

MERGULHOS CLÁSSICOS DE VARIEDADES GRASSMANNIANAS: UMA VISÃO GERAL

IVO TEREK COUTO

RESUMO. Neste artigo discutiremos conceitos básicos sobre variedades Grassmannianas — em particular a motivação e o contexto histórico por trás do seu surgimento, como tais objetos aparecem em Geometria (Diferencial e Algébrica) hoje em dia, e alguns mergulhos isométricos de Grassmannianos em esferas e espaços projetivos.

1. INTRODUÇÃO E UM POUCO DE HISTÓRIA

Em Matemática, Geometria Diferencial é o estudo das chamadas variedades diferenciáveis, objetos que “localmente se parecem” com o espaço Euclidiano usual \mathbb{R}^n com o qual estamos acostumados, desde cursos básicos de Álgebra Linear. Trocando \mathbb{R}^n por \mathbb{C}^n e “diferenciabilidade” por “holomorfia”, inicia-se a discussão na categoria complexa. Em todo caso, sendo uma área ativa de pesquisa, é natural que cursos de Geometria Diferencial sejam frequentes e bem estabelecidos em programas de pós-graduação não apenas no Brasil, mas em universidades no mundo inteiro afora.

Neste texto, vamos brevemente explorar uma classe de variedades rica de simetrias e propriedades interessantes, injustamente negligenciada na maioria dos cursos introdutórios de variedades diferenciáveis e Geometria Riemanniana. Começamos com uma ideia simples: fixado de uma vez por todas um espaço vetorial V sobre um corpo \mathbb{K} , pode-se considerar o conjunto de todas as \mathbb{K} -retas em V passando pela origem. Explicitamente:

$$PV \doteq \{L \subseteq V \mid L \text{ é um subespaço vetorial de } V \text{ e } \dim L = 1\}.$$

Dizemos que PV é o *espaço projetivo associado a V* . Quando $V = \mathbb{K}^{n+1}$, escrevemos simplesmente $P(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{K}P^n$. Uma generalização natural consiste em passar de retas (i.e., subespaços 1-dimensionais) para subespaços k -dimensionais, e assim passamos a considerar

$$\text{Gr}_k V \doteq \{W \subseteq V \mid W \text{ é um subespaço vetorial de } V \text{ e } \dim W = k\},$$

Data de aceitação: Setembro de 2020.

Palavras chave. Geometria Diferencial, Grassmannianos.

de modo que claramente temos $PV = \text{Gr}_1V$. Este conjunto Gr_kV é chamado o *Grassmanniano de k -planos de V* , e será o protagonista desta história.

Agora, há dois fatos históricos particularmente surpreendentes e que merecem algum destaque. O primeiro deles, é que a ideia de um “espaço Grassmanniano” precede a formalização do conceito de variedade diferenciável! Com efeito, a primeira edição da Teoria da Extensão (*Ausdehnungslehre*) de Hermann Grassmann (1809–1877) foi publicada em 1844, enquanto a grande aula inaugural de Bernhard Riemann (1826–1866) na Universidade de Göttingen ocorreu apenas em 1854! O segundo deles, é que Grassmann nunca teve uma educação formal em Matemática e nunca foi professor universitário, tendo iniciado sua carreira como matemático relativamente “tarde” e daí em diante trabalhando como professor no que hoje mais ou menos equivale ao nosso Ensino Médio (o *gymnasium* alemão). Por outro lado, é seguro dizer que Grassmann foi um exemplo típico da versatilidade dos cientistas de antigamente, tendo investido muito de seu tempo também em Teologia, Filologia, Filosofia e Física.

