O Lema de Regularidade de Szemerédi

Yuri Lima

University of Maryland, EUA

O Lema de Regularidade de Szemerédi é uma ferramenta importante em matemática discreta, especialmente em teoria dos grafos e combinatória aditiva. Em poucas palavras, ele diz que um grafo com muitas arestas pode ser aproximado por um grafo aleatório e, portanto, propriedades robustas de grafos aleatórios também valem para grafos com muitas arestas. Esse é o caso do Lema de Remoção de Triângulos que, como observado por Ruzsa e Szemerédi (13), implica o Teorema de Roth sobre a existência de progressões aritméticas de tamanho 3 em subconjuntos de inteiros com densidade positiva. Outras consequências aqui apresentadas são o Teorema dos Cantos e o Lema de Remoção de Grafos.

1 Combinatória aditiva

"Combinatória aditiva é a teoria que estuda estruturas aditivas em conjuntos."

Terence Tao e Van Vu [17].

Desde a última década, a combinatória aditiva passa por um notável avanço, em particular devido à sua interação com outras áreas da matemática, das quais citamos teoria dos números, teoria ergódica e teoria dos grafos. Nesta seção daremos uma breve introdução histórica de seus principais resultados.

O Teorema de Van der Waerden [18], uma das "Três pérolas em teoria dos números" de Khinchin [10], afirma que, independentemente de como particionamos os números naturais em finitos grupos (ou, como comumente dizemos, cada número natural é pintado com uma dentre finitas cores), um dos grupos contém progressões aritméticas de qualquer tamanho finito. Quer dizer, a estrutura dos números naturais não é destruída por partições: um dos grupos contém cópias semelhantes de qualquer configuração finita dos números naturais. Provado em 1927, o Teorema de Van der Waerden é o primeiro resultado notável em combinatória aditiva. Mais tarde, na década de 30, Erdös e Turán [5] conjecturaram um análogo desse teorema para conjuntos de densidade superior positiva.

Definição 1.1. Dado um conjunto $A \subset \mathbb{N}$, a *densidade superior* de A é igual a

$$\overline{\mathrm{d}}(A) := \limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{1,2,\ldots,n\}|}{n}.$$

Um conjunto tem densidade superior positiva se ele ocupa uma fração positiva dos números naturais, e por isso Erdös e Turán perguntaram se tais conjuntos herdam propriedades aditivas dos números naturais: se $\overline{\mathrm{d}}(A) > 0$, então A possui progressões aritméticas de qualquer tamanho finito? Essa recalcitrante pergunta foi respondida (afirmativamente) apenas em 1975, por Szemerédi [16]. Antes disso, o primeiro resultado parcial da conjectura foi obtido por Roth [12] em 1953.

Teorema 1.2 (Roth)**.** *Se $A \subset \mathbb{N}$ tem densidade superior positiva, então A contém progressões aritméticas de tamanho* 3.

A prova original do Teorema de Roth usa um argumento de análise de Fourier chamado **incremento de energia**: uma função f é decomposta em $b + r$, onde b é a componente "boa" e r é a componente "ruim", em um senso específico[1]. Sempre que o efeito da componente r for grande, é possível quebrá-la em uma componente boa e outra componente ruim, e assim sucessivamente. Em cada passo a "energia" de r cresce pelo menos uma quantidade fixa. Se a componente r inicial tem energia finita, então o processo termina após uma quantidade finita de passos. Nesse momento, a componente b controla o comportamento de f, e é fácil estabelecer o resultado para b. Veja [3] para mais detalhes.

Em 1969, Szemerédi [15] estendeu o Teorema de Roth para progressões de tamanho 4.

Teorema 1.3 (Szemerédi)**.** *Se $A \subset \mathbb{N}$ tem densidade superior positiva, então A contém progressões aritméticas de tamanho* 4*.*

Finalmente, em 1975, Szemerédi confirmou a conjectura em sua forma geral.

Teorema 1.4 (Szemerédi)**.** *Se $A \subset \mathbb{N}$ tem densidade superior positiva, então A contém progressões aritméticas de qualquer tamanho finito.*

Para confirmar a conjectura, Szemerédi obteve um resultado em teoria dos grafos, comumente chamado **Lema de Regularidade de Szemerédi**, que tem demonstrado ser um resultado muito útil. Ele diz, em poucas palavras, que qualquer grafo pode ser decomposto em uma quantidade relativamente pequena de subgrafos disjuntos, a maioria deles tendo um comportamento pseudo-aleatório. O lema de regularidade é o tema principal dessas notas.

Vale mencionar que Erdös e Turán também conjecturaram que se $A \subset \mathbb{N}$ satisfaz

$$\sum_{n \in A} \frac{1}{n} = \infty$$

então A contém progressões aritméticas de qualquer tamanho finito. Até hoje, a conjectura está completamente em aberto: não se sabe nem mesmo se A contém progressões aritméticas de tamanho 3. O único resultado nessa direção, que também representa uma das grandes façanhas matemáticas dos últimos quinze anos, foi dado por Green e Tao [9]: a conjectura é verdadeira quando A é o conjunto dos números primos[2].

Teorema 1.5 (Green e Tao)**.** *O conjunto dos números primos contém progressões aritméticas de qualquer tamanho finito.*

Para os interessados, a referência [3] possui uma prova completa desse teorema.

2 Definições

$G = (V, E)$ é um grafo, onde V é o conjunto (finito) de *vértices* e E é o conjunto de *arestas*, cada uma delas unindo dois elementos distintos de V. Dados $A, B \subset V$ disjuntos, $e(A, B)$ denota o número de arestas entre A e B, e

$$d(A, B) = \frac{e(A, B)}{|A| \cdot |B|}$$

é a *densidade* do par (A, B).

Definição 2.1. Dados $\varepsilon > 0$ e $A, B \subset V$ disjuntos, dizemos que o par (A, B) é *ε-regular* se para quaisquer $X \subset A$ e $Y \subset B$ satisfazendo

$$|X| \geq \varepsilon |A| \quad \text{e} \quad |Y| \geq \varepsilon |B|$$

vale que

$$|d(X, Y) - d(A, B)| < \varepsilon\,.$$

Uma partição $\mathcal{U} = \{V_0, V_1, \ldots, V_k\}$ de V em conjuntos disjuntos dois a dois, onde V_0 é chamado de *conjunto excepcional*, é chamada de *equipartição* se $|V_1| = \cdots = |V_k|$. No que segue, o conjunto excepcional é composto de $|V_0|$ partes distintas, cada uma delas consistindo de um único vértice, e seu papel é puramente técnico: fazer todos os outros subconjuntos terem a mesma cardinalidade.

