

APLICAÇÕES HARMÔNICAS

Manfredo P. do Carmo

IMPA

As aplicações harmônicas generalizam de uma maneira natural dois conceitos fundamentais. Primeiro, o de *geodésicas*, isto é, aquelas curvas de uma superfície que realizam o menor caminho entre dois quaisquer de seus pontos suficientemente próximos (uma ideia intuitiva de uma geodésica ligando dois pontos p e q de uma superfície S é dada pela posição de equilíbrio de um elástico preso nas extremidades p e q e esticado sobre a superfície S). Segundo, o de *funções harmônicas*, isto é, funções $f(x, y)$ que satisfazem a equação

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Delta f = 0$$

(a expressão Δf é chamada o *laplaciano* de f). Entre outras razões, as funções harmônicas devem sua importância ao fato de que as partes reais e imaginárias de uma função analítica complexa são funções harmônicas. O que há de comum entre estes dois exemplos é que ambos são pontos críticos de um funcional que iremos chamar energia e que desempenha um papel importante no que se segue.

Procuraremos introduzir a definição de aplicação harmônica através de uma série de exemplos (Seção 1). Na Seção 2 introduziremos os elementos de geometria riemanniana necessários a generalizar os exemplos dados em um conceito geral de aplicações harmônicas entre variedades riemannianas. Nosso objetivo é apresentar os problemas fundamentais da teoria das aplicações harmônicas e descrever alguns resultados obtidos (Seção 3). A maior parte da exposição deve poder ser acompanhada por quem possua um bom conhecimento de Cálculo no \mathbb{R}^n (incluindo a formulação geométrica da diferencial), e um pouco de imaginação.

O trabalho fundamental das aplicações harmônicas é o artigo de Eells e Sampson [7], de 1964, que se encaixa no que hoje está sendo chamado análise geométrica. Nas décadas de 60-90, o assunto teve um intenso desenvolvimento, os quais foram descritos nos artigos [5] e [6] de Eells e Lemaire. Em 1975, fiz uma conferência de divulgação sobre o assunto, no 10º Colóquio Brasileiro de Matemática, que foi publicada nas Atas desse Colóquio. O que se segue é uma versão editada dessa conferência.

1 Exemplos

Exemplo 1. Seja D um domínio (= aberto, conexo) limitado do plano \mathbb{R}^2 de coordenadas (u, v) . Indicaremos por ∂D a fronteira de D e por $\bar{D} = D \cup \partial D$. Os que quiserem, podem pensar em D como um disco aberto; ∂D será então o círculo da fronteira e \bar{D} o disco fechado.

Seja $f: \bar{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável dada por

$$f(u, v) = (y_1(u, v), \dots, y_n(u, v)), \quad (u, v) \in \bar{D},$$

onde (y_1, \dots, y_n) indica as coordenadas do \mathbb{R}^n . Definiremos a energia $E(f)$ de f por

$$\begin{aligned} E(f) &= \frac{1}{2} \int_{\bar{D}} \left(\sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{\partial y_i}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial v} \right)^2 \right\} \right) du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{\bar{D}} \left(\sum_{i=1}^n |\text{grad } y_i|^2 \right) du dv, \end{aligned}$$

onde $\text{grad } y_i$ é o vetor do \mathbb{R}^2 de componentes

$$\text{grad } y_i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial u}, \frac{\partial y_i}{\partial v} \right).$$

Convém pensar em \bar{D} como uma película elástica que é esticada por meio de f em uma “superfície” do \mathbb{R}^n . Neste caso, $E(f)$ é a energia potencial acumulada pelo “espalhamento” dos pontos de \bar{D} (Fig. 1).

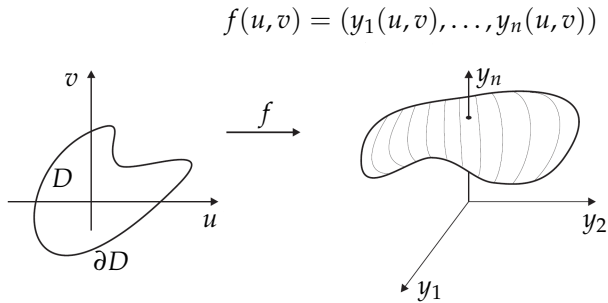


Figura 1

Um problema natural nesta situação é o seguinte. Dada uma aplicação diferenciável $g: \partial D \rightarrow \mathbb{R}^n$ achar uma aplicação diferenciável $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

- (a) $f|_{\partial D} = g$, isto é, a restrição de f a ∂D coincida com g ; e
- (b) $E(f)$ é um mínimo entre todas as aplicações que satisfazem (a).

