

INTRODUÇÃO À TRANSFORMADA DE RADON

Antônio Sá Barreto

Purdue University

1 Introdução

O propósito deste artigo é apresentar ao estudante de graduação técnicas de equações a derivadas parciais e de geometria integral por meio de um tópico relativamente simples, mas ao mesmo tempo bastante interessante e moderno. Esse tópico possibilitará ao aluno um primeiro contato com um assunto de grande interesse em matemática, que começou a ser desenvolvido no século XX e que ainda desperta interesse de muitos pesquisadores. O pré-requisito para se ler estas notas é um bom conhecimento de cálculo avançado. Familiaridade com propriedades de funções de uma variável complexa é desejável, mas não essencial.

Este artigo é baseado nas notas de aulas de minicursos sobre as Transformadas de Radon e problemas inversos que tive a oportunidade de ministrar durante duas edições do Simpósio em Teorias Espectral e de Espalhamento, realizadas em Recife e Serrambi, de 11 a 15 de agosto de 2003 e de 11 a 15 de agosto de 2008. Registro aqui meus agradecimentos à CAPES, ao Clay Mathematics Institute, ao CNPq, à FACEPE, à FINEP, ao Instituto do Milênio, à International Mathematical Union, à National Science Foundation e à Universidade Federal de Pernambuco, que patrocinaram esses encontros.

Em seu famoso artigo [16], de 1917, Johann Radon definiu a seguinte aplicação: dada uma função contínua no espaço \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, de suporte compacto – isto é, existe $C > 0$ tal que $f(x) = 0$ para $|x| \geq C$ – e um hiperplano H (dimensão $n - 1$), tome a integral da função f ao longo de H . Além dessa transformada, po-

demos definir outras análogas, em que integra-se sobre variedades lineares de dimensão $1, 2, 3, \dots, n - 1$. Por exemplo, em dimensão $n = 3$, podemos definir as transformadas utilizando integrais sobre retas ou planos. A transformada em que se integra sobre retas leva o nome de Transformada Raio-X.

Consideremos primeiramente o caso $n = 2$. Neste caso, os hiperplanos são retas e a Transformada de Radon coincide com a Transformada Raio-X. Será útil trabalhar com uma parametrização conveniente das retas. Qualquer reta $L \subset \mathbb{R}^2$ é dada por uma equação

$$\langle x, \omega \rangle = s,$$

em que $x = (x_1, x_2)$ e $\langle x, \omega \rangle = x_1\omega_1 + x_2\omega_2$. Note que $L = L(\omega, s) = L(-\omega, -s)$ é perpendicular a ω e, se $|\omega| = 1$, está a uma distância $|s|$ da origem (ver a figura 1). Mais precisamente, a Transformada de Radon no plano será definida por

$$\mathcal{R}f(\omega, s) = \int_{\langle x, \omega \rangle = s} f \, d\ell, \quad |\omega| = 1, s \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Essa é uma aplicação que transforma funções de (x_1, x_2) em funções de (ω, s) .

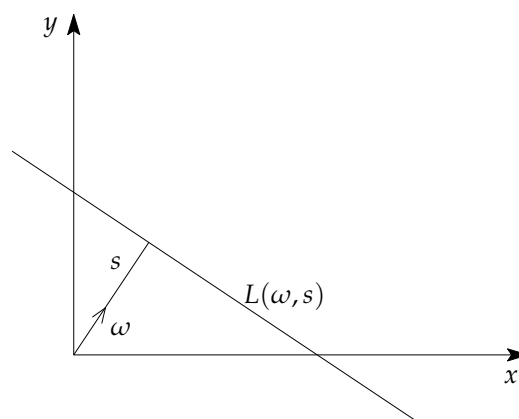


Figura 1: $L(\omega, s) = \{x = (x_1, x_2) : \langle x, \omega \rangle = s\}$, com $s \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \mathbb{S}^1$.

Na verdade, vamos demonstrar que

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : C_0^0(\mathbb{R}^2) &\longrightarrow C_0^0(S^1 \times \mathbb{R}) \\ f &\longmapsto \mathcal{R}f \end{aligned} \quad (1.2)$$

leva uma função contínua de suporte compacto em \mathbb{R}^2 em uma função contínua de suporte compacto em $S^1 \times \mathbb{R}$. Há várias perguntas naturais sobre essa aplicação:

- 1) \mathcal{R} é injetiva?
- 2) Qual é a imagem de \mathcal{R} ?
- 3) É possível se encontrar uma fórmula para a inversa de \mathcal{R} ?

Também é fácil de se ver que se $f(x) = 0$ para todo x com $|x| \geq \rho$ então $\mathcal{R}f(\omega, s) = 0$ para $|s| \geq \rho$ (ver a figura 2). Uma pergunta natural e muito importante é se a recíproca é verdadeira. Ou seja,

- 4) Se $\mathcal{R}f(\omega, s) = 0$ para $|s| \geq \rho$ e para todo $\omega \in S^1$, é verdade que $f(x) = 0$ para todo x tal que $|x| \geq \rho$?

Provavelmente o leitor está se perguntando por que Radon iria se preocupar com uma coisa dessas. Eu não sei e nem tenho certeza de que Radon tinha de fato um propósito para estudar essas perguntas. Fritz John escreve em [12] que o interesse de Radon por essas questões foi motivado por problemas em mecânica do contínuo, mas não dá detalhes. Entretanto, desde o final dos anos 50, as Transformadas de Radon têm sido aplicadas em muitos problemas práticos e, hoje, é um tópico de grande interesse. Nosso objetivo é procurar entender rigorosamente as propriedades dessa transformada.

2 Aplicação da Transformada Raio-X à medicina: uma breve introdução à tomografia

A tomografia é uma das tecnologias de maior sucesso em medicina. Há vários tipos de tomografia e, pelo menos uma delas, a tomografia clássica, segundo Barret e Swindell ([1]), é baseada na transformada de Radon. A ideia básica desse procedimento, que primeiro foi discutida em [4], é a seguinte.

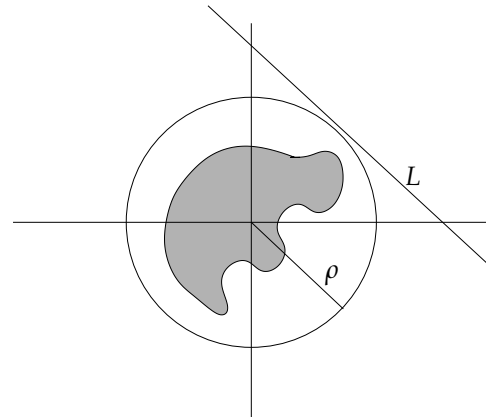


Figura 2: Como $f = 0$ fora da região escura, então $\mathcal{R}f(\omega, s) = 0$ quando $|s| \geq \rho$.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um objeto no espaço \mathbb{R}^n ($n = 2$ ou 3 são os casos que interessam na prática). Seja L uma reta no \mathbb{R}^n e suponha que um raio-X é direcionado a Ω ao longo da reta L (ver a figura 3). Sejam I_0 e I_1 as intensidades do raio-X antes de penetrar em Ω e depois de sair de Ω , respectivamente. Um modelo físico relaciona a intensidade I do raio-X e a distância ℓ ao longo da reta por meio da equação

$$\frac{dI}{d\ell} = -f(\ell)I,$$

em que $f(\ell)$ é chamado de *coeficiente de absorção*. Integrando esta equação ao longo da reta L , temos

$$\log \left(\frac{I_0}{I_1} \right) = \int_L f d\ell.$$

Como foi descrito acima, pode-se medir I_1 e I_0 e dessa forma se mede $\int_L f d\ell$ para todas as retas L . A pergunta é se podemos determinar f a partir desse dado. Esse é exatamente o mesmo problema estudado por Radon.