Definição 2.2. Uma equipartição $V = V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_k$ é chamada *ε-regular* se

(a) $|V_0| \leq \varepsilon |V|$,

[1] Esse argumento segue a mesma filosofia do Teorema de Calderón-Zygmund em análise harmônica.

[2] A soma dos inversos dos números primos diverge.

(b) todos exceto no máximo εk^2 dos pares (V_i, V_j) são ε-regulares.

Cada V_i é chamado de *aglomerado* ou *grupo*. Dadas duas partições $\mathcal{U}, \mathcal{W}$ de V, dizemos que $\mathcal{U}$ *refina* $\mathcal{W}$ se todo aglomerado de $\mathcal{W}$ é igual à união de alguns aglomerados de $\mathcal{U}$.

3 Lema de Regularidade de Szemerédi

O Lema de Regularidade de Szemerédi diz que em todo grafo é possível apagar poucas arestas de maneira que o grafo resultante possua uma equipartição ε-regular. Um ponto de vista a ter em mente é o seguinte: essencialmente, qualquer grafo pode ser dividido em vários aglomerados, cada um deles com o mesmo número de vértices, onde a maioria dos pares de aglomerados se comporta simultaneamente de maneira

uniforme: as densidades não variam muito, e

aleatória: mesmo controlando as densidades, nada pode ser dito sobre a distribuição das arestas.

A título de exemplo, vamos descrever um modelo simples onde os dois conceitos acima são facilmente observados: tome $0 \leq p \leq 1$ e considere um grafo onde dois vértices quaisquer são adjacentes com probabilidade p. Se A, B são subconjuntos disjuntos de vértices, então a esperança de $d(A, B)$ é p, e o mesmo vale para subconjuntos $X \subset A$, $Y \subset B$. O lema de regularidade diz que, aproximadamente, esse comportamento é universal.

Teorema 3.1 (Lema de Regularidade de Szemerédi)**.** *Para quaisquer $\varepsilon > 0$ e inteiro positivo t, existem inteiros positivos $T(\varepsilon, t)$ e $N(\varepsilon, t)$ tais que qualquer grafo com pelo menos $N(\varepsilon, t)$ vértices possui uma equipartição ε-regular $(V_0, V_1, \ldots, V_k)$, onde $t \leq k \leq T(\varepsilon, t)$.*

Observe a importância de se ter uma cota superior para o número de aglomerados. Caso contrário, poderíamos apenas tomar cada um deles consistindo de um vértice.

A ideia da prova é semelhante ao argumento usado por Roth [12]. Começamos com uma partição arbitrária de V em t grupos disjuntos $V_1, \ldots, V_t$ cujas cardinalidades diferem em no máximo uma unidade. Mostramos que, sempre que a partição não é ε-regular, ela pode ser refinada de maneira a diminuir as diferenças entre as densidades. Isso é feito por meio de uma *função energia* que aumenta pelo menos uma quantidade fixa sempre que o refinamento é executado. Após uma quantidade finita de refinamentos, a partição resultante necessariamente é ε-regular.

Vamos definir a função energia. Para isso, vamos identificar e reinterpretar a obstrução de um par (U, W) ser ε-regular. Se (U, W) não é ε-regular, então existem subconjuntos $U_1 \subset U$ e $W_1 \subset W$ tais que $|U_1| \geq \varepsilon|U|$, $|W_1| \geq \varepsilon|W|$ e

$$|d(U_1, W_1) - d(U, W)| > \varepsilon\,.$$

Considere as partições $\mathcal{U} = \{U_1, U \backslash U_1\}$ e $\mathcal{W} = \{W_1, U \backslash W_1\}$. A desigualdade acima tem a seguinte interpretação probabilística. Considere a variável aleatória Z definida em $U \times W$ por: seja u um elemento aleatório de U e w um elemento aleatório de W, sejam $A \in \mathcal{U}$ e $B \in \mathcal{W}$ os elementos das respectivas partições com $u \in A$ e $w \in B$, e tome

$$Z(u, w) := d(A, B)\,.$$

A esperança de Z é

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] &= \sum_{\substack{A \in \mathcal{U} \\ B \in \mathcal{W}}} \frac{|A|}{|U|} \cdot \frac{|B|}{|W|} \cdot d(A, B) \\
&= \frac{1}{|U| \cdot |W|} \sum_{\substack{A \in \mathcal{U} \\ B \in \mathcal{W}}} e(A, B) \\
&= d(U, W).
\end{aligned}$$

Por hipótese, Z difere de $\mathbb{E}[Z]$ pelo menos ε sempre que $u \in U_1$, $w \in W_1$ e esse evento tem probabilidade

$$\frac{|U_1|}{|U|} \cdot \frac{|W_1|}{|W|} \geq \varepsilon^2\,.$$

Portanto $\mathrm{Var}[Z] \geq \varepsilon^4$. Observando que a esperança de Z^2 é

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z^2] &= \sum_{\substack{A \in \mathcal{U} \\ B \in \mathcal{W}}} \frac{|A|}{|U|} \cdot \frac{|B|}{|W|} \cdot d^2(A, B) \\
&= \frac{1}{|U| \cdot |W|} \sum_{\substack{A \in \mathcal{U} \\ B \in \mathcal{W}}} \frac{e^2(A, B)}{|A| \cdot |B|}\,,
\end{aligned}$$

concluímos que

$$\mathbb{E}[Z^2] \geq \mathbb{E}[Z]^2 + \varepsilon^4$$
$$\frac{1}{|U|\cdot|W|}\sum_{\substack{\mathbf{A}\in\mathcal{U}\\ \mathbf{B}\in\mathcal{W}}}\frac{\mathbf{e^2(A,B)}}{|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|} \geq \frac{1}{|U|\cdot|W|}\cdot\frac{\mathbf{e^2(U,W)}}{|\mathbf{U}|\cdot|\mathbf{W}|}+\varepsilon^4. \tag{3.1}$$

O termo em negrito acima representa a função energia que procuramos: dados dois subconjuntos disjuntos $A, B \subset V$, definimos

$$q(A,B) = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{e^2(A,B)}{|A|\cdot|B|} = \frac{|A|\cdot|B|}{n^2}\cdot d^2(A,B)\,.$$

Para partições $\mathcal{U}, \mathcal{W}$, seja

$$q(\mathcal{U},\mathcal{W}) = \sum_{\substack{A\in\mathcal{U}\\ B\in\mathcal{W}}} q(A,B)\,.$$

Definição 3.2. Dada uma partição $\mathcal{U}$ de V com conjunto excepcional V_0, o *índice* de $\mathcal{U}$ é

$$q(\mathcal{U}) = \sum_{A,B\in\mathcal{U}} q(A,B)\,,$$

onde a soma ocorre sobre todos os pares não-ordenados de aglomerados distintos A, B de $\mathcal{U}$ e cada vértice de V_0 define um aglomerado.