Em outras palavras, dados os valores na fronteira, queremos saber se existe uma película que assuma na fronteira os valores dados e que tenha energia mínima entre todas aquelas que satisfazem a mesma condição.

Suponhamos que exista uma tal f e vejamos que condições ela deve satisfazer. Para isto, introduziremos a noção de *variação* de f , que é uma aplicação diferenciável

$$F: \bar{D} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

satisfazendo às seguintes condições. Se indicarmos $F(u, v, s) = f_s(u, v)$ então:

- (i) $f_0 = f$ e
- (ii) $f_s|_{\partial D} = g$, para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Intuitivamente, uma variação é uma família $f_s: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de aplicações diferenciáveis dependendo diferenciavelmente de um parâmetro $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. A aplicação f_s pode ser pensada como uma oscilação de f em torno da posição inicial $f_0 = f$ (condição (i)) de tal modo que a fronteira ∂D é mantida fixa nesta oscilação (condição (ii)).

Fixado o ponto $(u_0, v_0) \in \bar{D}$, o vetor velocidade da curva: $s \rightarrow F(u_0, v_0, s)$ no ponto $s = 0$ será indicado por $\frac{\partial F}{\partial s}$ e será chamado o *campo variacional* da variação F (Fig. 2).

Cada aplicação f_s tem sua energia e a função real definida por $E(s) = E(f(s))$, $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, é evidentemente diferenciável. Um cálculo não muito difícil mostra que a sua derivada em $s = 0$ é dada por

$$\frac{dE}{ds} \Big|_{s=0} = - \int_{\bar{D}} \left(\Delta f \cdot \frac{\partial F}{\partial s} \right) dudv,$$

onde Δf é o laplaciano da aplicação f , isto é, o vetor em \mathbb{R}^n de componentes

$$\Delta f = (\Delta y_1, \dots, \Delta y_n),$$

e o ponto indica o produto interno em \mathbb{R}^n . Como admitimos que f é um mínimo para a energia, teremos

$$\frac{dE}{ds} \Big|_{s=0} = 0, \text{ para toda variação } F \text{ de } f. \quad (1)$$

Não é difícil mostrar que a condição (1) é equivalente a

$$\Delta f = 0, \text{ em } \bar{D}. \quad (2)$$

A condição (2) é, portanto, uma condição necessária para que f seja um mínimo da energia. Entretanto, esta condição não é suficiente e caracteriza não só os mínimos, mas todos os pontos críticos de f . Como veremos adiante, a condição de mínimo é demasiadamente restritiva às possíveis generalizações do nosso problema. Convém portanto estabelecer a seguinte definição.

Definição 1. Uma aplicação diferenciável $f: \bar{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ é harmônica se $\Delta f = 0$.

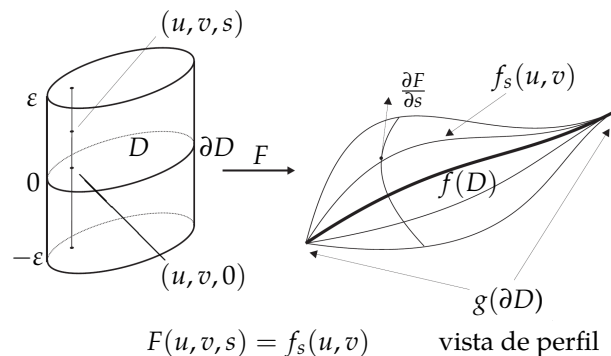


Figura 2

Pelo que acabamos de ver, f é harmônica se e só se f é um ponto crítico para a função energia de qualquer variação de f . Se $n = 1$, reobtemos as funções harmônicas.

O problema de obter aplicações harmônicas de $\bar{D} \subset \mathbb{R}^2$ em \mathbb{R}^n está resolvido em condições gerais. Em particular, o seguinte resultado é clássico (Problema de Dirichlet). Dada uma aplicação contínua $g: \partial D \rightarrow \mathbb{R}^n$, sob certas condições que não queremos explicitar, existe uma única aplicação $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, contínua em \bar{D} e harmônica em D , tal que $f|_{\partial D} = g$; uma tal f é um mínimo absoluto da energia.

Para maiores detalhes e um apanhado da importância do problema de Dirichlet no desenvolvimento da Análise, veja o artigo de D. Figueiredo [8].