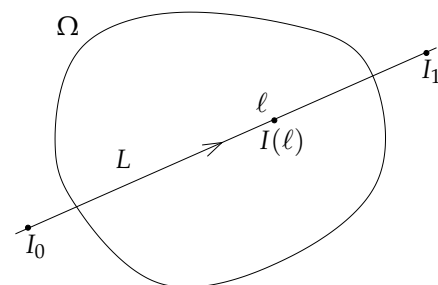


Figura 3: Raios-X incidente e emergente.

A aplicação dessa ideia é imediata. O médico deseja saber informações sobre os diferentes tecidos de uma determinada parte do corpo humano a partir de medidas feitas com raios-X. Por exemplo, a presença de uma anomalia num tecido gera uma diferença no seu coeficiente de absorção e, determinando-se o coeficiente de absorção, determina-se a presença de algo estranho no tecido. Mas essas medidas não dão diretamente o valor do coeficiente de absorção, apenas sua integral ao longo da reta percorrida pelo raio-X (ver a figura 4). Portanto, essa questão da medicina é traduzida exatamente no problema de Radon, ou seja: é possível se determinar o coeficiente de absorção a partir de sua integral ao longo de retas?

A. Cormack, um físico sul-africano e um dos pioneiros nas aplicações tomográficas, conta, em [3] – um artigo que escreveu para uma conferência que festejou os setenta e cinco anos da Transformada de Radon – que chegou a esse problema em 1956, quando trabalhava no departamento de radiologia do Hospital Groote Schurr (o mesmo onde foi feito o primeiro transplante de coração), na cidade do Cabo, África do Sul. Ele recebeu o Prêmio Nobel em medicina em 1979 pela contribuição que deu nessa área (sua palestra na cerimônia de entrega do prêmio, que é de fácil leitura, pode ser encontrada em http://nobelprize.org/nobel_prizes/medicine/laureates/1979/cormack-speech.html).

Esse exemplo também mostra a dificuldade de aplicação do método. Do ponto de vista prático, é impossível se fazerem medidas ao longo de todas as retas. Aí aparecem outras perguntas – como quantas medidas se deve fazer para se ter uma aproximação boa – que não serão consideradas neste artigo. Para mais detalhes, o leitor deve consultar [1] e a bibliografia lá citada.

Esse tipo de problema é um exemplo do que se chama de *problema inverso*. Neste exemplo, temos uma equação diferencial que sabemos resolver. O problema inverso é encontrar o coeficiente da equação a partir de dados sobre suas soluções. Ou seja, conhecemos I_1 e I_0 e queremos determinar f a partir deste dado. Esta é uma área de pesquisa extremamente interessante e de aplicações importantíssimas. Por exemplo, hoje se fala muito no “pré-sal”. O leitor teria ideia de como se pode descobrir

uma camada de pré-sal a quilômetros de distância dentro da terra e embaixo de quilômetros de água? Uma coisa é certa, a Petrobras não sonhou com o mapa do tesouro. As companhias de petróleo têm grandes navios que são equipados com um canhão de ar comprimido e uma rede, similar a uma de pesca, equipada com centenas de microfones. A rede é estendida na superfície da água e puxada pelo navio. O canhão envia ondas de som ao fundo do oceano e os microfones captam o som refletido. Analisando-se as propriedades das ondas de som que foram emitidas e refletidas, espera-se deduzir propriedades do solo abaixo do mar, inclusive presença de petróleo. O modelo matemático envolvido é bastante complicado, porém tem várias coisas em comum com o problema da Radon.

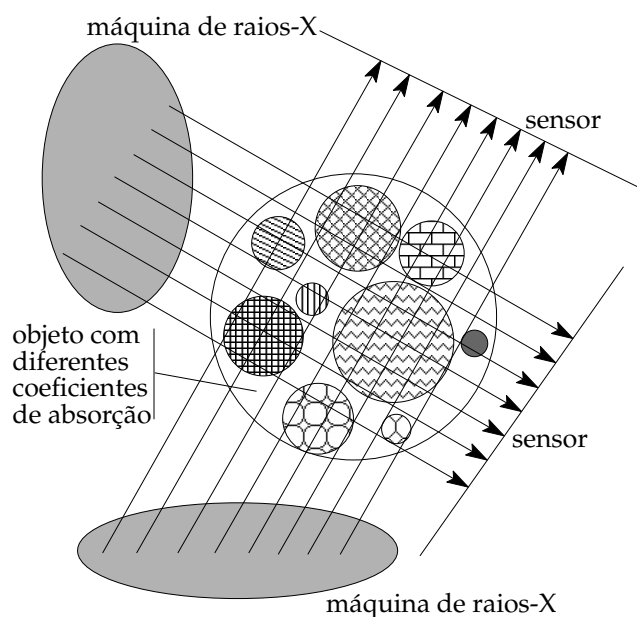


Figura 4: Espera-se detectar anomalias nos tecidos por meio de medidas de raios-X.

3 Preliminares e a Transformada de Fourier

Antes de estudarmos as Transformadas de Radon, precisamos relembrar alguns fatos sobre a Transformada de Fourier, que deve ser conhecida do leitor.

Se f é uma função contínua de suporte compacto (denota-se $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$), a Transformada de Fourier de f é definida pela integral

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx, \quad (3.1)$$

em que $\langle x, \bar{\xi} \rangle = x_1 \bar{\xi}_1 + \dots + x_n \bar{\xi}_n$ é o produto interno canônico no espaço euclidiano e $i = \sqrt{-1}$.

Seja $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis em \mathbb{R}^n que satisfazem

$$(1 + |x|)^k |D_{x_1}^{m_1} D_{x_2}^{m_2} \dots D_{x_n}^{m_n} f(x)| \leq C, \quad (3.2)$$

para quaisquer $x \in \mathbb{R}^n$ e $k, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$, em que $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ e C é uma constante que depende de k, m_1, \dots, m_n . Por exemplo, $f(x) = e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. A fórmula (3.1) também pode ser aplicada a funções nesse espaço, e é disso que trata o teorema seguinte.

Teorema 3.1. *A Transformada de Fourier*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad (3.3)$$

definida por (3.1) é uma aplicação inversível e sua inversa é dada por

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \bar{\xi} \rangle} \widehat{f}(\bar{\xi}) d\bar{\xi}. \quad (3.4)$$

Além disso ela satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_j} \mathcal{F}f(\bar{\xi}) &= \mathcal{F}(-ix_j f)(\bar{\xi}), \\ \bar{\xi}_j \mathcal{F}f(\bar{\xi}) &= \mathcal{F}\left(-i \frac{\partial}{\partial x_j} f\right)(\bar{\xi}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

A demonstração desse teorema não será dada aqui. O leitor pode encontrá-la em [10], por exemplo.

O teorema seguinte decorre do teorema de Stone-Weierstrass, que em geral se estuda num primeiro curso de análise matemática (ver [17], por exemplo). Vamos dar uma demonstração desse resultado em dimensão 1 usando alguns fatos elementares da teoria de funções analíticas de uma variável complexa.

Teorema 3.2. *Seja $f(x)$ uma função contínua de suporte compacto em \mathbb{R}^n , e suponha-se que, para todo polinômio $p(x)$, se tenha*

$$\int_{\mathbb{R}^n} p(x) f(x) dx = 0. \quad (3.6)$$

Então $f = 0$.

Demonstração. Para não necessitarmos utilizar resultados sobre funções de mais de uma variável complexa,

vamos assumir que $n = 1$. Porém esta demonstração pode ser generalizada para n maior. Primeiro recordemos que uma função $F(\zeta_1 + i\zeta_2) = u(\zeta_1, \zeta_2) + iv(\zeta_1, \zeta_2)$, de classe C^1 , em que $i = \sqrt{-1}$ e $\zeta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, é analítica se satisfaz as equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta_1} = \frac{\partial v}{\partial \zeta_2}, \quad \frac{\partial u}{\partial \zeta_2} = -\frac{\partial v}{\partial \zeta_1}.$$

Também lembremos que se $F(\zeta_1, \zeta_2)$ é analítica e

$$\partial_{\zeta_1}^k \partial_{\zeta_2}^m F(0, 0) = 0,$$

para todo $k, m \in \mathbb{N}$, então $F = 0$ (para uma demonstração desses resultados, consulte [14]).

