lhe enviar o artigo.

II. Um exemplo da segunda parte do teorema (veja [6]) é o fato de que existem funções com pontos periódicos de período 5 que, no entanto, não possuem pontos periódicos de período 3. Para isso, consideremos



a função $f : [1,5] \to [1,5]$, definida de forma tal que $f(1) = 3$, $f(3) = 4$, $f(4) = 2$, $f(2) = 5$ e $f(5) = 1$, e que seja afim em cada intervalo $[n, n+1]$, $1 \le n \le 4$ (se o leitor quiser uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, basta estender com $f(x) = 3$ se $x \le 1$ e $f(x) = 1$ se $x \ge 5$). Obviamente $1 \in \mathrm{Per}_5(f)$. Além disso, é fácil checar que existe um único ponto x_0 tal que $f^3(x_0) = x_0$, e que o mesmo está no intervalo $[3,4]$ (veja a figura, ilustrando f, f^2 e f^3). No entanto, nesse intervalo temos que $f(x) = 10 - 2x$, e daí $f(\frac{10}{3}) = \frac{10}{3}$. Logo $x_0 = \frac{10}{3}$, implicando que $\mathrm{Per}_3(f) = \emptyset$.

III. Outra observação é que $\mathrm{Per}(f)$ é um conjunto *finito* se e somente se $\mathrm{Per}(f) = \emptyset$, $\mathrm{Per}(f) = \{1\}$ ou $\mathrm{Per}(f) = S(2^n)$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

IV. A melhor estratégia para se demonstrar a primeira parte do teorema é a observação de que é *suficiente* provar que

(i) se, para um natural $m > 2$, tivermos $m \in \mathrm{Per}(f)$ então $2 \in \mathrm{Per}(f)$;

(ii) se, para um natural ímpar $m \ge 3$, tivermos $m \in \mathrm{Per}(f)$, então $n \in \mathrm{Per}(f)$ para todo $n > m$;

(iii) se, para um natural ímpar $m \ge 3$, tivermos $m \in \mathrm{Per}(f)$, então $2\mathbb{N} \subset \mathrm{Per}(f)$.

A veracidade dos itens (i), (ii) e (iii) foi demonstrada por P. D. Straffin Jr. em [12]. No entanto, Bau-Sen Du ([3]) deu uma demonstração mais simples, na qual (ii) e (iii) são provados simultaneamente e (i) é provado de maneira diferente das já conhecidas até então (veja [1] e [12]).

V. Para a demonstração da segunda parte do Teorema de Sharkovskii é necessário que se faça o estudo de pontos periódicos de funções chamadas *trapezoidais*, construídas por meio de *funções do tipo tenda*. Um exemplo de tal tipo de função é $f(x) = 1 - |2x - 1|$ para $0 \le x \le 1$ e $f(x) = 0$, caso contrário. Duas boas referências para esse resultado são os artigos de Saber Elaydi ([4]) e de Bau-Sen Du ([3]).

Observação. A fim de satisfazer a curiosidade do leitor interessado, e até mesmo despertar no mesmo a admiração pela beleza das ideias envolvidas, daremos uma demonstração do Teorema de Li-Yorke no final deste artigo, como um apêndice.

O seguinte resultado, devido a Kannan, Saradhi e Seshasai ([5]) mostra que qualquer generalização do Teorema de Sharkovskii para dimensões mais altas tem que ser mais sutil.

Teorema 4. *Sejam $m \ge 2$ um número natural fixado e $S \subset \mathbb{N}$ um dado subconjunto dos naturais. Então existe uma aplicação contínua $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ tal que $\mathrm{Per}(f) = S$.*

Isso nos diz, em particular, que um análogo da Proposição 1 não vale para $m \ge 2$.