O índice de $\mathcal{U} = \{V_0, V_1, \ldots, V_k\}$ é a soma de $\binom{k+|V_0|}{2}$ termos da forma $q(A,B)$. A primeira boa propriedade que o índice tem é ser limitado.

Propriedade 1. $q(\mathcal{U}) \leq 1/2$.

De fato, como $d(A,B) \leq 1$,

$$\begin{aligned} q(\mathcal{U}) &\leq \frac{1}{n^2}\sum_{\substack{A,B\in\mathcal{U}\\ A\neq B}}|A|\cdot|B| \\ &\leq \frac{1}{2n^2}\left(\sum_{A\in\mathcal{U}}|A|\right)\left(\sum_{B\in\mathcal{U}}|B|\right) \\ &= \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

O índice também é não-decrescente com respeito a refinamentos. Esse é o conteúdo das próximas duas propriedades.

Propriedade 2. Se U, W são subconjuntos de V e $\mathcal{U}, \mathcal{W}$ são partições de U, W, então $q(\mathcal{U},\mathcal{W}) \geq q(U,W)$.

Essa propriedade pode ser provada analiticamente por aplicações da desigualdade de Cauchy-Schwarz[3]. Aqui apresentamos um argumento probabilístico, com a ajuda da variável aleatória Z. Pelos cálculos feitos acima,

$$\mathbb{E}[Z]^2 = \frac{n^2}{|U|\cdot|W|}\cdot q(U,W)$$

e

$$\mathbb{E}[Z^2] = \frac{n^2}{|U|\cdot|W|}\cdot q(\mathcal{U},\mathcal{W})$$

e, portanto, pela desigualdade de Jensen,

$$\mathbb{E}[Z^2] \geq \mathbb{E}[Z]^2 \quad\Longrightarrow\quad q(\mathcal{U},\mathcal{W}) \geq q(U,W)\,.$$

Propriedade 3. Se $\mathcal{U}'$ refina $\mathcal{U}$, então $q(\mathcal{U}') \geq q(\mathcal{U})$.

A Propriedade 3 segue da Propriedade 2 se separarmos $q(\mathcal{U}')$ de acordo com $\mathcal{U}$:

$$\begin{aligned} q(\mathcal{U}') &= \sum_{A',B'\in\mathcal{U}'} q(A',B') \\ &= \sum_{A,B\in\mathcal{U}}\sum_{\substack{A'\subset A\\ B'\subset B}} q(A',B') \\ &= \sum_{A,B\in\mathcal{U}} q(\mathcal{U}'\cap A, \mathcal{U}'\cap B) \\ &\geq \sum_{A,B\in\mathcal{U}} q(A,B) \\ &= q(\mathcal{U})\,. \end{aligned}$$

A próxima propriedade é a mais importante de todas e reflete a escolha correta da função energia: se uma partição não é ε-regular, então ela possui um refinamento cujo índice cresce pelo menos uma quantidade fixa. Em poucas palavras, ela diz que

"A falta de uniformidade implica em incremento de energia"

e essa ideia permeia vários progressos recentes em combinatória, análise harmônica, teoria ergódica e áreas afins. Ademais, todas as provas conhecidas do Teorema de Szemerédi usam esse princípio em algum estágio. Abaixo mencionamos algumas delas:

[3] O leitor interessado pode checar em [11].

1. A prova original de Roth [12] considera componentes boas e ruins de funções.

2. A prova ergódica de Furstenberg [7] mostra que todo sistema não-compacto tem um fator weak mixing.

3. A prova Fourier-analítica de Gowers [8] identifica progressões aritméticas por meio das *normas de Gowers*.

4. A construção de fatores característicos para médias ergódicas múltiplas usa as *seminormas de Gowers-Host-Kra*.

Esses dois últimos resultados são recentes e ainda em processo de desenvolvimento. Espera-se que eles sejam base para uma *análise de Fourier de ordem superior*. Agora voltemos ao que interessa.

Proposição 3.3 (Falta de uniformidade implica incremento de energia — 1)**.** *Sejam $\varepsilon > 0$ e $\emptyset \neq U, W \subset V$ disjuntos tais que o par (U, W) não é ε-regular. Então existem partições $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ de U e $\mathcal{W} = \{W_1, W_2\}$ de W tais que*

$$q(\mathcal{U}, \mathcal{W}) > q(U, W) + \varepsilon^4 \cdot \frac{|U| \cdot |W|}{n^2}\,.$$

Demonstração. A prova é exatamente a relação (3.1). Para o leitor ainda não convencido, vamos refazer as contas. Suponha que $U_1 \subset U$, $W_1 \subset W$ satisfazem $|U_1| \geq \varepsilon|U|$, $|W_1| \geq \varepsilon|W|$ e

$$|d(U_1, W_1) - d(U, W)| > \varepsilon\,.$$

Considere $\mathcal{U} = \{U_1, U \backslash U_1\}$ e $\mathcal{W} = \{W_1, W \backslash W_1\}$. O cálculo da variância de Z provará a proposição. Por um lado, os cálculos da Propriedade 2 dão que

$$\operatorname{Var}[Z] = \frac{n^2}{|U| \cdot |W|} \left\{q(\mathcal{U}, \mathcal{W}) - q(U, W)\right\}\,. \tag{3.2}$$

Por outro lado, Z desvia de $\mathbb{E}[Z]$ pelo menos ε sempre que $u \in U_1$, $w \in W_1$, e esse evento tem probabilidade

$$\frac{|U_1|}{|U|} \cdot \frac{|W_1|}{|W|} \geq \varepsilon^2\,.$$

Portanto $\operatorname{Var}[Z] \geq \varepsilon^4$ que, juntamente com (3.2), implica em

$$\begin{aligned} q(\mathcal{U}, \mathcal{W}) - q(U, W) &\geq \varepsilon^4 \cdot \frac{|U| \cdot |W|}{n^2} \\ \implies \quad q(\mathcal{U}, \mathcal{W}) &\geq q(U, W) + \varepsilon^4 \cdot \frac{|U| \cdot |W|}{n^2}\,. \end{aligned}$$

□

Proposição 3.4 (Falta de uniformidade implica incremento de energia — 2)**.** *Sejam $0 < \varepsilon < 1/4$ e $\mathcal{U} = \{V_0, V_1, \ldots, V_k\}$ uma equipartição de V que não é ε-regular, onde V_0 é o conjunto excepcional. Então existe um refinamento $\mathcal{U}' = \{V_0', V_1', \ldots, V_l'\}$ de $\mathcal{U}$ com as seguintes propriedades:*

(i) $\mathcal{U}'$ *é uma equipartição de* V*,*

(ii) $k < l < k \cdot 8^k$,

(iii) $|V_0'| \leq |V_0| + n/2^k$ *e*

(iv) $q(\mathcal{U}') \geq q(\mathcal{U}) + \varepsilon^5/2$.