Usando esses dois fatos, demonstraremos o teorema. A primeira observação é que, se $f \in C_0^0(\mathbb{R})$, então podemos estender a Transformada de Fourier de f para o plano complexo simplesmente tomando

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(\zeta_1 + i\zeta_2) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ix(\zeta_1 + i\zeta_2)} f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\zeta_1 + x\zeta_2} f(x) dx. \end{aligned}$$

Como f tem suporte compacto, ou seja, existe $C > 0$ tal que $f(x) = 0$ se $|x| \geq C$, a integral converge e, portanto, $\mathcal{F}f(\zeta_1 + i\zeta_2)$ está bem definida. A segunda observação é que $\mathcal{F}f(\zeta_1 + i\zeta_2)$ é uma função analítica de $z = \zeta_1 + i\zeta_2$. Para demonstrar isso basta usar que e^{ixz} é uma função analítica de z e que, pelo fato de f ser contínua de suporte compacto, podemos comutar as derivadas em $\bar{\zeta}_j$, $j = 1, 2$, com a integral em x e ver que

$$\partial_{\bar{\zeta}_j} \mathcal{F}f(\zeta_1 + i\zeta_2) = \int_{\mathbb{R}} \partial_{\bar{\zeta}_j} e^{-ix\zeta_1 + x\zeta_2} f(x) dx,$$

para $j = 1, 2$. Assim, como $e^{-ix\zeta_1 + x\zeta_2}$ satisfaz as equações de Cauchy-Riemann, $\mathcal{F}f$ também as satisfaz e, portanto, é analítica. Finalmente, utilizaremos (3.6) para demonstrar que

$$\partial_{\bar{\zeta}_1}^k \partial_{\bar{\zeta}_2}^m \mathcal{F}f(\zeta_1 + i\zeta_2) = 0 \quad \text{se} \quad \zeta_1 = \zeta_2 = 0 \quad (3.7)$$

e, portanto, deduzir que $\mathcal{F}f(\zeta_1 + i\zeta_2) = 0$ para todo ζ_1, ζ_2 . Em particular isso é verdade para $\zeta_2 = 0$ e portanto a transformada de Fourier (real) f é nula. No Teorema 3.1, afirmamos que a transformada de Fourier é

injetora em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. De fato ela é injetora também em diversos outros espaços (ver [10]), entre os quais $C_0^0(\mathbb{R})$. Como $\mathcal{F}f = 0$, temos então que $f = 0$.

Para demonstrar (3.7), primeiro é preciso notar que, como $f \in C_0^0(\mathbb{R})$, isto nos permite comutar as derivadas em ζ com a integral em x , logo

$$\begin{aligned} \partial_{\zeta_1}^m \partial_{\zeta_2}^k \mathcal{F}f(\zeta_1 + i\zeta_2) &= \partial_{\zeta_1}^m \partial_{\zeta_2}^k \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\zeta_1 + x\zeta_2} f(x) dx \\ &= (-i)^m \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\zeta_1 + x\zeta_2} x^{m+k} f(x) dx \end{aligned}$$

e, portanto, quando $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$, temos, em virtude de (3.6), que

$$\partial_{\zeta_1}^m \partial_{\zeta_2}^k \mathcal{F}f(0) = (-i)^m \int_{\mathbb{R}} x^{m+k} f(x) dx = 0.$$

□

Observemos que a condição de que f tenha suporte compacto é essencial e que se for substituída por $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ então o resultado não será mais válido. Para exibir um contraexemplo, basta tomar uma função $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que todas as suas derivadas se anulem em $\zeta = 0$ e usar $f = \mathcal{F}^{-1}g$. De acordo com os cálculos que fizemos acima, f satisfaz (3.7), porém $f \neq 0$. A diferença é que g não tem uma extensão analítica para o plano complexo.

4 Transformada de Radon em \mathbb{R}^n

A Transformada de Radon foi extensivamente estudada por S. Helgason ([8]), F. John ([11]), P. Lax e R. Phillips ([13]), D. Ludwig ([15]), e por muitos outros. Helgason estendeu a teoria para espaços homogêneos mais gerais, inclusive para o espaço hiperbólico. A referência principal é o excelente livro de S. Helgason ([8]). Os teoremas incluídos aqui são clássicos e podem ser encontrados nessas referências.

Dado um hiperplano $H \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, tome-se a integral de f sobre H . Essa aplicação associa a f uma função definida no espaço dos hiperplanos em \mathbb{R}^n . Para simplificar nossa discussão, entenderemos que qualquer hiperplano $H \subset \mathbb{R}^n$ pode ser representado por uma equação

$$H(\omega, s) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \omega \rangle = s\}, \quad (4.1)$$

em que ω pertence à esfera unitária S^{n-1} de \mathbb{R}^n e s é um número real. Note-se que o hiperplano está a uma distância $|s|$ da origem e é perpendicular ao vetor ω (a figura 1 contém uma ilustração do caso bidimensional).

Dada uma função $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, considere-se a integral de superfície da função f ao longo do plano $H(\omega, s)$, isto é,

$$\mathcal{R}f(\omega, s) = \int_{H(\omega, s)} f dS. \quad (4.2)$$

Há algumas importantes observações a serem feitas sobre a função $\mathcal{R}f(\omega, s)$. Primeiro, notemos que se $f(x) = 0$ para todo x com $|x| \geq \rho$ então

$$\mathcal{R}f(\omega, s) = 0 \text{ se } |s| \geq \rho. \quad (4.3)$$

Segundo, como $H(\omega, s) = H(-\omega, -s)$, tem-se

$$\mathcal{R}f(\omega, s) = \mathcal{R}f(-\omega, -s). \quad (4.4)$$

Finalmente, observemos que, dado $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} s^k \mathcal{R}f(\omega, s) ds = \int_{\mathbb{R}} \int_{H(\omega, s)} \langle x, \omega \rangle^k f(x) dS ds. \quad (4.5)$$

Porém $\langle x, \omega \rangle^k$ é um polinômio homogêneo de grau k em ω , com coeficientes que também são polinômios homogêneos de grau k em x . Quando calculamos a integral (4.5), obtemos um polinômio homogêneo de grau k em ω . Portanto,

$$P_k(\omega) = \int_{\mathbb{R}} s^k \mathcal{R}f(\omega, s) ds \quad (4.6)$$

é um polinômio homogêneo de grau k em ω .

Definimos $\mathcal{S}(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ como o conjunto das funções $F \in C^\infty(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ tais que, dado qualquer operador diferencial L em S^{n-1} , linear e com coeficientes de classe C^∞ , temos

$$\sup_{(\omega, s)} (1 + |s|)^k |L(F)(\omega, s)| < \infty. \quad (4.7)$$

Na verdade, esta definição envolve a noção de derivadas de uma função definida numa esfera (que é uma variedade diferenciável). Evitaremos discutir esse tópico e, para mais detalhes, remetemos o leitor a [18] ou ao Capítulo 2 de [9], que é uma referência mais específica para operadores diferenciais em variedades.

O principal resultado desta seção é o seguinte teorema.

Teorema 4.1. \mathcal{R} é uma aplicação inversível entre os espaços

$$\mathcal{R} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{M},$$

em que \mathcal{M} é o subespaço das funções $\mathcal{S}(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ que satisfazem (4.4) e (4.6).

Necessitaremos de uma série de resultados para demonstrar o Teorema 4.1. Começaremos pelo seguinte lema, cuja demonstração fica como exercício para o leitor.