Fica então a pergunta: se a ideia original de Grassmann não começou como sugerimos acima, qual foi a motivação? Surpreendentemente simples, foi representar uma partícula com massa $m > 0$ localizada em coordenadas (x, y, z) em um espaço Euclidiano tridimensional como uma quádrupla (mx, my, mz, m) . Deste modo, o centro de massa de um sistema formado por duas tais partículas $(m_i x_i, m_i y_i, m_i z_i, m_i)$, $i = 1, 2$, é descrito apenas pela soma

$$(m_1 x_1 + m_2 x_2, m_1 y_1 + m_2 y_2, m_1 z_1 + m_2 z_2, m_1 + m_2).$$

Quando o “peso” de tal centro de massa é zero, descrevemos a direção dada pelo vetor $(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ — neste momento, o leitor familiarizado com Geometria Projetiva talvez reconheça algum semblante de coordenadas homogêneas de um plano projetivo. Uma massa não-nula pode ser assumida como 1, e isto levou Grassmann a analisar matrizes das formas

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 0 \end{pmatrix},$$

bem como análogos de ordem mais alta. Por outro lado, mediante escolhas de bases, note que elementos de $\text{Gr}_k(\mathbb{K}^n)$ são identificados com classes de equivalência de matrizes de ordem $k \times n$ com entradas em \mathbb{K} e posto máximo, onde diremos que $A \sim B$ se os espaços-linha de A e B coincidem (isto é, as linhas de A geram o mesmo subespaço de \mathbb{K}^n que as linhas de B).

Vale observarmos que mesmo tal linguagem simplificada também não foi utilizada no *Ausdehnungslehre* original, que dispensou completamente fórmulas matemáticas e tratou apenas de argumentos filosóficos extremamente gerais, sendo (por falta de um termo melhor) intragável. Mas de qualquer modo, daí em diante o resto foi história.

Infelizmente, o potencial das descobertas de Grassmann não foi devidamente reconhecido na época. Mas hoje, vemos claramente como estes objetos são ubíquos em Geometria, não apenas pura mas também aplicada. A título de ilustração, alguns exemplos:

1. Em Geometria Riemanniana, Grassmannianos complexos são exemplos particulares de variedades de Kähler-Einstein homogêneas e localmente simétricas (veremos isto na Seção 3). Recordamos que uma variedade Riemanniana (M, \mathbf{g}) é: Einstein se o seu tensor de Ricci é um múltiplo constante de \mathbf{g} ; Kähler se estiver equipada com uma estrutura quase-complexa paralela; localmente simétrica se o seu tensor de curvatura é paralelo. Aqui, “paralelismo” é sempre relativo à conexão de Levi-Civita de \mathbf{g} .
2. Em Geometria Algébrica, Grassmannianos são exemplos clássicos de variedades projetivas (entenderemos isto melhor na Seção 4). Por variedades projetivas queremos dizer subvariedades de espaços projetivos descritas como o conjunto de zeros de alguma coleção de polinômios homogêneos.
3. Em Geometria Simplética, o Grassmanniano de subespaços Lagrangeanos de um espaço vetorial simplético (V, Ω) é uma ferramenta importante para estabelecer propriedades do chamado índice de Maslov: um isomorfismo explícito entre $\pi_1 \text{Sp}(V, \Omega)$ e \mathbb{Z} , onde $\text{Sp}(V, \Omega)$ é o grupo de simplectomorfismos de (V, Ω) e π_1 é o funtor grupo fundamental. Para mais detalhes, veja [8] e [10].
4. Em Otimização, há o chamado algoritmo de Riemann-Newton: uma generalização do método de Newton conhecido dos cursos básicos de Cálculo, agora para aproximar zeros de campos de vetores em variedades Riemannianas. Tal algoritmo é descrito explicitamente para variedades Grassmannianas em [1]. Claro que esta não é a única situação em que Grassmannianos aparecem em problemas mais computacionais — veremos na Seção 4 um mergulho motivado por problemas desta natureza.

Para mais contexto histórico e detalhes sobre a vida de Grassmann, recomendamos o Capítulo 3 de [6]. Neste ponto, o leitor deve estar razoavelmente convencido da relevância de entender o mínimo sobre Grassmannianos. Mas com o que $\text{Gr}_k V$ se parece? Nosso objetivo final aqui é tentar responder, mesmo que de maneira possivelmente vaga, tal pergunta. E para isto, vamos ter que sujar nossas mãos um pouco.