Demonstração. A ideia é aplicar a Proposição 3.3 para cada par não-regular. Como existem pelo menos εk^2 de tais pares, o índice crescerá pelo menos uma quantidade fixa. Seja $c = |V_1| = \cdots = |V_k|$. Dizer que $\mathcal{U}$ não é ε-regular significa dizer que, para pelo menos εk^2 pares (i, j), $1 \leq i < j \leq k$, (V_i, V_j) não é ε-regular. Para cada um desses, sejam $\mathcal{U}_{ij}, \mathcal{U}_{ji}$ as partições de V_i, V_j, respectivamente, dadas pela Proposição 3.3 e $\mathcal{W}$ a menor partição que refina $\mathcal{U}$ e todos $\mathcal{U}_{ij}, \mathcal{U}_{ji}$. Temos

$$\begin{aligned} q(\mathcal{W}) &\geq q(\mathcal{U}) + \varepsilon k^2 \cdot \left(\varepsilon^4 \cdot \frac{c^2}{n^2}\right) \\ &= q(\mathcal{U}) + \varepsilon^5 \cdot \left(\frac{kc}{n}\right)^2 \\ &\geq q(\mathcal{U}) + \frac{\varepsilon^5}{2} \end{aligned}$$

uma vez que $kc = n - |V_0| \geq n/2$. Isso prova que $\mathcal{W}$ (e qualquer um de seus refinamentos) satisfaz (iv). O problema é que $\mathcal{W}$ não é, a princípio, uma equipartição. Nós ajustamos isso definindo $b = \lfloor c/4^k \rfloor$, particionando cada aglomerado de $\mathcal{W}$ em subconjuntos disjuntos de tamanho b e jogando os vértices que sobrarem, se existirem, no conjunto excepcional. Essa nova partição

$\mathcal{U}'$ obtida satisfaz (i), (ii) e (iii), conforme verificaremos abaixo.

(i) $\mathcal{U}'$ é uma equipartição por definição.

(ii) Para obter $\mathcal{W}$, cada aglomerado de $\mathcal{U}$ foi dividido em no máximo 2^{k-1} partes. Após isso, cada elemento de $\mathcal{W}$ foi dividido em no máximo 4^k partes não-excepcionais. Isso implica que

$$l \leq k \cdot 2^{k-1} \cdot 4^k < k \cdot 8^k .$$

(iii) Cada aglomerado de $\mathcal{W}$ contribui com no máximo b vértices para V_0', donde

$$\begin{aligned} |V_0'| &\leq |V_0| + b \cdot \left(k \cdot 2^{k-1}\right) \\ &\leq |V_0| + kc \cdot \frac{2^{k-1}}{4^k} \\ &< |V_0| + \frac{n}{2^k} . \end{aligned}$$

□

Estamos, finalmente, prontos para provar o Lema de Regularidade de Szemerédi.

Prova do Teorema 3.1. Primeiramente, note que se o resultado é válido para (ε, t) e $\varepsilon' > \varepsilon$, $t' < t$, então ele também é válido para (ε', t'). Logo podemos supor, sem perda de generalidade, que $\varepsilon < 1/4$ e t/ε é arbitrariamente grande.

Comece com uma partição arbitrária $\mathcal{U} = \{V_0, V_1, \ldots, V_t\}$ de V tal que $|V_0| \leq \lfloor n/t \rfloor$ e $|V_1| = \cdots = |V_t| = \lfloor n/t \rfloor$. Aplique a Proposição 3.4 no máximo ε^{-5} vezes de modo a obter uma equipartição $\mathcal{U}'$. Seja $T(\varepsilon, t)$ o número obtido por no máximo ε^{-5} iterações sucessivas da função $x \mapsto x \cdot 8^x$, iniciando de t. Então $\mathcal{U}'$ tem no máximo $T(\varepsilon, t)$ aglomerados. Ademais, a cardinalidade do conjunto excepcional V_0' é no máximo

$$|V_0'| \leq |V_0| + \frac{1}{\varepsilon^5} \cdot \frac{n}{2^t} \leq \left\lfloor \frac{n}{t} \right\rfloor + \frac{n}{2^t \varepsilon^5} ,$$

que é menor do que εn para t grande. Isso conclui a prova. □

Grande parte das aplicações do lema de regularidade lidam com problemas extremais, em que adicionar arestas ajuda a obter o resultado. Em tais aplicações, tomamos um grafo inicial e aplicamos o lema de regularidade para criar uma partição regular. Depois descartamos as arestas dentro de um mesmo aglomerado, as arestas ligando pares de aglomerados não-regulares e as arestas ligando pares de aglomerados com densidade pequena. O que sobra é um grafo “puro” bem mais fácil de lidar do que o original e que ainda contém a maioria das arestas do grafo original. É assim que procederemos daqui em diante.

4 Lema de Remoção de Triângulos

O Lema de Remoção de Triângulos afirma um fato intuitivo e ao mesmo tempo não-trivial: se precisamos apagar pelo menos εn^2 arestas de um grafo com n vértices de modo a destruir todos os triângulos existentes, então o grafo contém pelo menos δn^3 triângulos, onde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$. Ingenuamente, a primeira conclusão é que o grafo contém pelo menos εn^2 triângulos. A força do Lema de Remoção de Triângulos é que, ao invés de quadrático, o número de triângulos é cúbico. Esse resultado foi originalmente provado por Ruzsa e Szemerédi [13]. Eles também observaram que o lema de remoção implica o Teorema de Roth, conforme veremos na próxima seção.

Definição 4.1. Dado $\varepsilon > 0$, dizemos que o grafo $G = (V, E)$ é *ε-longe de ser livre de triângulos* se é necessário apagar pelo menos $\varepsilon |V|^2$ arestas de G de modo a destruir todos os triângulos existentes.

Em particular, todo grafo ε-longe de ser livre de triângulos possui pelo menos um triângulo (de fato, como observado acima, pelo menos $\varepsilon |V|^2$ deles).

Teorema 4.2 (Lema de Remoção de Triângulos)**.** *Dado $0 < \varepsilon < 1$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que qualquer grafo ε-longe de ser livre de triângulos tem pelo menos $\delta |V|^3$ triângulos.*

Demonstração. Seja $G = (V, E)$ um grafo ε-longe de ser livre de triângulos e $|V| = n$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $n > N(\varepsilon/4, \lfloor 4/\varepsilon \rfloor)$: basta tomarmos δ suficientemente pequeno de modo que

$$\delta \cdot N(\varepsilon/4, \lfloor 4/\varepsilon \rfloor)^3 < 1\,.$$

Considere a partição $\varepsilon/4$-regular $\mathcal{U} = \{V_0, V_1, \ldots, V_k\}$ dada pelo Teorema 3.1. Sejam $c = |V_1| = \cdots = |V_k|$ e G' o grafo obtido a partir de G pela exclusão das seguintes arestas:

- Todas as arestas incidentes em V_0: no máximo $\varepsilon n^2/4$ arestas.