Exemplo 2. Seja S uma superfície regular em \mathbb{R}^3 (regular quer dizer que S não tem pontas nem arestas) e sejam p e q dois pontos de S . Seja $f: [0, 1] \rightarrow S$ uma aplicação diferenciável (curva parametrizada em S) tal que $f(0) = p, f(1) = q$. A energia da curva f é definida por

$$E(f) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left| \frac{df}{dt} \right|^2 dt, \quad t \in [0, 1],$$

onde $\frac{df}{dt}$ é o vetor velocidade da curva f . Uma variação de f é uma aplicação diferenciável

$$F: [0, 1] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$$

tal que, denotando $F(t, s) = f_s(t)$, teremos:

- (i') $f_0 = f$,
- (ii') $f_s(0) = p, f_s(1) = q$, para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

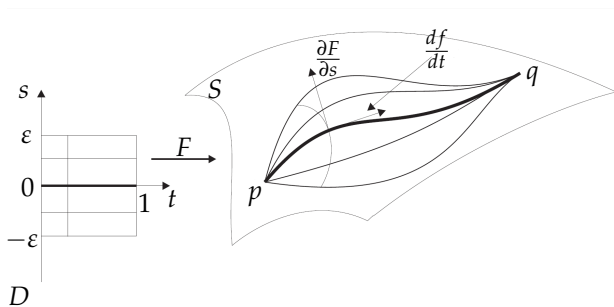


Figura 3

Fixado $t_0 \in [0, 1]$, o vetor velocidade da curva $s \rightarrow F(t_0, s)$ no ponto $s = 0$ será indicado por $\frac{\partial F}{\partial s}$ e chamado o campo variacional de F (Fig. 3).

Escrevendo $E(s) = E(f_s)$, vemos que a função $E: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ assim definida é diferenciável. Um cálculo não muito difícil mostra que

$$\frac{dE}{ds} \Big|_{s=0} = - \int_0^1 \left(\hat{f}(t) \cdot \frac{\partial F}{\partial s} \right) dt,$$

onde $\hat{f}(t)$ é a projeção sobre o plano tangente a S em $f(t)$ de $\frac{d^2 f}{dt^2}$, isto é, $\hat{f}(t)$ é a aceleração de f “como vista da superfície”. É usual chamar-se \hat{f} de derivada covariante de $\frac{df}{dt}$ em S .

De maneira análoga ao exemplo anterior é possível provar que f é um ponto crítico da energia, isto é,

$$\frac{dE}{ds} \Big|_{s=0} = 0, \quad \text{para toda variação de } f,$$

se e só se $\hat{f}(t) = 0$.

Definição 2. Uma aplicação diferenciável $f: [0, 1] \rightarrow S$ é harmônica se $\hat{f} = 0$.

Pelo que foi visto, f é harmônica se e só se é um ponto crítico para a energia de qualquer variação de f .

As aplicações harmônicas de um intervalo em S são precisamente as geodésicas de S ligando dois pontos de S . Em uma esfera, por exemplo, elas são arcos de círculos máximos, e em um cilindro elas são arcos de alguma hélice sobre o cilindro (Fig. 4) ou as retas verticais.

O problema de achar “curvas harmônicas” (isto é, geodésicas) ligando dois pontos dados de uma superfície está resolvido para superfícies completas. Diremos que uma superfície S é completa se para todo ponto $p \in S$ qualquer geodésica $\gamma(t)$ saindo de $p = \gamma(0)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ (isto significa, intuitivamente, que S não tem “buracos” nem “fronteiras”). Se S é completa, dados $p, q \in S$ existe uma geodésica de S ligando p a q ; uma tal geodésica é um mínimo absoluto da energia (Teorema de Hopf-Rinow, cf. [4], pag. 401).

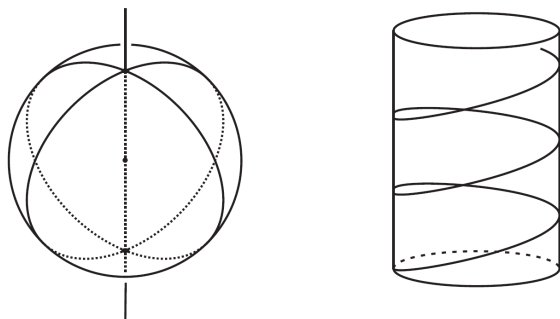


Figura 4: Geodésicas na esfera e no cilindro.

Observe que, em contraste com o Exemplo 1, a geodésica assim obtida não é necessariamente única. Ademais, além das geodésicas “mínimas” podem existir outras geodésicas ligando os pontos dados que não são mínimas, mas apenas pontos críticos de energia.