Gostaria de agradecer a Andrzej Derdzinski pelos vários comentários úteis e ao parecerista anônimo por apontar algumas correções a serem feitas na versão inicial deste texto.

2. CÁLCULO EM GRASSMANNIANOS

Como nosso objetivo inicial é realizar Cálculo, comecemos assumindo que o corpo com o qual trabalharemos é $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, e também que $n = \dim_{\mathbb{K}} V > 1$ (a não ser que digamos o contrário). Denotando uma k -upla ordenada $[x_1 \cdots x_k] \in V^{\times k}$ de elementos de V apenas pela letra \mathfrak{X} (digamos, em fonte gótica), consideramos a *variedade de Stiefel de k -referenciais de V* :

$$\text{St}_k V \doteq \{ \mathfrak{X} \in V^{\times k} \mid \mathfrak{X} \text{ é linearmente independente} \}.$$

Vemos que $\text{St}_k V$ é um subconjunto aberto do espaço vetorial $V^{\times k}$, e portanto é uma variedade diferenciável. Ainda, temos uma projeção canônica $\Pi: \text{St}_k V \rightarrow \text{Gr}_k V$, que leva \mathfrak{X} no subespaço de V gerado por \mathfrak{X} . Com isto, equipamos $\text{Gr}_k V$ com a topologia quociente induzida por Π , que herda (direta ou indiretamente) todas as propriedades

boas de $\text{St}_k\mathbf{V}$, e mais. Isto é, $\text{Gr}_k\mathbf{V}$ torna-se um espaço topológico compacto, conexo, Hausdorff e com base enumerável. A construção de um atlas para $\text{Gr}_k\mathbf{V}$ parte de uma ideia simples: dada qualquer aplicação linear *sobrejetora* $f: \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{K}^k$ e um ponto $W \in \text{Gr}_k\mathbf{V}$, vale de duas uma: ou $f|_W$ é um isomorfismo, ou não é. Então considere o subconjunto aberto

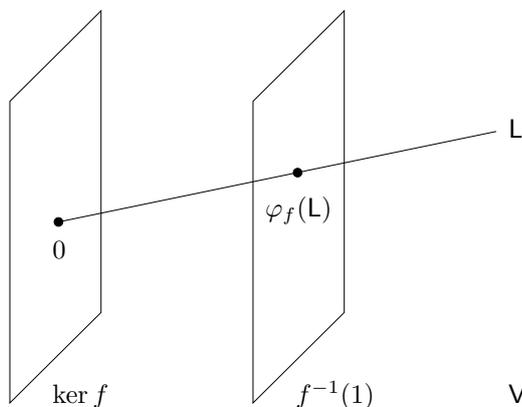
$$U_f \doteq \{W \in \text{Gr}_k\mathbf{V} \mid f|_W \text{ é um isomorfismo}\}$$

de $\text{Gr}_k\mathbf{V}$, e defina $\varphi_f: U_f \rightarrow f^{-1}(e_1) \times \cdots \times f^{-1}(e_k)$ declarando $\varphi_f(W)$ como a única base (ordenada) de W que é levada por f na base canônica (e_1, \dots, e_k) de \mathbb{K}^k . Um cálculo direto mostra que a função de transição entre duas tais cartas é uma aplicação diferenciável (resp., holomorfa) entre abertos de \mathbb{R}^k (resp., \mathbb{C}^k) — observando que as entradas da inversa de uma matriz não-singular são funções racionais das entradas da matriz original). Assim, concluímos a:

Proposição 1. *$\text{Gr}_k\mathbf{V}$ é uma variedade (real ou complexa) de dimensão (real ou complexa) igual a $k(n - k)$.*

Antes de prosseguirmos, há três comentários instrutivos a serem feitos.