- Todas as arestas dentro dos aglomerados $V_1, \ldots, V_k$: o número máximo de arestas apagadas é

$$c^2 \cdot k < \frac{n^2}{k} < \frac{\varepsilon n^2}{4}\,.$$

- Todas as arestas de pares irregulares: no máximo

$$\left(\frac{\varepsilon}{4}k^2\right) \cdot c^2 < \frac{\varepsilon n^2}{4}$$

  arestas são apagadas.

- Todas as arestas unindo aglomerados com densidade menor que $\varepsilon/2$: no máximo

$$\binom{k}{2} \cdot \frac{\varepsilon c^2}{2} < \frac{\varepsilon n^2}{4}$$

  arestas.

O número total de arestas apagadas é menor que εn^2 e, portanto, G' **possui um triângulo**. Os três vértices que definem tal triângulo pertencem a três aglomerados remanescentes distintos[4], digamos V_1, V_2, V_3. Vamos mostrar que esses três aglomerados de fato possuem muitos triângulos.

[4] A existência de um triângulo é meramente usada para garantir a existência de V_1, V_2 e V_3.

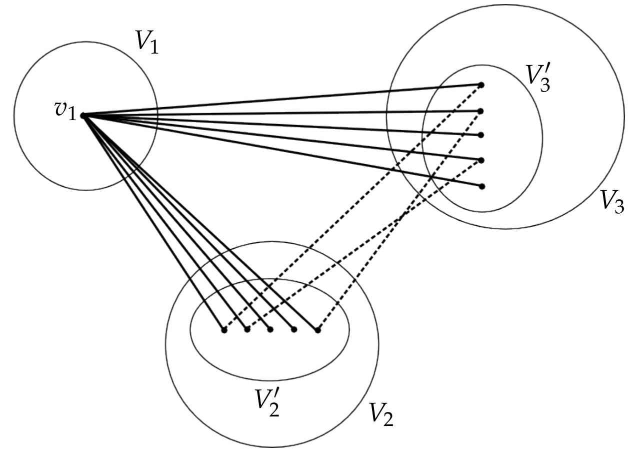

Figura 1: Cada aresta pontilhada gera um triângulo.

Dizemos que um vértice $v_1 \in V_1$ é *típico* se ele é adjacente a pelo menos $\varepsilon c/4$ vértices em V_2 e adjacente a pelo menos $\varepsilon c/4$ vértices em V_3. Como, por hipótese,

$$d\left(V_i', V_j'\right) \geq \frac{\varepsilon}{4} \tag{4.1}$$

sempre que $V_i' \subset V_i$, $V_j' \subset V_j$ têm pelo menos $\varepsilon c/4$ elementos, pelo menos $c/2$ vértices de V_1 são típicos. De fato, o número de vértices em V_1 com pelo menos $\varepsilon c/4$ vértices adjacentes em V_2 é maior que $(1 - \varepsilon/4)c$. Se esse não fosse o caso, o subconjunto $V_1' \subset V_1$ de vértices não-típicos teria pelo menos $\varepsilon c/4$ elementos e

$$d\left(V_1', V_2\right) < \frac{|V_1'| \cdot \frac{\varepsilon c}{4}}{|V_1'| \cdot |V_2|} = \frac{\varepsilon}{4}\,,$$

contradizendo (4.1). Dado que o mesmo argumento vale para V_3, o número de vértices típicos em V_1 é pelo menos

$$\left(1 - 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4}\right) \cdot c > \frac{c}{2}\,.$$

Seja $v_1 \in V_1$ um de tais vértices e considere os subconjuntos $V_2' \subset V_2$, $V_3' \subset V_3$ de vértices adjacentes a v_1.

Cada aresta entre V_2' e V_3' gera um triângulo (ver Fig. 1). O número de arestas entre V_2' e V_3' é pelo menos

$$e(V_2', V_3') \geq \frac{\varepsilon}{4} \cdot |V_2'| \cdot |V_3'| \geq \frac{\varepsilon^3 c^2}{4^3}\,.$$

Somando isso para todos $v_1 \in V_1$ típicos, G' tem pelo menos $(\varepsilon c/4)^3$ triângulos. Como $c > n/2T(\varepsilon/4, \lfloor 4/\varepsilon \rfloor)$, essa quantidade de triângulos é pelo menos

$$\left(\frac{\varepsilon}{4}\cdot\frac{n}{2T(\varepsilon/4,\lfloor 4/\varepsilon\rfloor)}\right)^3 = \left(\frac{\varepsilon}{8T(\varepsilon/4,\lfloor 4/\varepsilon\rfloor)}\right)^3\cdot n^3$$
$$= \delta(\varepsilon)\cdot n^3\,.$$

$\square$

4.1 Teorema de Roth

Como aplicação do Lema de Remoção de Triângulos, vamos provar o Teorema 1.2. Suponha que

$$|A\cap\{1,\dots,n\}| > \varepsilon n\,,\ \forall\, n\geq n_0\,.$$

Defina um grafo $G=(V,E)$ da seguinte maneira:

- $V = V_1\cup V_2\cup V_3$, onde V_1, V_2, V_3 têm $3n$ vértices rotulados de 1 a $3n$ cada.
- Existe uma aresta entre $i\in V_1$ e $j\in V_2$ se e somente se $j-i\in A$.
- Existe uma aresta entre $j\in V_2$ e $k\in V_3$ se e somente se $k-j\in A$.
- Existe um aresta entre $i\in V_1$ e $k\in V_3$ se e somente se $(k-i)/2\in A$.

Três vértices $i\in V_1, j\in V_2, k\in V_3$ formam um triângulo se e somente se

$$\begin{cases} j-i=a_1\in A\\ k-j=a_3\in A\\ \dfrac{k-i}{2}=a_2\in A\end{cases} \implies \begin{array}{l}(a_1,a_2,a_3)\text{ é uma progressão}\\ \text{aritmética em } A,\end{array}$$

isto é, triângulos em G identificam progressões aritméticas de tamanho 3 em A (ver Fig. 2), inclusive as progressões aritméticas triviais (a,a,a), $a\in A$. Existem mais do que $\varepsilon n\cdot n=\varepsilon n^2$ de tais triângulos triviais $i, i+a, i+2a$ e eles são dois a dois disjuntos. Esse simples fato garante que G é ε-longe de ser livre de triângulos e, portanto, pelo Lema de Remoção de Triângulos, G tem pelo menos δn^3 triângulos, pelo menos δn^3-81n^2 deles não-triviais. A prova está completa se tomarmos $n>81\delta^{-1}$.