Exemplo 3. Considere dois círculos, o primeiro parametrizado pelo ângulo central θ e dado por

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta,$$

e o segundo parametrizado pelo ângulo central φ e dado por

$$u = \cos \varphi, \quad v = \sin \varphi.$$

Seja $\varphi = f(\theta)$ uma aplicação diferenciável do primeiro círculo no segundo. Definiremos a energia de f por

$$E(f) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left| \frac{df}{d\theta} \right|^2 d\theta.$$

Uma *variação* de f é uma aplicação diferenciável $F(\theta, s) = f_s(\theta)$, $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, tal que $f_0 = f$ (a condição de fronteira evidentemente não aparece, pois a fronteira é vazia). Escrevendo $E(s) = E(f_s)$ e calculando sua derivada em $s = 0$ obteremos

$$\left. \frac{dE}{ds} \right|_{s=0} = - \int_0^{2\pi} \frac{d^2 f}{ds^2} \frac{\partial F}{\partial s} d\theta,$$

onde $\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial s}(\theta, 0)$. Por analogia com os exemplos anteriores, definiremos f como uma *aplicação harmônica* se f é um ponto crítico da energia para toda variação de f . Como é fácil verificar, f é harmônica se e só se $\frac{d^2 f}{d\theta^2} = 0$, ou seja, $f(\theta) = k\theta + c$, onde k e c são constantes. Se normalizarmos f de tal modo que $f(0) = 0$, então $c = 0$,

e uma aplicação harmônica é da forma $f(\theta) = k\theta$, isto é, f “enrola” o primeiro círculo k vezes no segundo (k é evidentemente um inteiro) de uma maneira uniforme.

Uma interpretação física do resultado anterior pode ser obtida pensando no primeiro círculo como um elástico e no segundo como um arame rígido. Uma aplicação qualquer f enrola o elástico no arame (digamos, uma vez) de maneira tanto mais irregular quanto maior for a energia potencial do elástico. A energia potencial mínima corresponde a uma distribuição uniforme do elástico, isto é, a uma aplicação harmônica $f(\theta) = \theta$. Podemos evidentemente construir exemplos semelhantes para $k = 2, 3, \dots, n$.

As considerações acima tornam plausível o teorema seguinte. Toda aplicação contínua $f: S^1 \rightarrow S^1$ do círculo S^1 em si próprio é deformável continuamente em uma aplicação harmônica. Como veremos a seguir, a generalização desse teorema é um dos problemas fundamentais na teoria das aplicações harmônicas.

2 Elementos de geometria riemanniana

Pretendemos agora generalizar os exemplos apresentados. Para isto, introduziremos a noção de variedade riemanniana, que é uma extensão natural da ideia de superfície regular em \mathbb{R}^3 .

Recordemos que uma *superfície regular* em \mathbb{R}^3 é um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ tal que para todo ponto $p \in S$ existe uma bola aberta $B_\varepsilon(p)$ de \mathbb{R}^3 , centrada em p , e uma aplicação $x: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow B_\delta(p) \cap S$ de um aberto U de \mathbb{R}^2 sobre $B_\delta(p) \cap S$ satisfazendo:

- (1) x é um homeomorfismo diferenciável;
- (2) a diferencial $dx_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva para todo $q \in U$.

A aplicação x é chamada uma *parametrização* e seu papel é introduzir as *coordenadas* (u, v) de $U \subset \mathbb{R}^2$ na vizinhança $B_\varepsilon(p) \cap S$ de p em S . É possível mostrar que o subespaço vetorial $dx_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ não depende da parametrização x ; ele é portanto um objeto associado ao subconjunto S que é chamado o *plano tangente* $T_{x(q)}(S)$ de S em $x(q)$.

Intuitivamente, uma superfície regular é um subconjunto bidimensional S do \mathbb{R}^3 de tal modo que em cada ponto tenha sentido falar no plano tangente a S naquele ponto; não são portanto permitidas auto-intersecções, arestas ou pontas (Fig. 5).

Uma *variedade riemanniana* é um subconjunto $M^n \subset \mathbb{R}^N$ (n indica a dimensão da variedade) tal que para todo $p \in M^n$ existe uma bola aberta $B_\varepsilon(p)$ do \mathbb{R}^N e uma aplicação $x: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow B_\varepsilon(p) \cap M^n$ de um aberto U do \mathbb{R}^n sobre $B_\varepsilon(p) \cap M^n$ satisfazendo:

- (1') x é um homeomorfismo diferenciável;
- (2') a diferencial $dx_q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ é injetiva para todo $q \in U$.

Assim, uma variedade riemanniana é como se fosse uma “superfície” de dimensão n em um espaço euclidiano de dimensão $N > n$.