Lema 4.1. Se $e_j = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, com o valor 1 na j -ésima posição, e $f_h(x) = f(x + he_j)$, então

$$\begin{aligned} \mathcal{R}f_h(\omega, s) &= \int_{\langle y, \omega \rangle = s} f(y + he_j) dS_y \\ &= \int_{\langle x, \omega \rangle = s + h\omega_j} f(x) dS_x \quad (4.8) \\ &= \mathcal{R}f(\omega, s + h\omega_j). \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\omega, s) = \omega_j \frac{\partial \mathcal{R}f}{\partial s}(\omega, s)$$

e, portanto, se $\Delta f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$ então

$$\mathcal{R}(\Delta f)(\omega, s) = \frac{\partial^2 \mathcal{R}f}{\partial s^2}(\omega, s).$$

Usando-se esse lema, pode-se facilmente demonstrar que $\mathcal{R} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(S^{n-1} \times \mathbb{R})$. A seguir, demonstraremos que \mathcal{R} é injetiva. Para isso, necessitaremos explorar a conexão entre a Transformada de Radon e a de Fourier.

Lema 4.2. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então a Transformada de Fourier de $\mathcal{R}f(\omega, s)$ com respeito à variável s satisfaz

$$\widehat{\mathcal{R}f}(\omega, \lambda) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{R}f(\omega, s) e^{-i\lambda s} ds = \widehat{f}(\lambda\omega). \quad (4.9)$$

Demonstração. Como $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos, em virtude do Lema 4.1, que $\mathcal{R}f \in \mathcal{S}(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ e, portanto, a integral (4.9) é bem definida. Por outro lado, usando a definição

de $H(\omega, s)$ e o Teorema de Fubini, temos que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \mathcal{R}f(\omega, s) e^{-i\lambda s} ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda s} \left(\int_{\langle x, \omega \rangle = s} f(x) dS \right) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\langle x, \omega \rangle = s} e^{-i\lambda \langle \omega, x \rangle} f(x) dS \right) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda \langle \omega, x \rangle} f(x) dx \\ &= \widehat{f}(\lambda\omega). \end{aligned}$$

Isto completa a demonstração do lema. \square

Agora fica fácil demonstrar que \mathcal{R} é injetiva. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{R}f = 0$ então obtemos do Lema 4.2 que $\mathcal{F}f = 0$. Como \mathcal{F} é injetiva, segue que $f = 0$.

A segunda tarefa é demonstrar que se $F(\omega, s) \in \mathcal{S}(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ satisfaz (4.4) e (4.6) então existe uma função $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $F = \mathcal{R}f$. Novamente vamos usar a relação entre as Transformadas de Radon e de Fourier. Note-se que a fórmula (4.9) diz que a Transformada de Fourier em s de $\mathcal{R}f(\omega, s)$ é essencialmente dada pela Transformada de Fourier de f em coordenadas polares, com a diferença de que λ não é necessariamente positivo. O próximo passo é o seguinte lema, cuja demonstração também deixamos como exercício para o leitor.

Lema 4.3. Seja

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : S^{n-1} \times [0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\omega, s) &\longmapsto s\omega = x. \end{aligned}$$

a transformação que associa coordenadas polares (ω, s) a um ponto $x \in \mathbb{R}^n$. \mathcal{P} desfruta das seguintes propriedades:

I. A restrição de \mathcal{P} ,

$$\mathcal{P}_0 : S^{n-1} \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

é um difeomorfismo (C^∞ e bijetiva) e sua inversa

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\longrightarrow S^{n-1} \times (0, \infty) \\ x &\longmapsto \left(\frac{x}{|x|}, |x| \right) \end{aligned}$$

é a inversa de \mathcal{P} .

II. Se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ então $f \circ \mathcal{P} \in C^\infty(S^{n-1} \times [0, \infty))$. Note-se que o intervalo inclui $s = 0$.

III. Se $F \in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times (0, \infty))$, então $F \circ \mathcal{P}_0^{-1}(x) = F(\frac{x}{|x|}, |x|)$ está em $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus 0)$, ou seja, é C^∞ em todos os pontos, exceto possivelmente na origem.

IV. Se $F \in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times (0, \infty))$, então $f = F \circ \mathcal{P}_0^{-1}$ se estende a uma função em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (ou seja, é C^∞ também na origem) se e somente se $F \in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times [0, \infty))$ e

$$P_k(\omega) = \left(\frac{\partial^k}{\partial s^k} F\right)(\omega, 0) \quad (4.10)$$

é um polinômio de grau k , para todo $k \in \mathbb{N}$.

Sugestões para a demonstração. A demonstração da propriedade I é fácil. As propriedades II e III são consequências imediatas de I. A propriedade IV é a única que não é trivial. Para demonstrá-la, escreva-se a série de Taylor de F em $s = 0$. Use-se (4.10) para provar que $f = \mathcal{P}_0^{-1}F$, que é C^∞ em $\mathbb{R}^n \setminus 0$, tem uma série de Taylor em $x = 0$ e que, portanto, é C^∞ na origem. \square

Resta-nos provar que \mathcal{R} é sobrejetiva. Ou seja, dada $F(\omega, s) \in \mathcal{M}$, demonstraremos que existe $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $F(\omega, s) = \mathcal{R}f(\omega, s)$. De fato, como

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} s^k F(\omega, s) ds &= \mathcal{F}(s^k F)(\omega, 0) \\ &= i^k \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \mathcal{F}(F)(\omega, 0) \end{aligned}$$

é, por hipótese, um polinômio homogêneo de grau k , o Lema 4.3 nos dá que, para $\xi = \lambda\omega$, $f(\xi) = \widehat{F}(|\xi|, \frac{\xi}{|\xi|}) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, e como $F \in \mathcal{S}(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$, concluímos de (3.3) que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De (4.9) deduzimos que $F = \mathcal{R}\mathcal{F}^{-1}f$. Isso encerra a demonstração do Teorema 4.1.

Portanto, já sabemos que $\mathcal{R} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{M}$ tem uma inversa. É, pois, natural tentar-se computar \mathcal{R}^{-1} . Aqui aparece uma grande diferença entre os casos n par e ímpar.

Já que sabemos inverter a Transformada de Fourier e temos uma fórmula que relaciona as transformadas de Radon e de Fourier. Vamos, portanto, utilizá-las.

Teorema 4.2. *Seja $n > 1$ ímpar. Então*

$$f(x) = \frac{1}{2(2i\pi)^{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\partial^{n-1} \mathcal{R}f}{\partial s^{n-1}}(\omega, \langle x, \omega \rangle) dS_\omega. \quad (4.11)$$

Observe-se que $i^{n-1} = \pm 1$ e que o lado direito de (4.11) é um número real se f é real.

Demonstração. Usando coordenadas polares em (3.4), temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} \widehat{f}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\infty e^{i\langle x, \lambda\omega \rangle} \widehat{f}(\lambda\omega) \lambda^{n-1} d\lambda dS_\omega. \end{aligned}$$

Como $n - 1$ é par e $\langle x, \lambda\omega \rangle$ não se altera se trocarmos $(\lambda, \omega) \mapsto (-\lambda, -\omega)$, podemos estender a integral em λ para todo \mathbb{R} para obter

$$f(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{-\infty}^\infty e^{i\langle x, \lambda\omega \rangle} \widehat{f}(\lambda\omega) \lambda^{n-1} d\lambda dS_\omega,$$

e, por causa de (4.9), chegar a

$$f(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{-\infty}^\infty e^{i\langle x, \lambda\omega \rangle} \widehat{\mathcal{R}f}(\omega, \lambda) \lambda^{n-1} d\lambda dS_\omega.$$

Utilizando (3.1) e (3.5), obtemos

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda s} \lambda^{n-1} \widehat{\mathcal{R}f}(\omega, \lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{i^{n-1}} \frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}} \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda s} \widehat{\mathcal{R}f}(\omega, \lambda) d\lambda \\ &= (2\pi) \frac{1}{i^{n-1}} \frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}} \mathcal{R}f(\omega, s), \end{aligned}$$

e, assim, (4.11) está demonstrada. \square

Essa fórmula tem uma propriedade muito importante que merece ser destacada. Para se obter o valor da função f num ponto x_0 , basta que se conheça $\mathcal{R}f(\omega, s)$ para valores próximos a $s = \langle x_0, \omega \rangle$ (pois é preciso derivar em relação a s). Assim, precisamos conhecer as integrais de f ao longo de planos com distância à origem próxima de $|\langle x_0, \omega \rangle|$, que é, no máximo, $|x_0|$. Não é necessário se conhecerem as integrais de f ao longo de todos os planos.