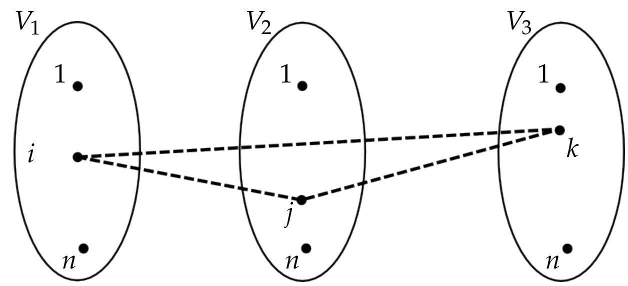

Figura 2: Cada triângulo no grafo G representa uma progressão aritmética de tamanho 3 em A.

4.2 Teorema dos Cantos

Esse resultado foi provado originalmente por Ajtai e Szemerédi [1]. A prova que apresentamos aqui utiliza o Lema de Remoção de Triângulos e foi obtida por Solymosi [14]. Convidamos o leitor a mostrar que o Teorema dos Cantos implica o Teorema de Roth.

Definição 4.3. Um *canto* é um triângulo retângulo isósceles em $\mathbb{Z}^2$ cujos catetos são paralelos aos eixos cartesianos, isto é, é um conjunto de três elementos disjuntos de $\mathbb{Z}^2$ da forma

$$(x,y), (x+h,y) \text{ e } (x,y+h)\,.$$

O Teorema dos Cantos diz que todo conjunto "grande" em $\mathbb{Z}^2$ possui um canto.

Teorema 4.4 (Teorema dos Cantos)**.** *Dado $\varepsilon>0$, existe $n>0$ tal que qualquer subconjunto de $\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,n\}$ com pelo menos εn^2 elementos possui um canto.*

Demonstração. Procedemos como na prova do Teorema de Roth. Seja A um subconjunto de $\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,n\}$ com pelo menos εn^2 elementos e considere o grafo tripartido $G=(V,E)$ como abaixo:

- $V = V_1\cup V_2\cup V_3$, onde V_1, V_2 e V_3 representam as retas horizontais, verticais e diagonais de $\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,n\}$, respectivamente.
- Existe uma aresta entre uma reta de V_i e uma reta de V_j se e somente se o ponto de intersecção entre as duas retas pertence a A.

G tem $|V_1| + |V_2| + |V_3| = n + n + 2n = 4n$ vértices. Os triângulos de G correspondem aos cantos de A, incluindo os cantos triviais $(x,y),(x,y),(x,y)$. G tem mais do que $|A| \geq \varepsilon n^2$ de tais triângulos triviais e eles são disjuntos dois a dois. Logo G é $\varepsilon/16$-longe de ser livre de triângulos. Pelo Lema de Remoção de Triângulos, G tem pelo menos δn^3 triângulos, sendo $\delta n^3 - n^2$ deles não-triviais. A prova está completa. □

5 Lema de Remoção de Grafos

O Lema de Remoção de Triângulos diz que todo grafo em que é necessário descartar uma fração positiva de suas arestas de modo a destruir todos os triângulos existentes possui uma fração positiva de triângulos. O fato é que, como provado por Erdös, Frankl e Rödl [4], ao invés de fixar a configuração "triângulo", o resultado também é válido se fixarmos qualquer outra configuração finita. Mais formalmente, seja H um grafo finito com h vértices e, analogamente, considere a seguinte

Definição 5.1. Dado $\varepsilon > 0$, o grafo $G = (V,E)$ é chamado *ε-longe de ser H-livre* se é necessário apagar pelo menos $\varepsilon|V|^2$ arestas de G de modo a destruir todas as cópias de H em G.

A extensão do Lema de Remoção de Triângulos é o Lema de Remoção de Grafos.

Teorema 5.2 (Lema de Remoção de Grafos). *Dado $0 < \varepsilon < 1$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que qualquer grafo ε-longe de ser H-livre contém pelo menos $\delta|V|^h$ cópias de H.*

A prova desse teorema é mais intricada do que a prova do Lema de Remoção de Triângulos. De fato, ela é sensível à estrutura de H. Se, por exemplo, H for um ciclo de tamanho 4, então o argumento aplicado na prova do Lema de Remoção de Triângulos não funciona: uma vez que as arestas "impuras" são descartadas, a cópia de H que permanece pode ter dois vértices em um mesmo aglomerado. Em outras palavras, as propriedades de conectividade de H influenciam na distribuição, ao longo dos aglomerados, dos vértices de um possível candidato a cópia de H em G. Como no Lema de Remoção de Triângulos, esse problema não ocorre se H é o grafo completo K_r de r vértices. Por essa razão, a prova do Lema de Remoção de Grafos será dividida em três partes:

Parte 1. Lema de Remoção de Grafos para K_r.

Parte 2. Observamos que, para um grafo H qualquer, a aplicação da mesma ideia da Parte 1 garante apenas a existência de r aglomerados, onde r é o número cromático de H.

Parte 3. Se aplicarmos a mesma ideia da Parte 1, permitindo a escolha de mais de um vértice em um mesmo aglomerado, obtemos o Lema de Remoção de Grafos para qualquer H.

A Parte 1 decorre da mesma linha de ideias usadas na prova do Lema de Remoção de Triângulos: limpamos o grafo de modo a obter um grafo "puro". A cópia remanescente de K_r está suportada em r aglomerados distintos, que de fato contêm muitas cópias de K_r. A construção de muitas cópias distintas de K_r no grafo "puro" segue novamente do fato da maioria dos vértices serem típicos, e é dada pelo seguinte lema.

Lema 5.3. *Se (A,B) é ε'-regular e $d(A,B) > \varepsilon$, então pelo menos $(1-\varepsilon')|A|$ vértices de A são adjacentes a pelo menos $(\varepsilon-\varepsilon')|B|$ vértices de B.*

Demonstração. Seja

$$A' = \{v \in A\,;\, v \text{ é adjacente a no máximo } (\varepsilon-\varepsilon')|B| \text{ vértices de } B\}\,.$$

Temos

$$d(A',B) < \frac{|A'|\cdot(\varepsilon-\varepsilon')|B|}{|A'|\cdot|B|} = \varepsilon - \varepsilon'\,. \tag{5.1}$$

Se $|A'| \geq \varepsilon'|A|$, a ε'-regularidade implica em

$$d(A',B) > d(A,B) - \varepsilon' > \varepsilon - \varepsilon'\,,$$

o que contradiz (5.1). □

Prova do Lema de Remoção de Grafos para K_r. Suponha que $G = (V,E)$ é um grafo ε- longe de ser K_r-livre com

$|V| = n > N((\varepsilon/6)^r, (\varepsilon/6)^{-r})$ vértices, e considere a partição $(\varepsilon/6)^r$-regular $\mathcal{U} = \{V_0, V_1, \dots, V_k\}$ dada pelo lema de regularidade. Sejam $c = |V_1| = \cdots = |V_k|$ e G' o grafo obtido a partir de G pelo descarte das seguintes arestas:

- Todas as arestas incidentes em V_0: no máximo $(\varepsilon/6)^r n^2$ arestas.