Da mesma forma que para superfícies, x é chamada uma *parametrização*, as coordenadas (u_1, \dots, u_n) são chamadas *coordenadas* de $x(u_1, \dots, u_n) \in B_\varepsilon(p) \cap M^n$ e o *espaço tangente* $T_{x(q)}(M^n) = dx_q(\mathbb{R}^n)$ a M^n em $x(q)$ está bem definido independentemente da parametrização x . Associada à parametrização x existe uma base de $T_{x(q)}(\mathbb{R}^n)$ dada por

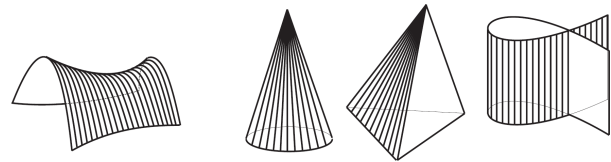
$$\left[X_1 = \frac{\partial x}{\partial u_1}, \dots, X_n = \frac{\partial x}{\partial u_n} \right].$$

Os vetores $X_i = \frac{\partial x}{\partial u_i}, i = 1, \dots, n$, são chamados os *vetores básicos* da parametrização x .

Usualmente define-se uma variedade riemanniana de maneira mais abstrata. É possível provar, entretanto, que toda variedade riemanniana abstrata é uma variedade riemanniana segundo a definição acima. Para os nossos propósitos, a definição acima é mais conveniente.

Os conceitos de função diferenciável e gradiente se estendem imediatamente a uma variedade riemanniana. Com efeito, seja $f: M^n \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real em uma variedade riemanniana M^n . Diremos que f é *diferenciável* em $p \in M^n$ se existir uma bola aberta $B_\varepsilon(p)$ de \mathbb{R}^N centrada em p e uma função diferenciável $F: B_\varepsilon(p) \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$F|_{B_\varepsilon(p) \cap M^n} = f.$$



Superfície regular Superfícies não regulares

Figura 5

Em outras palavras, f é diferenciável em p se pode ser localmente estendida a uma função diferenciável de um aberto de \mathbb{R}^N . Se indicarmos com (x_1, \dots, x_N) as coordenadas do \mathbb{R}^N , F pode ser escrita como $F(x_1, \dots, x_N)$. O vetor

$$\text{grad } F(p) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_N} \right) (p) \in \mathbb{R}^N$$

não pertence necessariamente a $T_p(M^n)$. A sua projeção sobre $T_p(M^n)$ é a parte do vetor $\text{grad } F$ que é “vista da variedade M^n ”. Como F e f coincidem em $B_\varepsilon(p) \cap M^n$, é natural definir o *gradiente* de f como

$$\text{grad } f(p) = \text{proj. sobre } T_p(M^n) \text{ de } \text{grad } F(p),$$

onde, aqui e adiante, *proj.* indica a projeção segundo o complemento ortogonal de $T_p(M^n)$.

A noção de laplaciano também se estende às variedades riemannianas. Para introduzi-la precisamos, entretanto, de alguns preliminares.

Um *campo diferenciável de vetores* em uma variedade riemanniana $M^n \subset \mathbb{R}^N$ é uma aplicação diferenciável $X: M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ tal que $X(p) \in T_p(M^n)$, para todo $p \in M^n$. Dado um tal campo X e um vetor $v \in T_p(M^n)$, definimos a *derivada covariante* $D_v X(p)$ de X relativamente a v em p como a componente tangencial da diferencial de X aplicada a v , isto é,

$$D_v X(p) = \text{proj. sobre } T_p(M^n) \text{ de } dX_p(v).$$

Em outras palavras, $D_v X(p)$ é a parte da derivada direcional de X relativamente a v que é “vista da variedade M^n ”. As *geodésicas* de M^n são precisamente as curvas de M^n cujos campos de vetores tangentes têm derivada covariante nula (cf. Exemplo 2).

Dado um campo diferenciável de vetores tangentes X em M^n , define-se uma função diferenciável

$\operatorname{div} X: M^n \rightarrow \mathbb{R}$, chamada *divergência* de X , da maneira seguinte. Para cada $p \in M^n$, considera-se a aplicação linear de $T_p(S)$ que faz corresponder a cada $v \in T_p(S)$ o vetor $D_v X(p)$; o traço desta aplicação linear é, por definição, o valor de $\operatorname{div} X(p)$.

Com estes preliminares, define-se o *laplaciano* $\Delta_{M^n} f$ de uma função diferenciável $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Delta_{M^n} f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f).$$

Não é difícil verificar que quando $M^n = \mathbb{R}^2$, esta definição coincide com a dada anteriormente.