1. Como recuperar, neste contexto, a descrição de $\text{Gr}_k(\mathbb{K}^n)$ em termos de classes de equivalências de matrizes, dada na Seção 1? Basta notar que temos uma ação (livre) de $\text{GL}_k(\mathbb{K})$ em $\text{St}_k\mathbf{V}$ pela direita, dada por mudança de bases: $(\mathfrak{X}, A) \mapsto \mathfrak{X}A$. Assim, $\text{Gr}_k\mathbf{V}$ é o quociente $\text{St}_k(\mathbf{V})/\text{GL}_k(\mathbb{K})$.
2. Há outra ação em $\text{St}_k\mathbf{V}$, desta vez pela esquerda, pelo grupo de automorfismos $\text{GL}(\mathbf{V})$: nada mais é do que uma ação diagonal dada por avaliação. Em outras palavras, se $\mathfrak{X} = [x_1 \cdots x_k]$ e $T \in \text{GL}(\mathbf{V})$, então colocamos $T\mathfrak{X} \doteq [Tx_1 \cdots Tx_k]$. E o ponto chave para descrevermos concretamente os espaços tangentes a $\text{Gr}_k\mathbf{V}$ na Proposição 2 adiante é que esta ação é compatível com a ação descrita no ponto acima, isto é, vale que $T(\mathfrak{X}A) = (T\mathfrak{X})A$, em vista da linearidade de T .
3. Quando $k = 1$ e lidamos com PV , é simples descrever as cartas (U_f, φ_f) explicitamente: dado $L \in U_f$, tome um vetor $x \in L$ não nulo (ou seja, tal que $L = \mathbb{K}x$), de modo que $\varphi_f(L) = x/f(x)$. Veja a ilustração a seguir:



Em particular, quando $\mathbf{V} = \mathbb{K}^{n+1}$, as cartas $(U_i, \varphi_i) \doteq (U_{\pi_i}, \varphi_{\pi_i})$ já cobrem $\mathbb{K}P^n$, onde para cada i de 0 até n , $\pi_i: \mathbb{K}^{n+1} \rightarrow \mathbb{K}$ é a projeção na i -ésima componente. Cada pré-imagem $\pi_i^{-1}(1)$ é isomorfa à \mathbb{K}^n mediante o deletamento da i -ésima

componente. Isto nos dá

$$\varphi_i([x_0 : \cdots : x_n]) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right),$$

onde $[x_0 : \cdots : x_n]$ denota a reta gerada pelo vetor (x_0, \dots, x_n) , como talvez seja mais familiar para o leitor.

Grassmannianos são suficientemente abstratos para que não seja imediato reconhecer seus espaços tangentes. Afinal, o que seria o vetor velocidade de uma curva de subespaços de V ?

Proposição 2. $T_W \text{Gr}_k V \cong \text{Hom}(W, V/W)$.

Demonstração: Recordando que temos a projeção $\Pi: \text{St}_k V \rightarrow \text{Gr}_k V$ e, portanto, a sua derivada $d\Pi_{\mathfrak{x}}: V^{\times k} \rightarrow T_{\Pi(\mathfrak{x})} \text{Gr}_k V$, a descrição do isomorfismo é simples:

$$\text{Hom}(W, V/W) \ni H \mapsto d\Pi_{\mathfrak{x}}(\tilde{H}\mathfrak{x}) \in T_W \text{Gr}_k V,$$

onde $\mathfrak{x} \in \text{St}_k V$ é qualquer base de W e $\tilde{H}: W \rightarrow V$ é qualquer levantamento linear de V . Obviamente a aplicação acima será linear e sobrejetora (pois cada $d\Pi_{\mathfrak{x}}$ o é), de modo que ser um isomorfismo segue de ambos $\text{Hom}(W, V/W)$ e $T_W \text{Gr}_k V$ possuírem a mesma dimensão (finita). Assim, o verdadeiro obstáculo aqui consiste em mostrar que nada depende das escolhas de \mathfrak{x} e \tilde{H} .