Isso, como veremos a seguir, é muito diferente quando n é par. Note-se que, neste caso, $n - 1$ é ímpar e a prova do Teorema 4.2 não funciona. Temos, portanto, que modificá-la. Para isso devemos introduzir um operador diferente, que é um exemplo de um operador pseudodiferencial. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $m \in \mathbb{R}_+$, definimos o operador

$$|\partial_s|^m f(s) = \frac{i^m}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda s} |\lambda|^m \widehat{f}(\lambda) d\lambda.$$

Note-se que, por causa de (3.5), quando m é um número par, temos $|\partial_s|^m f = \partial_s^m f$.

Teorema 4.3. *Seja $n > 1$, par. Então*

$$f(x) = \frac{1}{2(2i\pi)^{n-1}} \int_{S^{n-1}} (|\partial_s|^{n-1} \mathcal{R}f) (\langle x, \omega \rangle, \omega) dS. \quad (4.12)$$

A demonstração desse teorema é quase idêntica à do Teorema 4.2. A única diferença é que, quando se passa da integral sobre $(0, \infty)$ para a integral de $(-\infty, \infty)$, temos de substituir λ^{n-1} por $|\lambda|^{n-1}$, uma vez que nesse caso $n - 1$ é ímpar. Note-se que a observação que se segue à demonstração do Teorema 4.2 não é mais válida quando n é par.

Assim, respondemos às primeiras três perguntas feitas na introdução. Vamos agora nos ocupar em responder à quarta pergunta, que é muito importante para as aplicações. Por exemplo, voltemos à tomografia. Como vimos, o experimento com os raios-X mede a Transformada de Radon do coeficiente de absorção de um certo meio, como um tecido do corpo humano. O radiologista, então, compara esses dados com os de um tecido normal e percebe que as duas são idênticas fora de uma certa região. Isso implica que, fora daquela região, não há qualquer anomalia no tecido? O experimento seria inútil se isto não fosse verdadeiro, ou seja, se uma anomalia localizada numa certa região de um tecido provocasse um efeito global na Transformada de Radon. Com esse método, portanto, não seria possível localizar um tumor, por exemplo.

O próximo objetivo é demonstrar o teorema seguinte.

Teorema 4.4. *Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, tal que $|x|^k |f(x)| \rightarrow 0$, quando $|x| \rightarrow \infty$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e convexo e suponha que para qualquer hiperplano $H \subset \mathbb{R}^n$ tal que $H \cap \Omega = \emptyset$ tenhamos $\int_H f dS = 0$. Então $f(x) = 0$ para todo $x \notin \Omega$.*

Lembramos que um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é convexo se para quaisquer dois pontos em Ω o segmento de reta que os une está contido em Ω .

Esse teorema deve-se a Helgason ([7]; ver também [8]). Esse teorema diz que se $f(x)$ decai mais rapidamente do que qualquer potência negativa de $|x|$ então o

suporte de $f(x)$ é controlado pelo suporte de sua Transformada de Radon (ver a figura 2).

O leitor deve se perguntar por que assumimos essa propriedade de decaimento de $f(x)$. É fácil provar que o resultado é falso sem essa hipótese. Trabalharemos em dimensão $n = 2$ e utilizaremos propriedades de funções analíticas. Seja $z = x + iy$ e tome-se uma função $f(z)$ que é contínua em todo o plano \mathbb{C} e que satisfaz $f(z) = z^{-m}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, se $|z| > 1$. Pode-se construir $f \in C^\infty$, com estas propriedades, mas isso é mais difícil. Mostraremos que para qualquer reta $L \subset \mathbb{R}^2$ tal que $L \cap B(0, 1) = \emptyset$ (em que $B(0, 1) = \{z : |z| \leq 1\}$) temos $\int_L f d\ell = 0$.

Lembremos que o Teorema de Cauchy diz que se f é uma função analítica em uma região $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ e se $\Gamma \subset \mathcal{O}$ é uma curva fechada, que é união finita de curvas de classe C^∞ , então a integral de linha $\int_\Gamma f d\ell$ vale zero. Desta forma, seja $C(0, R)$ o círculo de raio R centrado na origem, e $R \gg 0$. Seja Γ a curva fechada que define a região do plano limitada pela reta L e o círculo $C(0, R)$ que não contém a origem. Como f é analítica fora do disco $B(0, 1)$, temos, pelo Teorema de Cauchy, que $\int_\Gamma f d\ell = 0$. Mas

$$\int_\Gamma f d\ell = \int_{C^+(0, R)} f d\ell + \int_{L_R} f d\ell = 0,$$

em que $C^+(0, R)$ e L_R são as partes de $C(0, R)$ e L que formam Γ (ver a figura 5).

Como $f(z) = z^{-m}$, se $|z| > 1$, temos

$$\left| \int_{C^+(0, R)} f d\ell \right| \leq \int_{C^+(0, R)} |z|^{-m} d\ell \leq 2\pi R^{1-m}.$$

Portanto, como $m \geq 2$,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C^+(0, R)} f d\ell = 0.$$

Por outro lado,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{L_R} f d\ell = \int_L f d\ell.$$

Dessa forma, concluímos que $\int_L f d\ell = 0$. Porém $f \neq 0$ para $|z| \geq 1$.

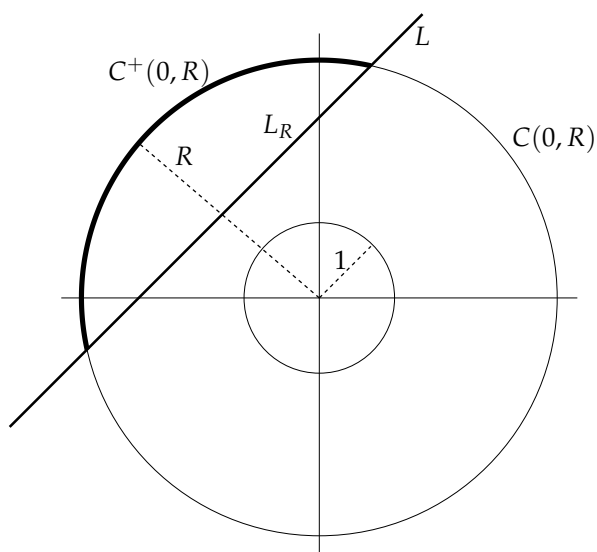


Figura 5: A curva Γ formada pelo segmento L_R e pelo arco de círculo $C^+(0, R)$.

Demonstração do Teorema 4.4. Há várias provas e muitas generalizações desse teorema, entre elas citamos [2, 5, 7, 8, 15, 19]. Nós demonstraremos esse resultado para o caso em que f tem suporte compacto e seguiremos a prova de Strichartz ([19]). O leitor interessado deve consultar o livro de Helgason ([8]) para a demonstração do caso geral, pois, além de muito elegante, também é muito instrutiva. Ela é, porém, muito mais complicada tecnicamente do que a demonstração que daremos aqui. Faremos a demonstração para o caso $n = 2$, mas é fácil estendê-la para qualquer $n > 2$, e deixamos isso como exercício para o leitor.