3 Aplicações harmônicas entre variedades riemannianas

Estamos agora em condições de generalizar os Exemplos da Seção 1. Sejam $M^n \subset \mathbb{R}^N$ e $\tilde{M}^m \subset \mathbb{R}^M$ duas variedades riemannianas. Seja $D \subset M^n$ um aberto conexo e limitado de M^n cuja fronteira ∂D é a união de um número finito dos fechos de variedades de dimensão $n - 1$ contidas em M^n e seja $f: \bar{D} \rightarrow \tilde{M}^m$ uma aplicação diferenciável, onde $\bar{D} = D \cup \partial D$. Indicando por (x_1, \dots, x_N) as coordenadas de \mathbb{R}^N e por (y_1, \dots, y_M) as coordenadas de \mathbb{R}^M , podemos escrever:

$$f(x_1, \dots, x_N) = (f_1(x_1, \dots, x_N), \dots, f_M(x_1, \dots, x_N)),$$

para $(x_1, \dots, x_N) \in D$. Definiremos a energia de f como usualmente:

$$E(f) = \frac{1}{2} \int_{\bar{D}} \left(\sum_{i=1}^M |\operatorname{grad} f_i|^2 \right) dM^n = \frac{1}{2} \int_{\bar{D}} e(f) dM^n,$$

onde

$$e(f) = \sum_{i=1}^M |\operatorname{grad} f_i|^2$$

é a *densidade de energia* de f . Introduzindo, como antes, variações $F: \bar{D} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \tilde{M}^m$ ($f_s(q) = F(q, s), q \in \bar{D}$) que mantêm a fronteira ∂D fixa, concluiremos que

$$\left. \frac{dE}{ds} \right|_{s=0} = - \int_{\bar{D}} \left(\hat{f}(p) \cdot \frac{\partial F}{\partial s} \right) dM^n, \quad s \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

onde $E(s) = E(f_s)$, e $\hat{f}(p)$ é o *vetor tensão* de f dado por $\hat{f}(p) = \operatorname{proj.}$ sobre $T_{f(p)}(\tilde{M}^m)$ de $(\Delta_{M^n} f_1, \dots, \Delta_{M^n} f_M)$, $p \in D \subset M^n$. Isto motiva a seguinte definição.

Definição 3. Uma aplicação diferenciável $f: D \subset M^n \rightarrow \tilde{M}^m$ é harmônica se $\hat{f} = 0$.

O leitor se convencerá facilmente que os Exemplos da Seção 1 são casos particulares de definição acima. Além disto, a experiência destes exemplos nos leva a propor os seguintes problemas fundamentais sobre as aplicações harmônicas.

Problema 1. Dada uma aplicação contínua $g: \partial D \rightarrow \tilde{M}^m$, achar uma aplicação $f: D \rightarrow \tilde{M}^m$, contínua em \bar{D} e harmônica em D , tal que $f|_{\partial D} = g$ (vide Exemplo 1).

Problema 2. Suponhamos M^n e \tilde{M}^m compactas. Pergunta-se se toda aplicação contínua $f: M^n \rightarrow \tilde{M}^m$ pode ser deformada continuamente em uma aplicação harmônica (vide Exemplo 3).

O Problema 1 envolve questões de existência, unicidade e minimização da energia da f em questão (vide Exemplo 2). A condição $\hat{f} = 0$ é um sistema de equações diferenciais parciais de segunda ordem (isto é, o sistema contém as funções incógnitas f_1, \dots, f_M e suas derivadas parciais até a segunda ordem). Embora seja basicamente um problema de análise, o interesse do Problema 1 para a geometria está ligado, por um lado, ao fato de que as condições para a sua solução devem ser expressas em termos da geometria de M^n e \tilde{M}^m e, por outro lado, à influência que ele pode ter na solução do Problema 2.

O Problema 2 tem recebido considerável atenção e alguns de seus casos particulares foram resolvidos. Daremos algumas informações sobre o Problema 2, deixando de lado, inteiramente, o Problema 1.

No que se segue, a não ser que mencionado explicitamente, M^n e \tilde{M}^m são variedades riemannianas compactas e S^n indicará a esfera unitária de \mathbb{R}^{n+1} .

A) Caso em que $M^n = S^1$

As aplicações harmônicas $f: S^1 \rightarrow \tilde{M}^m$ são as geodésicas fechadas de \tilde{M}^m (convém incluir as aplicações constantes como geodésicas fechadas, ditas *triviais*). Elie Cartan demonstrou que toda aplicação contínua $f: S^1 \rightarrow \tilde{M}^m$ pode ser deformada continuamente em uma geodésica fechada (que pode ser trivial, se toda curva fechada de \tilde{M}^m for deformável continuamente a um ponto). Em verdade, é possível provar mais, a saber, que toda variedade riemanniana compacta contém uma geodésica fechada não trivial (Fet e Lusternik, vide [1]).