- Se \tilde{H}_1 e \tilde{H}_2 são dois levantamentos lineares do mapa H fixado, então a diferença $\tilde{H}_2 - \tilde{H}_1: W \rightarrow W$ toma valores em W . Para t real pequeno o suficiente, $\mathfrak{x} + t(\tilde{H}_2 - \tilde{H}_1)\mathfrak{x}$ é uma base de W , de modo que aplicar Π e derivar em $t = 0$ nos dá que $d\Pi_{\mathfrak{x}}(\tilde{H}_1\mathfrak{x}) = d\Pi_{\mathfrak{x}}(\tilde{H}_2\mathfrak{x})$.
- Se \mathfrak{x}_1 e \mathfrak{x}_2 são duas bases de W , podemos escrever $\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_1 A$, onde $A \in \text{GL}_k(\mathbb{K})$ é a matriz de mudança de base. Denotando também por A a sua ação (linear!) pela direita $A: \text{St}_k V \rightarrow \text{St}_k V$, vale que $\Pi \circ A = \Pi$. Tomando a derivada total dos dois lados desta igualdade no ponto \mathfrak{x}_1 , a regra da cadeia nos dá que $d\Pi_{\mathfrak{x}_2} \circ A = d\Pi_{\mathfrak{x}_1}$. E avaliando no vetor $\tilde{H}\mathfrak{x}_1$, finalmente obtemos que $d\Pi_{\mathfrak{x}_1}(\tilde{H}\mathfrak{x}_1) = d\Pi_{\mathfrak{x}_2}((\tilde{H}\mathfrak{x}_1)A) = d\Pi_{\mathfrak{x}_2}(\tilde{H}(\mathfrak{x}_1 A)) = d\Pi_{\mathfrak{x}_2}(\tilde{H}\mathfrak{x}_2)$.

□

E como usar tal isomorfismo na prática? Se temos uma curva $t \mapsto W(t)$ em $\text{Gr}_k V$, usamos W também para denotar $W(0)$, e queremos entender o que o vetor $H = W'(0): W \rightarrow V/W$ faz, devemos descrever Hx , para $x \in W$ arbitrário. Para tanto, escreva $W(t) = \ker T(t)$, com $T(t): V \rightarrow V$ para cada t . Tome uma curva $t \mapsto x(t)$ com $x(0) = x$ e $x(t) \in W(t)$ para cada t , de modo que $T(t)x(t) = 0$. Derivando tal igualdade em $t = 0$, obtemos que $T'(0)x + T(0)x'(0) = 0$. Moralmente, o que queremos é dizer que $Hx = x'(0)$, mas a relação anterior nos diz que $x'(0)$ só está determinado módulo $\ker T(0) = W$. Então que seja $Hx = x'(0) + W$, e vamos em frente.

Próximo passo: se N é qualquer variedade (real ou complexa), uma função diferenciável (ou holomorfa) $f: \text{Gr}_k V \rightarrow N$ é identificada unicamente com uma função $\tilde{f}: \text{St}_k V \rightarrow N$ do mesmo tipo, com a propriedade adicional de que $\tilde{f}(\mathfrak{x}) = \tilde{f}(\mathfrak{x}A)$

para toda $A \in \text{GL}_k(\mathbb{K})$ — via a relação $f \circ \Pi = \tilde{f}$. Então a regra da cadeia nos diz que $df_{\mathbb{W}}(H) = d\tilde{f}_{\tilde{\mathbf{z}}}(\tilde{H}\mathbf{z})$, onde \mathbf{z} é qualquer base de \mathbb{W} e \tilde{H} é qualquer levantamento linear de H .