Primeiro, dada uma reta L tal que $L \cap \Omega = \emptyset$, escolhemos um sistema de coordenadas $x = (x_1, x_2)$ de forma que a origem $0 = (0, 0)$ pertença a Ω e que $L = \{x_1 = s_0\}$, e que para cada $s \geq s_0$, a reta $L = \{x_1 = s\}$ não intersecta Ω (ver a figura 6). Portanto, por hipótese, temos

$$\int_{\mathbb{R}} f(s, x_2) dx_2 = 0, \quad s \geq s_0.$$

Como Ω é um conjunto convexo, podemos fazer uma rotação de uma reta $L = \{x_1 = s\}$, $s \geq s_0$, de um ângulo θ bastante pequeno de forma que a reta assim obtida seja tangente ao círculo centrado em 0 e de raio s , mas que também não intersecta Ω . Essa reta, que cha-

maremos L_θ , pode ser parametrizada por

$$\begin{aligned} x(t, \theta) &= (x_1(t), x_2(t)) \\ &= (s \cos \theta + t \sin \theta, -s \sin \theta + t \cos \theta), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

A reta $L = \{x_1 = s\}$ corresponde a $\theta = 0$. Dessa forma, para θ suficientemente pequeno, e $s \geq s_0$, temos

$$\int_{\mathbb{R}} f(s \cos \theta + t \sin \theta, -s \sin \theta + t \cos \theta) dt = 0.$$

Tomando a derivada em θ desta equação, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \partial_{x_1} f(s \cos \theta + t \sin \theta, -s \sin \theta + t \cos \theta) (-s \sin \theta + t \cos \theta) dt + \\ \int_{\mathbb{R}} \partial_{x_2} f(s \cos \theta + t \sin \theta, -s \sin \theta + t \cos \theta) (-s \cos \theta - t \sin \theta) dt = 0. \end{aligned}$$

Tomando $\theta = 0$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} (t \partial_s f(s, t) - s \partial_t f(s, t)) dt = 0.$$

Como f tem suporte compacto, o Teorema Fundamental do Cálculo implica que $\int_{\mathbb{R}} \partial_t f(s, t) dt = 0$. Assim, concluímos que

$$\partial_s \int_{\mathbb{R}} t f(s, t) dt = 0.$$

Portanto, $\int_{\mathbb{R}} t f(s, t) dt$ é uma constante e, como f tem suporte compacto, $f(s, t) = 0$ se s é suficientemente grande. Portanto, temos

$$\int_{\mathbb{R}} t f(s, t) dt = 0, \quad s \geq s_0.$$

Como $\int_{\mathbb{R}} f(s, t) dt = 0$, segue que $\int_{\mathbb{R}} s f(s, t) dt = 0$. Assim, concluímos que para qualquer polinômio

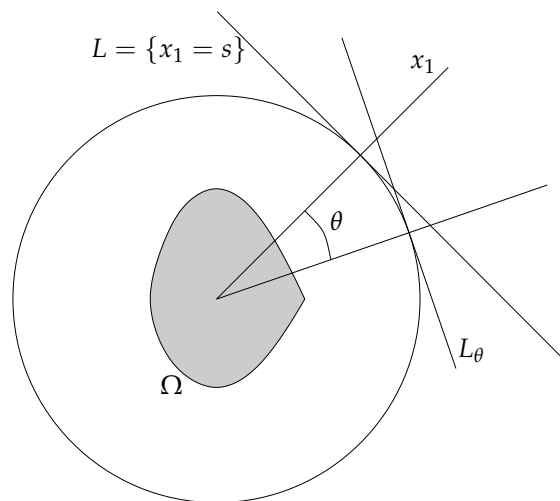


Figura 6: Domínio Ω , coordenadas x e retas L e L_θ .

$p(x_1, x_2)$ de grau 1 vale

$$\int_L p(x)f(x) dl_x = 0,$$

para toda reta L tal que $L \cap \Omega = \emptyset$. Usando o mesmo argumento para a função $p(x)f(x)$, no lugar de f , concluimos que para qualquer polinômio $q(x)$ de grau arbitrário vale $\int_L q(x)f(x) dl_x = 0$, contanto que $L \cap \Omega = \emptyset$. Portanto, em particular, voltando a usar as coordenadas (x_1, x_2) acima, obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}} t^k f(s, t) dt = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad s \geq s_0.$$

Como f tem suporte compacto, deduzimos do Teorema 3.2 que $f(s, t) = 0$ para todo $s \geq s_0$ e para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, concluimos que $f(x) = 0$ se $x \notin \Omega$. \square

5 A Transformada Raio-X

Nas seções anteriores tratamos a Transformada de Radon, que diz respeito à integral de uma função ao longo de hiperplanos, mas poderíamos ter tomado a integral de f ao longo de planos de dimensão inferior. O leitor interessado nesse assunto deve consultar [8]. Nesta seção estudaremos um pouco sobre o caso em que a integral de f é tomada ao longo de retas que, pelo que foi discutido na seção 2, se chama Transformada Raio-X. Assim, como no caso da Transformada de Radon, necessitamos encontrar uma parametrização para as retas do \mathbb{R}^n . Vimos no caso da Transformada de Radon, que os hiperplanos são parametrizados por um vetor $\omega \in S^{n-1}$ e um número real s , ou seja qualquer hiperplano H pode ser descrito por (4.1).

No caso de uma reta L , sabemos que, para caracterizá-la, necessitamos de um vetor $\omega \in S^{n-1}$, o vetor diretor, e um ponto, mas temos de ter um pouco de cuidado ao escolher esse ponto, pois queremos encontrar uma parametrização que seja bem definida. Assim, tomemos o ponto $z = L \cap \omega^\perp$, em que ω^\perp é o hiperplano perpendicular a ω passando pela origem (ver a figura 7). E denotamos $L = L(\omega, z)$.

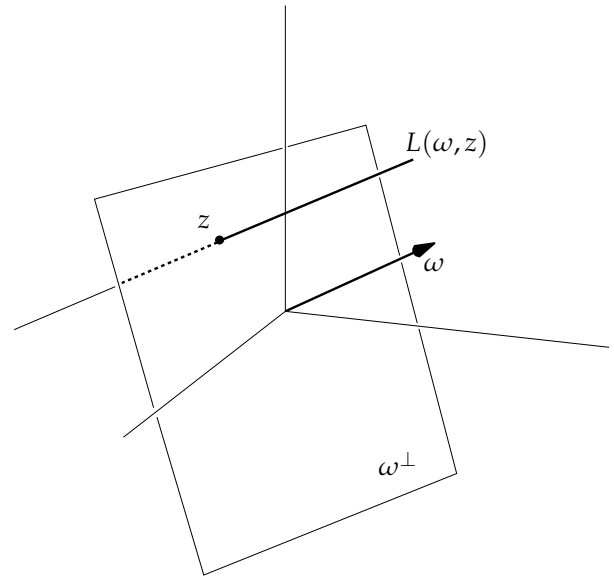


Figura 7: Parametrização da reta L .

Dada uma função contínua $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, considere a aplicação

$$Xf(\omega, z) = \int_{L(\omega, z)} f(y) dl_y.$$

Essa é a chamada Transformada Raio-X de f ao longo da reta $L(\omega, z)$. Como $L(\omega, z) = L(-\omega, z)$ segue imediatamente que $Xf(\omega, z) = Xf(-\omega, z)$. Também é fácil demonstrar o seguinte resultado:

Proposição 5.1. Se $n = 2$,

$$Xf(\omega, z) = \mathcal{R}f(\omega^\perp, |z|).$$

Primeiro, vamos estabelecer a relação entre a Transformada Raio-X e a Transformada de Radon.

Proposição 5.2. Dados $\omega \in S^{n-1}$ e $s \in \mathbb{R}$, temos

$$\mathcal{R}f(\omega, s) = \int_{\theta^\perp \cap H(\omega, s)} Xf(\theta, z) dz,$$

em que θ é qualquer vetor unitário satisfazendo $\langle \theta, \omega \rangle = 0$.

Demonstração. Basta olhar a figura 8. \square

Portanto, conhecida $Xf(\omega, z)$ para toda reta L , também se conhece $\mathcal{R}f(x, s)$ para todo ω e todo s . Assim, deduzimos o seguinte teorema a partir dos teoremas já demonstrados para a Transformada de Radon.

Teorema 5.1. *Sejam $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e suponha-se que, dado $\rho > 0$,*

$$\int_{L(\omega, z)} (f(y) - g(y)) dl_y = 0$$

para toda reta $L(\omega, z)$ que não intersecta $B(0, \rho)$. Então $f(x) = g(x)$ para todo $x \notin B(0, \rho)$.