O seguinte contra-exemplo bidimensional mostra o mesmo, diretamente. Seja $f(x,y) = (-x, y + x^2 - 1)$ um difeomorfismo do plano. Como $f^n(x,y) = ((-1)^n x, y + n(x^2 - 1))$, vemos facilmente que $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$ e $\mathrm{Per}_2(f) = \{(1,y), (-1,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Mais ainda, $\mathrm{Per}_{2n-1}(f) = \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $\mathrm{Per}_{2n}(f) = \emptyset$, para todo natural $n \ge 2$, porque todos os pontos que satisfazem $f^{2n}(x) = x$ de fato satisfazem $f^2(x) = x$. Portanto $\mathrm{Per}(f) = \{2\}$.

Ordens de contato

O Teorema de Sharkovskii diz, em particular, que o conjunto $\mathrm{Con}(f, id)$ não pode ser igual a um dado subconjunto *arbitrário* dos naturais, para $m = 1$. O Teorema 4 diz que $\text{Con}(f, id)$ pode ser qualquer subconjunto dos naturais, se f for bem escolhida, em dimensão maior do que 1. Resta então a pergunta sobre o que pode ser $\text{Con}(f,g)$ no caso unidimensional.

De início, podemos apresentar exemplos em que $\text{Con}(f,g)$ é um subconjunto dos naturais não previsto pelo Teorema de Sharkovskii. Nos três exemplos a seguir, que são de fácil verificação, $S = \text{Con}(f,g)$ é um conjunto para o qual não existe f contínua tal que $\text{Con}(f, id) = S$.

Exemplo 1. *Sejam $f(x) = -x$ e $g(x) = -x+1$. Temos, claramente, que $Graf(f) \cap Graf(g) = \emptyset$ e que $f^2 = id = g^2$. Logo $Con(f,g) = \{2\}$ e $Con_2(f,g) = \mathbb{R}$.*

Exemplo 2. *Sejam $f(x) = x+1$ e $g(x) = -x+1$. Então $Con_{2n-1}(f,g) = \{x = 1-n\}$ e $Con_{2n}(f,g) = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Desta forma, $Con(f,g) = 2\mathbb{N} - 1$.*

Exemplo 3. *Sejam $f(x) = -x+2$ e $g(x) = -|x|+1$. Então $Con_2(f,g) = [0,1]$, $Con_3(f,g) = \{x = 3/2\}$ e $Con_n(f,g) = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{2,3\}$. Assim, $Con(f,g) = \{2,3\}$.*

Esses exemplos nos motivaram a ponderar sobre todas as possibilidades para o conjunto $\text{Con}(f,g)$. Descobrimos então, para nossa surpresa, que $\text{Con}(f,g)$ pode surgir como qualquer subconjunto dos números naturais, independentemente da dimensão. Isso é o que diz o teorema seguinte, cuja demonstração pode ser encontrada em nosso artigo [8].

Teorema 5. *Sejam $m \geq 1$ um número natural fixado e $S \subset \mathbb{N}$ um dado subconjunto dos naturais. Então existem aplicações contínuas $f, g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ tais que $Con(f,g) = S$ e $Con_n(f,g) = Per_n(f,g)$ para todo $n \in S$.*

De fato, o teorema diz até um pouco mais, porque garante que os pontos de contato sejam simultaneamente periódicos, com período igual à ordem de contato.