Note também que uma vez escolhido um produto interno em \mathbb{V} , o quociente \mathbb{V}/\mathbb{W} é identificado com o complemento ortogonal \mathbb{W}^\perp . Isto geralmente facilita alguns cálculos, como veremos no restante do texto. Vejamos alguns exemplos bem concretos de tudo o que foi descrito até agora:

Exemplo 3 (Projetivizações). Cada aplicação linear *injetora* $T: \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_2$ entre dois espaços vetoriais induz uma aplicação $\text{Gr}_k(T): \text{Gr}_k\mathbb{V}_1 \rightarrow \text{Gr}_k\mathbb{V}_2$ via imagens diretas, ou seja, $\text{Gr}_k(T)(\mathbb{W}) \doteq T[\mathbb{W}]$. Com esta definição, vemos que Gr_k de fato tem um comportamento functorial (ou seja, valem $\text{Gr}_k(T \circ S) = \text{Gr}_k(T) \circ \text{Gr}_k(S)$ e também $\text{Gr}_k(\text{Id}_{\mathbb{V}}) = \text{Id}_{\text{Gr}_k\mathbb{V}}$). Suponha agora, para facilitar, que $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 = \mathbb{V}_2$ e que $T \in \text{GL}(\mathbb{V})$. Dado um vetor tangente $H \in T_{\mathbb{W}}\text{Gr}_k\mathbb{V}$ qualquer, realizado por uma curva suave $t \rightarrow \mathbb{W}(t)$, tomamos uma curva com $t \mapsto y(t) \in T[\mathbb{W}(t)]$, de modo que $d(\text{Gr}_k(T))_{\mathbb{W}}(H) = y'(0) + T[\mathbb{W}]$. Mas derivando em $t = 0$ a curva invertida $t \mapsto T^{-1}y(t) \in \mathbb{W}(t)$, vemos que $HT^{-1}y = T^{-1}(y'(0)) + \mathbb{W}$, e assim concluímos que $d(\text{Gr}_k(T))_{\mathbb{W}}(H) = \tilde{T}HT^{-1}y + T[\mathbb{W}]$, onde \tilde{T} é o isomorfismo $\mathbb{V}/\mathbb{W} \cong \mathbb{V}/T[\mathbb{W}]$ induzido por T . O grupo de transformações $\{\text{Gr}_k(T) \mid T \in \text{GL}(\mathbb{V})\}$ terá um papel importante na Seção 3. Quando $k = 1$, tal grupo é denotado por $\text{PGL}(\mathbb{V})$. Restringindo de $\text{GL}(\mathbb{V})$ para $\text{SL}(\mathbb{V})$, ou $\text{O}(\mathbb{V})$ ou $\text{U}(\mathbb{V})$ (quando \mathbb{V} tiver estrutura adicional), também faz sentido falarmos em $\text{PSL}(\mathbb{V})$, $\text{PO}(\mathbb{V})$ ou $\text{PU}(\mathbb{V})$.

Exemplo 4 (Projeções ortogonais). Equipe \mathbb{V} com um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, real ou complexo, fixe $u \in \mathbb{V}$ e defina $F: \text{Gr}_k\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ por $F(\mathbb{W}) = \text{pr}_{\mathbb{W}}u$. Se $H: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}^\perp$ é um vetor tangente a $\text{Gr}_k\mathbb{V}$ em \mathbb{W} , tome uma base ortonormal \mathbf{x} para \mathbb{W} e calcule

$$F(\mathbb{W}) = \sum_{i=1}^k \langle u, x_i \rangle x_i \implies dF_{\mathbb{W}}(H) = \sum_{i=1}^k \langle u, Hx_i \rangle x_i + \sum_{i=1}^k \langle u, x_i \rangle Hx_i.$$

Como H toma valores em \mathbb{W}^\perp , segue que $dF_{\mathbb{W}}(H) = H^*\text{pr}_{\mathbb{W}^\perp}u + H\text{pr}_{\mathbb{W}}u$. No cálculo acima, há talvez um passo não-trivial: a saber, que de fato podemos tomar as curvas $t \mapsto x_i(t) \in \mathbb{W}(t)$ *sempre* ortonormais (para todo instante t e não apenas para $t = 0$) e mantendo a propriedade $x'_i(t) = Hx_i(t)$. Caso seja necessário, substituímos H por $H + T$, para algum operador anti-simétrico $T: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}$, afinal valerá que

$$\sum_{i=1}^k \langle u, Tx_i \rangle x_i + \sum_{i=1}^k \langle u, x_i \rangle Tx_i = -T\text{pr}_{\mathbb{W}}u + T\text{pr}_{\mathbb{W}}u = 0$$

e, como T toma valores em \mathbb{W} , $H + T$ determina o mesmo vetor que H no espaço tangente $T_{\mathbb{W}}\text{Gr}_k\mathbb{V}$.