Pode-se estabelecer uma relação entre a Transformada Raio-X e a Transformada de Fourier, de modo semelhante ao que foi feito com a Transformada de Radon. Também pode-se usar essa relação a fim de conseguir uma fórmula para a inversa da Transformada Raio-X. Remetemos o leitor para o livro de Helgason ([8]).

Em alguns exemplos de problema inversos, obtém-se a integral de uma função, ou às vezes de um tensor, ao longo de uma família de hipersuperfícies, que não são necessariamente planos. Para um artigo expositório sobre alguns problemas inversos, recomendamos o artigo [6].

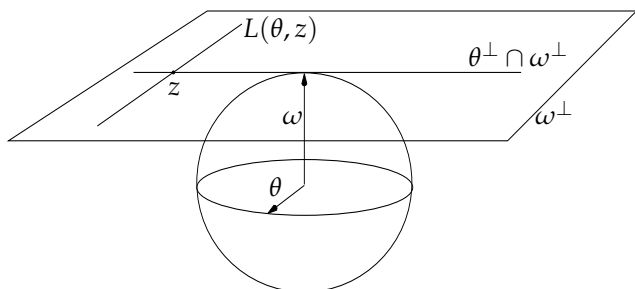


Figura 8: Como se obtém a Transformada de Radon a partir da Transformada Raio-X.

6 A equação da onda

Concluimos este artigo com uma aplicação da Transformada de Radon em equações diferenciais parciais. Utilizaremos a Transformada de Radon para resolver o Problema de Cauchy da equação da onda em dimensão n ímpar. A referência básica deste tratamento da equação da onda é [11]. Também remetemos o leitor a [20]. Começemos pelo caso $n = 1$.

Dadas funções $f_1(x), f_2(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, uma função $u(x, t)$ de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ é uma solução do problema de

Cauchy para a equação da onda se ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \text{ em } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= f_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Nosso propósito é encontrar uma fórmula para $u(x, t)$ em termos dos dados iniciais $f_1(x)$ e $f_2(x)$. Começemos pelo seguinte lema elementar, cuja prova, mais uma vez, fica para o leitor.

Lema 6.1. *Se $u(y, z) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ satisfaz $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0$ então existem $F, G \in C^\infty(\mathbb{R})$ tais que*

$$u(y, z) = F(y) + G(z).$$

Fazendo a mudança de coordenadas

$$y = x + t, \quad z = x - t$$

e denotando $U(y, z) = u\left(\frac{y+z}{2}, \frac{y-z}{2}\right) = u(x, t)$, segue de (6.1) que

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = 0.$$

Do Lema 6.1 concluímos que $U(y, z) = F(y) + G(z)$. Portanto, temos que

$$u(x, t) = F_1(x + t) + F_2(x - t), \quad F_1, F_2 \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

As condições iniciais de (6.1) nos dão que

$$\begin{aligned} F_1(x) + F_2(x) &= f_1(x) \\ F_1'(x) - F_2'(x) &= f_2(x). \end{aligned}$$

Tomando a derivada da primeira equação e somando-a à segunda, obtemos

$$2F_1'(x) = f_1'(x) + f_2(x).$$

De modo semelhante, obtemos

$$2F_2'(x) = f_1'(x) - f_2(x).$$

Usando o teorema fundamental do Cálculo, encontramos que

$$\begin{aligned} F_1(x) - F_1(x_0) &= \frac{1}{2}f_1(x) - \frac{1}{2}f_1(x_0) + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x f_2(s) ds, \\ F_2(x) - F_2(x_0) &= \frac{1}{2}f_1(x) - \frac{1}{2}f_1(x_0) - \frac{1}{2} \int_{x_0}^x f_2(s) ds. \end{aligned}$$

Portanto,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f_1(x+t) + f_1(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} f_2(s) ds. \quad (6.2)$$

Essa fórmula tem uma interpretação geométrica interessante (ver a figura 9).

O resultado seguinte fica como exercício para o leitor.

Proposição 6.1. *Se $f_1(x) = 0$ e $f_2(x) = 0$ para $|x| > R$, e $u(x, t)$ é uma solução de (6.1), então $u(x, t) = 0$ se $|x| > t + R$.*

A interpretação física desse resultado é que as informações que se propagam por meio de (6.1) o fazem com velocidade finita.

O próximo passo é resolver a equação da onda em dimensões maiores do que um. Primeiro recordamos que o Laplaciano Δ em \mathbb{R}^n é definido por

$$\Delta v(x) = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2}.$$

Estudaremos o problema de valor inicial (ou Problema de Cauchy)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u &= 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= f_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x), \quad f_1, f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Ou seja, como fizemos acima, queremos encontrar uma fórmula para $u(x, t)$ em termos de f_1 e f_2 . A ideia principal é a de reduzir esse caso ao unidimensional. Essa é a utilidade da Transformada de Radon.

O primeiro passo é lembrarmos, do Lema 4.1, que

$$\frac{\partial^2 \mathcal{R}f}{\partial s^2}(\omega, s) = \mathcal{R}(\Delta f)(\omega, s). \quad (6.4)$$

Denotemos a Transformada de Radon na variável x de $u(x, t)$ por $\mathcal{R}u(\omega, s, t)$. De (6.4) obtemos

$$\frac{\partial^2 \mathcal{R}u}{\partial t^2}(\omega, s, t) - \frac{\partial^2 \mathcal{R}u}{\partial s^2}(\omega, s, t) = 0$$

e

$$\mathcal{R}u(\omega, s, 0) = \mathcal{R}f_1(\omega, s), \quad \frac{\partial \mathcal{R}u}{\partial t}(\omega, s, 0) = \mathcal{R}f_2(\omega, s).$$

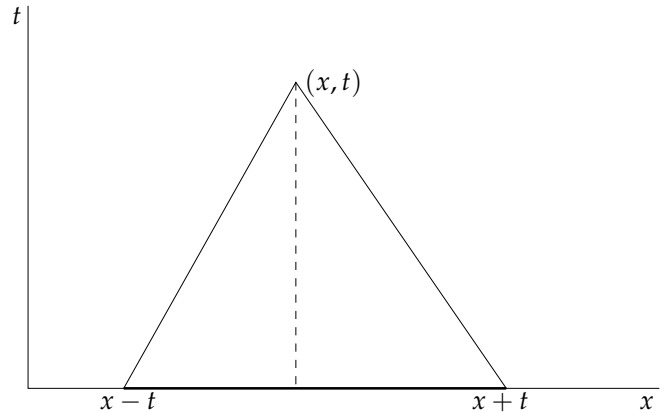


Figura 9: Interpretação geométrica da solução da equação da onda em dimensão 1. O valor da solução $u(x, t)$ no ponto (x, t) só depende do valor do dado inicial no intervalo $[x - t, x + t]$.

Aplicando (6.2), encontramos que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}u(\omega, s, t) &= \frac{1}{2} (\mathcal{R}f_1(\omega, s+t) + \mathcal{R}f_1(\omega, s-t)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{s-t}^{s+t} \mathcal{R}f_2(\omega, \mu) d\mu. \end{aligned}$$

Agora temos de tomar a transformada inversa de Radon de $\mathcal{R}u$. Como já vimos antes, há uma diferença entre os casos em que n é par ou ímpar: o caso ímpar é mais simples. De (4.11) obtemos que, com

$$C_n = \frac{1}{2(2i\pi)^{n-1}},$$

vale

$$\begin{aligned} u(x, t) &= C_n \int_{S^{n-1}} \frac{\partial^{n-1} \mathcal{R}u}{\partial s^{n-1}}(\omega, \langle x, \omega \rangle, t) dS_\omega \\ &= \frac{1}{2} C_n \int_{S^{n-1}} \left(\frac{\partial^{n-1} \mathcal{R}f_1}{\partial s^{n-1}}(\omega, \langle x, \omega \rangle + t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^{n-1} \mathcal{R}f_1}{\partial s^{n-1}}(\omega, \langle x, \omega \rangle - t) \right) dS_\omega \\ &\quad + \frac{1}{2} C_n \int_{S^{n-1}} \left(\frac{\partial^{n-2} \mathcal{R}f_2}{\partial s^{n-2}}(\omega, \langle x, \omega \rangle + t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^{n-2} \mathcal{R}f_2}{\partial s^{n-2}}(\omega, \langle x, \omega \rangle - t) \right) dS_\omega. \end{aligned}$$