- Todas as arestas dentro dos aglomerados $V_1, \dots, V_k$: o número máximo de arestas apagadas é

$$c^2 \cdot k < \frac{n^2}{k} < (\varepsilon/6)^r n^2 .$$

- Todas as arestas de pares irregulares: no máximo

$$\left\{(\varepsilon/6)^r k^2\right\} \cdot c^2 < (\varepsilon/6)^r n^2$$

  arestas.

- Todas as arestas unindo aglomerados com densidade menor que $\varepsilon/3$: no máximo

$$\binom{k}{2} \cdot \frac{\varepsilon c^2}{3} < \frac{\varepsilon n^2}{3}$$

  arestas.

O total de arestas apagadas é menor que εn^2 e, portanto, G' **possui uma cópia de** K_r. Os vértices dessa cópia pertencem a r aglomerados remanescentes distintos, digamos $V_1, V_2, \dots, V_r$. Mostraremos que tais aglomerados posseum muitas cópias de K_r. Isso será feito em r passos: o passo i consiste em escolher um vértice $v_i \in V_i$ de modo que v_i é adjacente aos vértices $v_1, \dots, v_{i-1}$ escolhidos nos passos anteriores. Se existirem $\delta_i c$ maneiras de escolher v_i, onde δ_i não depende de n, então G' possui pelo menos

$$\begin{aligned}(\delta_1 c) \cdots (\delta_r c) &> \left(\frac{\delta_1 \cdots \delta_r}{2^r \cdot T((\varepsilon/6)^r, (\varepsilon/6)^{-r})^r}\right) \cdot n^r \\ &=: \delta \cdot n^r\end{aligned}$$

cópias de K_r e a prova estará completa.

Pelo Lema 5.3, pelo menos $\{1 - r \cdot (\varepsilon/6)^r\}|V_1|$ vértices de V_1 são adjacentes a pelo menos $\{\varepsilon/3 - (\varepsilon/6)^r\}|V_i|$ vértices em V_i, para cada $i = 2, \dots, r$. Seja v_1 um desses vértices e V_i^1 o subconjunto de V_i composto dos vértices adjacentes a v_1, $i = 2, \dots, r$. Temos

$$|V_i^1| \geq \left\{\frac{\varepsilon}{3} - \left(\frac{\varepsilon}{6}\right)^r\right\} |V_i| > \left(\frac{\varepsilon}{6}\right) |V_i|$$

e, portanto, qualquer par de aglomerados dentre $V_2^1, \dots, V_r^1$ é $(\varepsilon/6)^{r-1}$-regular e tem densidade pelo menos $\varepsilon/3 - (\varepsilon/6)^r$. Isso conclui o primeiro passo.

Procedemos agora para o segundo passo: novamente pelo Lema 5.3, pelo menos $\{1 - r \cdot (\varepsilon/6)^{r-1}\}|V_2^1|$ vértices de V_2^1 são adjacentes a pelo menos $\{\varepsilon/3 - (\varepsilon/6)^r - (\varepsilon/6)^{r-1}\}|V_i^1|$ vértices em V_i^1, para cada $i = 3, \dots, r$. Seja $v_2 \in V_2^1$ um desses vértices e V_i^2 o subconjunto de V_i^1 composto dos vértices adjacentes a v_2, $i = 3, \dots, r$. Temos

$$|V_i^2| \geq \left\{\frac{\varepsilon}{3} - \left(\frac{\varepsilon}{6}\right)^r - \left(\frac{\varepsilon}{6}\right)^{r-1}\right\} |V_i^1| > \left(\frac{\varepsilon}{6}\right) |V_i^1|$$

e, portanto, qualquer par de aglomerados dentre $V_3^2, \dots, V_r^2$ é $(\varepsilon/6)^{r-2}$-regular e tem densidade pelo menos $\varepsilon/3 - (\varepsilon/6)^r - (\varepsilon/6)^{r-1}$.

Supondo, sem perda de generalidade, que $r\varepsilon < 1$ e $\varepsilon/6 + \cdots + (\varepsilon/6)^r < \varepsilon/3$, o argumento descrito acima pode ser repetido r vezes. Isso conclui a prova. □

Seja agora H um grafo qualquer. O *número cromático* de H é a menor quantidade de cores necessárias para pintar os vértices de H de modo que vértices adjacentes não tenham a mesma cor. Equivalentemente, o número cromático de H é o menor inteiro positivo r tal que H seja r-partido, isto é, para o qual existe uma partição dos vértices de H em r subconjuntos disjuntos tal que dois vértices em um mesmo subconjunto não são adjacentes. Sejam $h_1, \dots, h_r$ as cardinalidades desses subconjuntos, e seja $K_{h_1,\dots,h_r}$ o grafo r-partido completo cujas cardinalidades dos subconjuntos são $h_1, \dots, h_r$. Claramente, $K_{h_1,\dots,h_r}$ contém uma cópia de H e, portanto, o número de cópias de H em um dado grafo é pelo menos o número de cópias de $K_{h_1,\dots,h_r}$ no grafo.

Observe que, se aplicarmos a mesma ideia da Parte 1 a um grafo ε-longe de ser H-livre, a cópia remanescente de H tem vértices em pelo menos r aglomerados distintos $V_1, \dots, V_r$, e não necessariamente em h aglomerados distintos. Isso não é um problema: ao invés de escolher um vértice em cada V_i, escolhemos h_i deles. Se o mesmo procedimento funcionar, cada uma dessa escolhas gera uma cópia de $K_{h_1,\ldots,h_r}$ e, portanto, também de H. É isso que faremos abaixo.