Exemplo 5 (Dualidade). Considere desta vez a *aplicação polar*, denotada aqui por $\text{Pol}: \text{Gr}_k\mathbb{V} \rightarrow \text{Gr}_{n-k}\mathbb{V}^*$, que leva um subespaço \mathbb{W} no seu espaço aniquilador $\mathbb{W}^0 \doteq \{f \in \mathbb{V}^* \mid f|_{\mathbb{W}} = 0\}$. Sabemos da Álgebra Linear que Pol é bijetiva, e também que $\mathbb{V}^*/\mathbb{W}^0 \cong \mathbb{W}^*$. Se $t \mapsto x(t) \in \mathbb{W}(t)$ e $t \mapsto f(t) \in \mathbb{W}(t)^0$ são curvas com $\mathbb{W}(0) = \mathbb{W}$, $\mathbb{W}'(0) = H$, $x(0) = x$ e $f(0) = f$, derivar os dois lados de $f(t)x(t) = 0$ imediatamente implica que $f'(0)x = -f(Hx)$. Isto quer dizer que $d(\text{Pol})_{\mathbb{W}}(H) = -H^*$, onde H^* é

a aplicação dual de H . Logo Pol é um difeomorfismo local pelo Teorema da Função Inversa (e portanto um difeomorfismo global por já ser bijetora).

Como uma última curiosidade para esta seção, note que se $E \rightarrow M$ é um fibrado vetorial sobre uma variedade M , tudo o que fizemos até agora pode ser aplicado de forma suave ponto a ponto, nos dando fibrações localmente triviais $\text{Gr}_k E \rightarrow M$, para cada k . Note que o espaço total $\text{Gr}_k E$ é compacto sempre que a base M o for. Esta construção pode ser utilizada para expressar de forma elegante algumas curvaturas de uma variedade Riemanniana (M, g) . Por exemplo, a curvatura seccional é uma função $K: \text{Gr}_2(TM) \rightarrow \mathbb{R}$, o tensor de Ricci avaliado quadraticamente ao longo de vetores unitários nos dá uma função $\text{Ric}: PTM \rightarrow \mathbb{R}$ que é constante precisamente quando (M, g) é Einstein, e por aí vai. Se M^k é uma subvariedade de algum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, a aplicação de Gauss generalizada é $G: M \rightarrow \text{Gr}_k V$ que leva x em $T_x M$, e sua derivada (identificada com uma aplicação bilinear $T_x M \times T_x M \rightarrow (T_x M)^\perp$) é precisamente a Segunda Forma Fundamental de M em V .

3. A MÉTRICA NATURAL EM $\text{Gr}_k V$

Suponha que V está equipado com um produto interno (real ou complexo) h , e seja $g = \text{Re } h$ (no caso real temos $g = h$, e no caso complexo h pode ser recuperado de g via a relação $h = g - ig(i \cdot, \cdot)$). Por W^\perp sempre denotaremos o complemento h -ortogonal de W . A métrica natural em $\text{Gr}_k V$ é definida do seguinte modo: dados $W \in \text{Gr}_k V$ e $H_1, H_2 \in T_W \text{Gr}_k V$, escolhemos uma base h -ortonormal \mathfrak{x} para V , e (ligeiramente abusando da notação) decretamos que