Agora observamos que, como n é ímpar e $\mathcal{R}f(\omega, s) =$

$\mathcal{R}f(-\omega, -s)$, então

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} \frac{\partial^{n-1} \mathcal{R}f_1}{\partial s^{n-1}}(\omega, \langle x, \omega \rangle + t) dS_\omega \\ = \int_{S^{n-1}} \frac{\partial^{n-1} \mathcal{R}f_1}{\partial s^{n-1}}(\omega, \langle x, \omega \rangle - t) dS_\omega \\ \int_{S^{n-1}} \frac{\partial^{n-2} \mathcal{R}f_2}{\partial s^{n-2}}(\omega, \langle x, \omega \rangle + t) dS_\omega \\ = - \int_{S^{n-1}} \frac{\partial^{n-2} \mathcal{R}f_2}{\partial s^{n-2}}(\omega, \langle x, \omega \rangle - t) dS_\omega. \end{aligned}$$

Portanto, como n é ímpar,

$$\begin{aligned} u(x, t) = C_n \int_{S^{n-1}} \left(\frac{\partial^{n-1} \mathcal{R}f_1}{\partial s^{n-1}}(\omega, \langle x, \omega \rangle + t) \right. \\ \left. + \frac{\partial^{n-2} \mathcal{R}f_2}{\partial s^{n-2}}(\omega, \langle x, \omega \rangle + t) \right) dS_\omega. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Essa fórmula nos dá u em termos das Transformadas de Radon de f_1 e f_2 e é a base da Teoria de Espalhamento de Lax e Phillips ([13]). Pode-se transformá-la em uma fórmula envolvendo f_1 e f_2 diretamente, mas não faremos esses cálculos aqui; e apenas remetemos o leitor interessado ao livro [8]. Observamos somente que existe uma constante K_n , que só depende de n , tal que

$$\begin{aligned} K_n u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} t^{n-2} \int_{S^{n-1}} f_1(x + t\omega) dS_\omega \right) \\ + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left(t^{n-2} \int_{S^{n-1}} f_2(x + t\omega) dS_\omega \right). \end{aligned} \quad (6.6)$$

O leitor interessado deve ler [11] para mais detalhes. O seguinte resultado é uma simples consequência de (6.6).

Proposição 6.2. *Se $n > 1$ é ímpar e se $f_1(x) = f_2(x) = 0$ para $|x| > R$, então a solução u de (6.3) satisfaz*

$$u(x, t) = 0 \text{ se } t < |x| - R \text{ ou se } t > |x| + R.$$

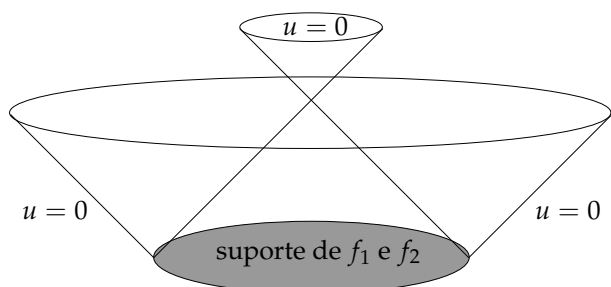


Figura 10: Princípio de Huygens em dimensão ímpar.

Esse fenômeno é conhecido como o princípio de Huygens (ver a figura 10).

Agradecimentos

Este trabalho foi financiado, em parte, pela National Science Foundation projeto número DMS-0901334, e parte pelo CNPq, Edital Universal 470997/2009-5.

Agradeço também ao Prof. Ramón Mendoza e a Filipe dos Santos, da UFPE, pelos comentários. Sou grato ao Prof. Severino Toscano pela sugestão de publicar estas notas na *Matemática Universitária*. Agradeço a Rosário Sá Barreto por corrigir os inúmeros erros de português. Sem dúvida, os que restaram, são de minha responsabilidade.

Referências

- [1] BARRET, H. H.; SWINDELL, W. *Radiological imaging*. New York: Academic Press, 1981. 2v.
- [2] BOMAN, J. Helgason's support theorem for Radon transforms – a new proof and a generalization. In: *Mathematical Methods in Tomography*, Oberwolfach, 1990. Berlin: Springer, 1991. p. 1–5. (Lecture Notes in Mathematics, 1497)
- [3] CORMACK, A. My connection with the Radon transform. In: GINDIKIN; MICHOR, P.; (EDS.) 75 YEARS OF RADON TRANSFORM. CONFERENCE PROCEEDINGS AND LECTURE NOTES IN MATHEMATICAL PHYSICS, 4, VIENNA, 1992. *Proceedings*. Cambridge: International Press, 1994. p. 32–35.
- [4] CORMACK, A. Representation of a function by its line integrals. *Journal of Applied Physics*, v. 34, p. 2722-2727, 1963.
- [5] DROSTE, B. A new proof of the support theorem and the range characterization for the Radon transform. *Manuscripta Mathematica*, v. 42, n. 2-3, p. 289–296, 1983.
- [6] GREENLEAF, A.; KURYLEV, Y.; LASSAS, M.; UHLMANN, G. Invisibility and inverse problems. *Bulle-*

- tin of the American Mathematical Society (N.S.), v. 46, n. 1, p. 55–97, 2009.*
- [7] HELGASON, S. A duality in integral geometry: some generalizations of the Radon transform. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 70, p. 435–446, 1964.
- [8] HELGASON, S. *Radon transform*. 2.ed. Boston: Birkhäuser, 1999. (Progress in Mathematics, 5)
- [9] HELGASON, S. *Groups and geometric analysis. Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions*. Corrected reprint of the 1984 original. Providence: American Mathematical Society, 2000. (Mathematical Surveys and Monographs, 83)
- [10] HOUNIE, J. *Teoria elementar das distribuições*. Rio de Janeiro: IMPA, 1979. (Colóquio Brasileiro de Matemática, 12, Poços de Caldas, 1979)
- [11] JOHN, F. *Plane waves and spherical means applied to partial differential equations*. New York: Interscience, 1955.
- [12] JOHN, F. Reminiscences. In: GINDIKIN, S.; MICHOR, P.; (EDS.) 75 YEARS OF RADON TRANSFORM. CONFERENCE PROCEEDINGS AND LECTURE NOTES IN MATHEMATICAL PHYSICS, 4, VIENNA, 1992. *Proceedings*. Cambridge: International Press, 1994. p. 29–30.
- [13] LAX, P.; PHILLIPS, R. *Scattering theory*. 2.ed. With appendices by Cathleen S. Morawetz and Georg Schmidt. Boston: Academic Press, 1989. (Pure and Applied Mathematics, 26)
- [14] LINS NETO, A. *Funções de uma variável complexa*. Rio de Janeiro: IMPA, 1996. (Projeto Euclides, 20)
- [15] LUDWIG, D. The Radon transform on Euclidean space. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, v. 23, p. 49–81, 1966.
- [16] RADON, J. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. *Berichte über die verhandlungen der sächsischen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche klasse*, v. 69, p. 262–277, 1917.
- [17] RUDIN, W. *Princípios de análise matemática*. Rio de Janeiro: Livro Técnico, 1971.
- [18] SPIVAK, M. *O cálculo em variedades*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2003.
- [19] STRICHARTZ, R. Radon inversion – variations on a theme. *The American Mathematical Monthly*, v. 89, n. 6, p. 377–384, 1982.
- [20] UHLMANN, G. *Análise microlocal e teoria de espalhamento*. Rio de Janeiro: IMPA, 1986. (Escola Latino-Americana de Matemática, 8, Rio de Janeiro, 1986)

Antônio Sá Barreto
Department of Mathematics, Purdue University
150 North University Street
West Lafayette IN
47907, USA
sabarre@math.purdue.edu