B) Caso em que \tilde{M}^m tem curvatura negativa

A curvatura seccional de uma variedade riemanniana M é definida do seguinte modo. Seja $p \in M$ e seja $\sigma \subset T_p(M)$ um subespaço de dimensão dois do espaço tangente $T_p(M)$. Considere segmentos de comprimentos ε (suficientemente pequeno) das geodésicas que saem de p e são tangentes a σ . A curvatura seccional $K(p, \sigma)$ é o limite

$$K(p, \sigma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3}{\pi} \frac{2\pi\varepsilon - L}{\varepsilon^3},$$

onde L é o comprimento da curva fechada em M descrita pelas extremidades das geodésicas consideradas. Dizer, portanto, que $K(p, \sigma) < 0$ é dizer que as geodésicas que saem de p tangentes a σ se afastam mais rapidamente do que as retas de σ que saem da origem.

No caso B), um resultado fundamental devido a Eells e Sampson [7] afirma que toda aplicação contínua $f: M^n \rightarrow \tilde{M}^m$ é deformável continuamente em uma aplicação harmônica que realiza um mínimo absoluto da energia.

A condição de ser negativa a curvatura seccional de \tilde{M}^m é, entretanto, muito forte. Ela implica, por exemplo, que se \tilde{M}^m é completa, não compacta, e tem a propriedade que toda curva fechada em \tilde{M}^m pode ser continuamente deformada em um ponto, então toda aplicação contínua de S^2 em \tilde{M}^m ($m \geq 2$) pode ser deformada continuamente em uma aplicação constante (logo harmônica).

O método utilizado no trabalho de Eells-Sampson é essencialmente o seguinte. Procura-se uma aplicação f com $\hat{f} = 0$. Toma-se um f_0 qualquer como condição inicial e considera-se a equação $\hat{f}(p, t) = \frac{\partial f}{\partial t}$, t um parâmetro real, na “variedade produto” $M^n \times \mathbb{R}$ (esta equação é o sistema parabólico associado ao sistema elíptico $\hat{f} = 0$). A dificuldade é provar que a equação $\hat{f}(p, t) = \frac{\partial f}{\partial t}$ tem uma única solução para todo $t \in \mathbb{R}$, satisfazendo a condição inicial $f(p, 0) = f_0$, e que, quando $t \rightarrow \infty$, a solução obtida tende para uma solução de $\hat{f} = 0$. Fisicamente, a equação $\hat{f}(p, t) = \frac{\partial f}{\partial t}$ representa uma distribuição instável de energia, a qual tende para um estado estacionário quando $t \rightarrow \infty$.

C) Caso em que \tilde{M}^m tem curvatura qualquer

Neste caso, os resultados são extremamente incompletos. Para começar, existem exemplos de aplicações $f: S^n \rightarrow S^n$, $n \geq 3$, que não podem ser deformadas em aplicações constantes mas têm energias arbitrariamente pequenas (vide [7], pg. 131). Portanto, se tais aplicações puderem ser deformadas em aplicações harmônicas, estas últimas não serão mínimos absolutos da energia.

Não obstante, T. Smith [13] demonstrou que toda aplicação contínua $f: S^n \rightarrow S^n$, $n \leq 7$, pode ser deformada em uma aplicação harmônica.

Um resultado mais geral (porém de difícil aplicação) parece ser o seguinte, devido a J. Mitteau [11]. Existe um número real $\varepsilon > 0$ tal que se uma aplicação diferenciável $f: M^n \rightarrow \tilde{M}^m$ satisfaz

$$\sup_{p \in M} e(f)(p) < \varepsilon,$$

onde $e(f)$ é a densidade de energia de f , então f pode ser continuamente deformado em uma aplicação harmônica.

É possível mostrar que se \tilde{M}^m tem curvatura negativa o ε acima pode ser tomado como $+\infty$. Este teorema contém, portanto, o resultado de Eells-Sampson como caso particular.

No caso em que M e \tilde{M} têm ambas dimensão dois podemos dizer muito mais. O problema foi tratado por L. Lemaire [10], que demonstrou o seguinte¹: exceto para o caso $\tilde{M}^2 = S^2$, toda aplicação contínua $f: M^2 \rightarrow \tilde{M}^2$ pode ser continuamente deformada em uma aplicação harmônica que é um mínimo absoluto de energia.