Prova do Lema de Remoção de Grafos. Aplique o argumento da Parte 1 para obter aglomerados distintos $V_1, \ldots, V_r$ tais que qualquer par é $(\varepsilon/6)^h$-regular e tem densidade pelo menos $\varepsilon/3$. Existem pelo menos $\{1 - r \cdot (\varepsilon/6)^h\}|V_1|$ vértices de V_1 que são adjacentes a pelo menos $\{\varepsilon/3 - (\varepsilon/6)^h\}|V_i|$ vértices de V_i, para cada $i = 2, \ldots, r$. Seja $v_1 \in V_1$ um de tais vértices e denote por V_i^1 o conjunto de vértices em V_i que são adjacentes a v_1, $i = 2, \ldots, r$. Ademais, considere $V_1^1 = V_1 \backslash \{v_1\}$ (aqui está a diferença para o caso do grafo completo: não descartamos V_1). Temos

$$|V_i^1| \geq \left\{ \frac{\varepsilon}{3} - \left(\frac{\varepsilon}{6}\right)^h \right\} |V_i| > \left(\frac{\varepsilon}{6}\right) |V_i|$$

e, portanto, cada par dentre $V_1^1, \ldots, V_r^1$ é $(\varepsilon/6)^{h-1}$-regular e tem densidade pelo menos $\varepsilon/3 - (\varepsilon/6)^h$.

Repetindo esse argumento h_1 vezes sucessivas no primeiro aglomerado, h_2 vezes sucessivas no segundo aglomerado, ..., h_r vezes sucessivas no r-ésimo aglomerado, escolhemos vértices $v_1, \ldots, v_h$ que formam uma cópia de $K_{h_1,\ldots,h_r}$. Isso completa a prova. □

Recentemente Jacob Fox [6] deu uma prova do Lema de Remoção de Grafos que não faz uso do Lema de Regularidade de Szemerédi. Embora não utilize o lema de regularidade propriamente, a ideia é similar. Ao invés de usar uma *média quadrática de densidade*, dada pelo índice

$$q(\mathcal{U}) = \sum_{A,B \in \mathcal{U}} \frac{|A|}{n} \cdot \frac{|B|}{n} \cdot d^2(A,B)\,,$$

Fox utiliza uma *média entrópica de densidade*

$$\sum_{A,B \in \mathcal{U}} \frac{|A|}{n} \cdot \frac{|B|}{n} \cdot f(d(A,B))\,,$$

onde $f(x) = -x \log x$ para $0 < x \leq 1$ e $f(0) = 0$. Assim como no lema de regularidade, sempre que uma partição não possui muitas cópias de H, ele mostra, usando uma desigualdade de Jensen efetiva, que a partição possui um refinamento que aumenta a média entrópica de densidade pelo menos uma quantidade fixa.

Finalizamos essas notas mencionando outra versão do Lema de Remoção de Grafos que conta o número de grafos induzidos. Um subgrafo H de um grafo G é chamado *induzido* se quaisquer dois vértices de H forem adjacentes em H se e somente se eles forem adjacentes em G. Por exemplo, K_4 é induzido em K_5, mas um ciclo de tamanho 4 não é. Isso mostra que cópias induzidas são mais raras do que apenas cópias e, de fato, o excesso de arestas pode proibi-las de existir. Nesse contexto, consideramos uma nova noção para o termo "ε-longe de ser H-livre", onde podemos adicionar ou remover arestas.

Definição 5.4. Dado $\varepsilon > 0$, o grafo $G = (V, E)$ é chamado *ε-inevitável para H* se qualquer grafo que difere de G por não mais que $\varepsilon|V|^2$ arestas possuir uma cópia induzida de H.

Abaixo enunciamos o Lema de Remoção para Grafos Induzidos, provado por Alon, Fischer, Krivelevich e Szegedy [2].

Teorema 5.5 (Lema de Remoção para Grafos Induzidos)**.** *Dado $0 < \varepsilon < 1$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que qualquer grafo ε-inevitável para H tem pelo menos $\delta|V|^h$ cópias induzidas de H.*

Não provaremos esse teorema. O leitor interessado é convidado a consultar a referência original [2].

Referências

[1] Ajtai, M.; Szemerédi, E. Sets of lattice points that form no squares. *Studia Scientarum Mathematicarum Hungarica*, v. 9, p. 9–11, 1974.

[2] Alon, N.; Fischer, E.; Krivelevich, K.; Szegedy, M. Efficient testing of large graphs. *Combinatorica*, v. 20, n. 4, p. 451–476, 2000.

[3] Arbieto, A.; Matheus, C.; Moreira, C. G. The remarkable effectiveness of ergodic theory in number theory - Part I. Green-Tao theorem. *Ensaios Matemáticos*, v. 17, p. 1–74, 2009.

[4] Erdös, P.; Frankl, P.; Rödl, V. The asymptotic number of graphs not containing a fixed subgraph and

a problem for hypergraphs having no exponent. *Graphs and Combinatorics*, v. 2, p. 113–121, 1986.

[5] Erdös, P.; Turán, P. On some sequences of integers. *The Journal of the London Mathematical Society*, v. 11, p. 261–264, 1936.

[6] Fox, J. A new proof of the graph removal lemma. *Annals of Mathematics (2)*, v. 174, n. 1, p. 561–579, 2011.

[7] Furstenberg, H. Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions. *Journal d'Analyse Mathématique*, v. 31, p. 204–256, 1977.

[8] Gowers, T. A new proof of Szemerédi's theorem. *Geometric and Functional Analysis*, v. 11, p. 465–588, 2001.

[9] Green, B.; Tao, T. The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions. *Annals of Mathematics (2)*, v. 167, p. 481–547, 2008.

[10] Khinchin, A. Y. *Three pearls of number theory.* Translated by F. Bagemihl, H. Komm and W. Seidel. New York: Dover, 2010.

[11] Komlós, J.; Simonovits, M. Szemerédi's regularity lemma and its applications in graph theory. In: Combinatorics, Paul Erdös is eighty, v. 2, Keszthely, 1993. p. 295–352. *Papers.* Budapest: Bolyai Society Mathematical Studies, 2, 1996.

[12] Roth, K. F. On certain sets of integers. *The Journal of the London Mathematical Society*, v. 28, p. 245–352, 1953.

[13] Ruzsa, Z.; Szemerédi, E. Triple systems with no six points carrying three triangles. In: Combinatorics, v. 2, Keszthely, 1976. p. 939–945. *Proceedings.* Amsterdam: North-Holland, 1978. (Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 18).

[14] Solymosi, J. Note on a generalization of Roth's theorem. *Algorithms and Combinatorics*, v. 25, p. 825–827, 2003.

[15] Szemerédi, E. On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, v. 20, p. 89–104, 1969.

[16] Szemerédi, E. Integer sets containing no k elements in arithmetic progression. *Acta Arithmetica*, v. 27, p. 299–345, 1975.

[17] Tao, T.; Vu, V. *Additive Combinatorics*. Cambridge: University Press, 2006. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 105).

[18] van der Waerden, B. L. Beweis einer Baudetschen Vermutung. *Nieuw Archief voor Wiskunde (2)*, v. 15, p. 212–216, 1927.

Yuri Lima
Department of Mathematics
University of Maryland
MD 20742, USA
`yurilima@gmail.com`