Cabe aqui observar que, em geral, os conjuntos $\text{Con}_n(f,g)$ e $\text{Per}_n(f,g)$ podem ser bem diferentes. A título de exemplo, sejam $f,g : [1,4] \to [1,4]$ tais que $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $f(4) = 1$, $g(1) = 2$, $g(2) = 4$, $g(3) = 1$, $g(4) = 3$ e, em cada intervalo $[n, n+1]$, $n = 1,2,3$, f e g são afins. Temos então que $\{1,2,3,4\} \subset \text{Per}_4(f,g)$, enquanto que $1 \in \text{Con}_1(f,g)$, $2 \in \text{Con}_3(f,g)$ e $\{3,4\} \subset \text{Con}_4(f,g)$. De fato, dado $n \in \{1,2,3,4\}$, temos que $f^j(n) \neq n \neq g^j(n)$, para $j < 4$, e $f^4(n) = n = g^4(n)$. Logo $\{1,2,3,4\} \subset \text{Per}_4(f,g)$. Temos também que $f(1) = 2 = g(1)$, e daí $1 \in \text{Con}_1(f,g)$. Além disso, $f^j(2) \neq g^j(2)$ para $j < 3$ e $f^3(2) = 1 = g^3(2)$, o que implica $2 \in \text{Con}_3(f,g)$. Finalmente, para $n = 3$ e $n = 4$ temos $f^j(n) \neq g^j(n)$ se $j < 4$. No entanto, como $f^4(n) = n = g^4(n)$ para $n = 1,2,3,4$, concluímos que $\{3,4\} \subset \text{Con}_4(f,g)$.

A essência da demonstração do Teorema 5 reside na construção de pares de funções contínuas $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possuindo as propriedades desejadas. Para isso, fazemos uso de funções auxiliares, entre as quais estão $f_n, g_n : [1, 2n] \to [1, 2n]$, com $n \geq 2$, dadas por

$$f_n(x) = n + |x - n|$$

e

$$g_n(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ se } 1 \leq x \leq n-1 \\ (n-x)(n-1) + 1 \text{ se } n-1 \leq x \leq n \\ 1 \text{ se } n \leq x \leq 2n \end{cases}$$

Naturalmente, f_n e g_n são contínuas para cada $n \in \mathbb{N}$. Além disso, não é difícil mostrar que $\text{Con}(f_n, g_n) = \{n\}$ e $\text{Con}_n(f_n, g_n) = \{x = n\}$.

Apêndice: o Teorema de Li-Yorke

Teorema 6 (Teorema de Li-Yorke ([6]))**.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponha que exista um ponto $a \in \mathbb{R}$ para o qual os pontos $b = f(a)$, $c = f^2(a)$ e $d = f^3(a)$ satisfaçam $d \leq a < b < c$ (ou $d \geq a > b > c$). Então $Per(f) = \mathbb{N}$.*

Não é difícil mostrar que se $x_0 \in \text{Per}_3(f)$ então os pontos x_0, $f(x_0)$ e $f^2(x_0)$ podem ser ordenados de modo a satisfazerem uma das duas condições do teorema (com $d = a$ igual a um dos pontos). Portanto, em particular, a existência de um ponto periódico de período 3 garante a existência de pontos periódicos de todos os períodos.

Para provarmos o teorema, vamos primeiro enunciar três lemas de caráter técnico, que são decorrentes do Teorema do Valor Intermediário. O leitor poderá encontrar as respectivas demonstrações em [6].

Lema 7. *Sejam $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e I um intervalo. Para qualquer intervalo compacto $J \subset G(I)$ existe um intervalo compacto $I_1 \subset I$ tal que $G(I_1) = J$.*

Esse Lema 7 não é usado diretamente para provar o Teorema de Li-Yorke, mas é essencial para demonstrar o lema abaixo.

Lema 8. *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de intervalos compactos, com $I_{n+1} \subset f(I_n)$, para todo $n \geq 0$. Então existe uma sequência de intervalos compactos Q_n tais que $Q_{n+1} \subset Q_n \subset I_0$ e $f^n(Q_n) = I_n$ para todo $n \geq 0$.*

Lema 9. *Sejam $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e I um intervalo compacto tal que $I \subset G(I)$. Então existe um ponto $p \in I$ tal que $G(p) = p$.*

Agora podemos demonstrar o Teorema de Li-Yorke. Faremos a prova para o caso $d \leq a < b < c$, sendo o outro caso análogo.