O caso em que $M = S^2$ e \tilde{M}^m é qualquer é possivelmente o caso mais interessante. Primeiro, porque a equação de definição de uma aplicação harmônica se simplifica quando tomamos em S^2 coordenadas dadas pela projeção estereográfica de S^2 em um plano (tais coordenadas são chamadas *isotérmicas*). Sejam (u, v) coordenadas isotérmicas em S^2 e seja

$$f(u, v) = (f_1(u, v), \dots, f_m(u, v))$$

a expressão de uma aplicação diferenciável $f: S^2 \rightarrow \tilde{M}^m$ em termos de (u, v) e de uma parametrização de

¹ Agradeço a F. Dumortier por ter me chamado a atenção para a referência [10].

\tilde{M}^m . Então a condição de f ser harmônica se traduz no sistema de segunda ordem (cf. [2])

$$\frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial v^2} \right) + \sum_{j,k=1}^m \Gamma_{jk}^i \left(\frac{\partial f_j}{\partial u} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial u} + \frac{\partial f_j}{\partial v} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial v} \right) = 0, \\ i = 1, \dots, m,$$

onde os Γ_{jk}^i são definidos por meio dos vetores básicos X_i da parametrização de \tilde{M}^m e da derivada covariante D de \tilde{M}^m por

$$D_{X_j} X_k = \sum_{i=1}^m \Gamma_{jk}^i X_i,$$

e λ^2 é dado pela métrica $ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2)$ de S^2 .

Segundo, porque este caso se relaciona com o seguinte resultado devido a S. S. Chern [3]. Se $f: S^2 \rightarrow \tilde{M}^m$ é uma imersão (isto é, uma aplicação diferenciável com diferencial injetiva) harmônica, então f é uma imersão mínima, no sentido de que uma região $\bar{D} \subset S^2$ é um ponto crítico para a função área de qualquer variação de $f: \bar{D} \rightarrow \tilde{M}^m$. É provável que este resultado se estenda a uma aplicação harmônica (não necessariamente imersão) de S^2 em \tilde{M}^m . Daí decorreria que a existência de uma aplicação harmônica de S^2 em \tilde{M}^m implicaria na existência de uma superfície mínima em \tilde{M}^m homeomorfa a S^2 , com possíveis pontos de ramificação ²

As aplicações harmônicas entre variedades riemannianas, das quais demos apenas alguns exemplos motivadores e uma definição mais intuitiva que a usual, continuam sendo um tópico interessante de pesquisa. Referimos o leitor ao Capítulo 8 do livro [9] e ao artigo [6].

Referências

- [1] AL'BER, S. I. The topology of functional manifolds, and the calculus of variations in the large. *Russian Mathematical Surveys*, v. 25, n. 4, p. 51–117, 1970.
- [2] BOCHNER, S. Harmonic surfaces in Riemann metric. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 47, p. 146–154, 1940.
- [3] CHERN, S. S.; GOLDBERG, S. On the volume decreasing property of a class of real harmonic mappings. *American Journal of Mathematics*, v. 97, p. 133–147, 1975.

- [4] DO CARMO, M. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, c2008. (Textos Universitários)
- [5] EELLS, J.; LEMAIRE, L. A report on harmonic maps. *Bulletin of the London Mathematical Society*, v. 10, n. 1, p. 1–68, 1978.
- [6] EELLS, J.; LEMAIRE, L. Another report on harmonic maps. *Bulletin of the London Mathematical Society*, v. 20, n. 5, p. 385–524, 1988.
- [7] EELLS, J.; SAMPSON, J. H. Harmonic maps of Riemann manifolds. *American Journal of Mathematics*, v. 86, p. 109–160, 1964.
- [8] FIGUEIREDO, D. G. *O problema de Dirichlet*. Brasília: UnB, 1975. (Trabalhos de Matemática, 89)
- [9] JOST, J. *Riemannian geometry and geometric analysis*. 2. ed. Berlin: Springer, 1998. (Universitext)
- [10] LEMAIRE, L. Applications harmoniques des surfaces. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie de Sciences. Séries A-B*, v. 280, n. 13A, p. A897–A899, 1975.
- [11] MITTEAU, J.-C. Sur les applications harmoniques. *Journal of Differential Geometry*, v. 9, p. 41–54, 1974.
- [12] SACKS, J.; UHLENBECK, K. The existence of minimal immersions of 2-spheres. *Annals of Mathematics (2)*, v. 113, n. 1, p. 1–24, 1981.
- [13] SMITH, R. T. Harmonic mappings of spheres. *American Journal of Mathematics*, v. 97, p. 364–385, 1975.

Manfredo P. do Carmo
 IMPA
 manfredo@impa.br

² Esse resultado foi obtido em [12].