Uma maneira simples de se demonstrar que gama de meio é raiz de Pi

Rodrigo Marín[1]

Universidad de Santiago de Chile

A *função gama* $\Gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ se define, para $p > 0$ não necessariamente inteiro, por

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx \,. \tag{1}$$

É um exercício dos cursos de cálculo mostrar que essa integral está bem definida, para todo $p > 0$ (pois o decrescimento exponencial sempre domina o crescimento polinomial).

A função gama tem uma propriedade recursiva notável. Para todo $p > 0$, mediante integração por partes,

$$\begin{aligned} \Gamma(p) &= \left[\frac{x^p e^{-x}}{p}\right]_0^\infty + \frac{1}{p}\int_0^\infty x^p e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{p} \cdot \Gamma(p+1)\,, \end{aligned} \tag{2}$$

isto é,

$$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)\,. \tag{3}$$

Em particular, como $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$, a recorrência (3) implica

$$\Gamma(n) = (n-1)!\,, \tag{4}$$

para todo inteiro n positivo.

Nesta nota, demonstraremos que

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\,, \tag{5}$$

o que permite calcular imediatamente, usando (3), todos os valores $\Gamma(n + \frac{1}{2})$, com $n \geqslant 0$.

A demonstração da igualdade (5) será feita apenas com as ferramentas usuais dos dois ou três primeiros semestres dos cursos de cálculo.

[1] O autor foi orientado por seu professor, Rafael Labarca, na redação deste artigo.

A função beta

Para demonstrar (5), usaremos como auxílio outra função famosa, a *função beta*. Após sua definição, estabeleceremos a relação entre essa função e a função gama.

A função beta toma pares (u, v) de números positivos e leva a valores reais, pela fórmula

$$\beta(u,v) = \int_0^\infty \frac{x^{u-1}}{(1+x)^{u+v}} dx\,. \tag{6}$$

Mostrar a convergência da integral para $u > 0$ e $v > 0$ é também um exercício de cálculo (note que perto de zero o integrando diverge apenas se $u < 1$, mas dominado por uma potência com expoente entre -1 e 0; o que notadamente implica a convergência da integral; e que perto de infinito a convergência é garantida porque a potência dominante do denominador é estritamente maior do que a potência do numerador mais um).

Pela substituição de variáveis $x = \frac{y}{1-y}$ se chega a

$$\beta(u,v) = \int_0^1 y^{u-1}(1-y)^{v-1} dy\,, \tag{7}$$

que é outra forma como a função beta é conhecida (ou definida).

Lema 1. *Para quaisquer $u > 0$ e $v > 0$,*

$$\beta(u,v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}\,. \tag{8}$$

Demonstração. Em primeiro lugar, notemos o que faz a substituição de variáveis $x = ay$, para $a > 0$, na integral (1) que define a função gama. É fácil ver que obtemos

$$\Gamma(p) = a^p \int_0^\infty y^{p-1} e^{-ay} dy\,, \tag{9}$$

para qualquer $p > 0$. Isto nos dá uma maneira alternativa para escrevermos a potência negativa de um número positivo a:

$$a^{-p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} dx\,. \tag{10}$$

Em seguida tomamos como ponto de partida a própria definição da função beta em (6) para obter

$$\begin{aligned}
&\Gamma(u+v)\beta(u,v)\\
&= \Gamma(u+v)\int_0^\infty \frac{y^{u-1}}{(1+y)^{u+v}}dy \qquad (11)\\
&= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty x^{u+v-1}y^{u-1}e^{-(1+y)x}dx\right] dy\,,
\end{aligned}$$

sendo que na passagem entre a segunda e a terceira linhas aplicamos a fórmula (10) com $a = 1+y$ e $p = u+v$ ao denominador da integral. A integral iterada da terceira linha é finita (pois é igual a $\beta(u,v)$) e tem integrando positivo, logo, pelo Teorema de Fubini, podemos mudar a ordem de integração, obtendo

$$\begin{aligned}
&\Gamma(u+v)\beta(u,v)\\
&= \int_0^\infty x^{u+v-1}\left[\int_0^\infty y^{u-1}e^{-(1+y)x}dy\right] dx\,.
\end{aligned} \qquad (12)$$

Chamemos de Y a integral interna $\int_0^\infty y^{u-1}e^{-(1+y)x}dy$ de (12). Fazendo a substituição de variáveis $t = xy$, obtemos

$$Y = x^{-u}e^{-x}\int_0^\infty t^{u-1}e^{-t}dt = x^{-u}e^{-x}\Gamma(u)\,. \qquad (13)$$

Inserindo (13) em (12), resulta

$$\begin{aligned}
\beta(u,v) &= \frac{\Gamma(u)}{\Gamma(u+v)}\int_0^\infty x^{v-1}e^{-x}dx\\
&= \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}\,,
\end{aligned} \qquad (14)$$

como queríamos demonstrar. □

Cálculo de gama em meio

Sabemos que a área delimitada por uma semicircunferência de raio $\frac{1}{2}$ é $\frac{\pi}{8}$. A equação de uma tal semicircunferência, centrada em $(\frac{1}{2},0)$, é

$$(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}\,, \qquad (15)$$

implicando que sua área é a integral, no intervalo $[0,1]$, da função $y = \sqrt{x(1-x)}$. Portanto

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{8} &= \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\\
&= \int_0^1 x^{\frac{3}{2}-1}(1-x)^{\frac{3}{2}-1}dx \qquad (16)\\
&= \beta(\frac{3}{2},\frac{3}{2})\,.
\end{aligned}$$

Usando (8), (3) e (4), chegamos em

$$\frac{\pi}{8} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^2}{8}\,, \qquad (17)$$

de onde resulta a igualdade procurada.

Rodrigo Marín
rodrigo.marin@usach.cl