Seja $k \in \mathbb{N}$ um natural qualquer. Caso $k = 1$, defina $I_n = [b, c]$, para todo $n \geq 0$. Caso contrário, defina a sequência de intervalos compactos $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ dada por $I_n = [b, c]$ para $0 \leq n \leq k-2$, $I_{k-1} = [a, b]$ e $I_{k+n} = I_n$ para $n \geq 0$. Como $f([b, c]) \supset [b, c]$, $f([a, b]) \supset [b, c]$ e $f([b, c]) \supset [a, b]$, temos que $I_{n+1} \subset f(I_n)$, para todo $n \geq 0$. Então, pelo Lema 8, existe uma sequência de intervalos compactos Q_n tais que $Q_{n+1} \subset Q_n \subset [b, c]$ e $f^n(Q_n) = I_n$, para todo $n \geq 0$. Logo $Q_k \subset Q_0 = [b, c]$ e $f^k(Q_k) = I_k = I_0 = [b, c] \supset Q_k$. Daí, pelo Lema 9, f^k tem um ponto fixo $p_k \in Q_k$.

No entanto, p_k não pode ser um ponto periódico de f com período menor do que k. De fato, suponha que $p_k \in \mathrm{Per}_j(f)$, com $j < k$. Neste caso, teríamos $O_f(p_k) = \{p_k, f(p_k), \ldots, f^{j-1}(p_k)\} \subset [b, c]$, pois $f^n(Q_n) = I_n$, para todo $n \geq 0$ e $I_n = [b, c]$ para $0 \leq n \leq k-2$. Por outro lado, $f^{k-1}(p_k) \in I_{k-1} = [a, b]$, e então seria preciso que tivéssemos $f^{k-1}(p_k) = b$. Daí, $f^k(p_k) = f(b) = c$, o que implicaria $f^{k+1}(p_k) = f(c) = d \leq a \notin [b, c]$, que é uma contradição.

Referências

[1] BARTON, R.; BURNS, K. A simple special case of Sharkovskii's theorem. *American Mathematical Monthly*, v. 107, n. 10, p. 932–933, 2000.

[2] BHATIA, N. P.; EGERLAND, W. O. New proof and extension of Sarkovskii's theorem. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, Special Volume, Part I, p. 53–67, 1996.

[3] DU, B.-S. A simple proof of Sharkovsky's theorem. *American Mathematical Monthly*, v. 111, n. 7, p. 595–599, 2004.

[4] ELAYDI, S. On a converse of Sharkovsky's theorem. *American Mathematical Monthly*, v. 103, n. 5, p. 386–392, 1996.

[5] KANNAN, V.; SARADHI, P. V. S. P.; SESHASAI, S. P. A generalization of Sarkovskii's theorem to higher dimensions. *Journal of National Academy of Mathematics, India*, v. 11, p. 69–82, 1997.

[6] LI, T.-Y.; YORKE, J. A. Period three implies chaos. *American Mathematical Monthly*, v. 82, n. 10, p. 985–992, 1975.

[7] LÓPEZ JIMENEZ, V.; SNOHA, L. All maps of type 2^{∞} are boundary maps. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 125, n. 6, p. 1667–1673, 1997.

[8] POLEZZI, M.; ANIZ, C. A Sarkovskii-type theorem for pairs of maps. *Far East Journal of Dynamical Systems*, v. 7, n. 1, p. 65–75, 2005.

[9] POLEZZI, M.; ANIZ, C. A topological invariant for pairs of maps. *Central European Journal of Mathematics*, v. 4, n. 2, p. 294–303, 2006.

[10] SHARKOVSKII, A. N. Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself. Translated from the Russian [Ukrain. Math. Zh., v. 16, n. 1, p. 61–71, 1964]. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, v. 5, p. 1263–1273, 1995.

[11] SHARKOVSKII, A. N. On cycles and the structure of a continuous map. (In Russian). *Ukrainïns'kiĭ Matematichniĭ Zhurnal*, v. 17, n. 3, p. 104–111, 1965.

[12] STRAFFIN JR., P. D. Periodic points of continuous functions. *Mathematics Magazine*, v. 51, n. 2, p. 99–105, 1978.

Claudemir Aniz
caniz@dmt.ufms.br