$$g_W(H_1, H_2) \doteq \sum_{i=1}^k g(H_1 x_i, H_2 x_i).$$

Para ver que a escolha de \mathfrak{x} não importa na definição acima, observe que vale a igualdade $g_W(H_1, H_2) = \text{Re } \text{tr}(H_1^* H_2)$. Com isto, temos uma métrica Riemanniana g em $\text{Gr}_k V$ (que no caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ é compatível com a estrutura complexa de $\text{Gr}_k V$, ou seja, $g_W(iH_1, iH_2) = g_W(H_1, H_2)$ para todos os vetores tangentes $H_1, H_2 \in T_W \text{Gr}_k V$). A significância geométrica deste produto é que se consideramos a variedade de Stiefel de k -referenciais h -ortonormais de V ,

$$\text{St}_k(V, h) \doteq \{\mathfrak{x} \in V^{\times k} \mid h(x_i, x_j) = \delta_{ij} \text{ para todos os } 1 \leq i, j \leq k\},$$

a restrição $\Pi: \text{St}_k(V, h) \rightarrow \text{Gr}_k V$ torna-se uma *submersão Riemanniana* — um conceito não apenas amplamente estudado por si só em Geometria, mas também muito útil para o estudo de variedades homogêneas, por exemplo. O artigo original [9] onde tais submersões aparecerem pela primeira vez é acessível e apresenta várias fórmulas relacionando as geometrias do espaço total e da base da submersão. Por outro lado, expressar a geometria de $\text{St}_k(V, h)$ (i.e., a conexão ∇ , a curvatura R , etc.) de forma limpa quando $k > 1$ é surpreendentemente trabalhoso (veja [11] para cálculos matriciais da curvatura seccional de $\text{St}_k(\mathbb{R}^n)$, e [13] e [14] para $\text{Gr}_k(\mathbb{K}^{n+k})$). Quando $k = 1$, $\text{St}_1(V, h)$ é apenas uma esfera e a métrica definida acima em PV é chamada a *métrica de Fubini-Study*. Mesmo este caso particular é de extrema relevância pois,

quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, PV com esta métrica acaba por ser o modelo de forma espacial complexa com curvatura seccional holomorfa constante e positiva (veja [7]). De qualquer modo, mencionamos na Seção 1 que $\text{Gr}_k V$ é rico em simetrias. A seguinte classe de isometrias é grande o suficiente para os nossos propósitos:

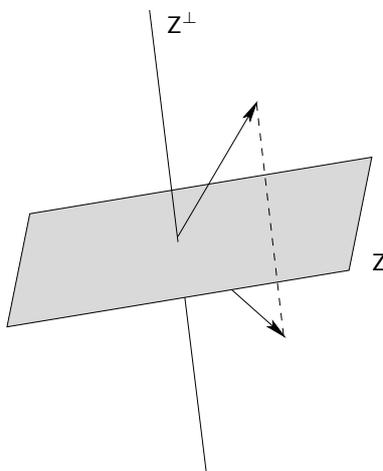
Exemplo 6. O grupo de transformações

$$\{\text{Gr}_k(T) \mid T \in \text{GL}(V) \text{ e } T^*h = h\}$$

age em $\text{Gr}_k V$ por isometrias. De fato, como estamos usando h para identificar quocientes de V com seus subespaços, a derivada de $\text{Gr}_k(T)$ é dada simplesmente por $d(\text{Gr}_k(T))_W(H) = TH_1T^{-1}$. Se \mathfrak{z} é uma base h -ortonormal para W , $T\mathfrak{z}$ é uma base h -ortonormal para $T[W]$, e assim segue que

$$g_{T[W]}(TH_1T^{-1}, TH_2T^{-1}) = g_W(H_1, H_2)$$

para quaisquer $H_1, H_2 \in T_W \text{Gr}_k V$, usando a definição da métrica g em $\text{Gr}_k V$. Como caso particular, fixado W , podemos considerar T como a reflexão ortogonal sobre W , ou seja, $T = \text{Id}_V - 2 \text{pr}_{W^\perp}$. Daí $\varphi = \text{Gr}_k(T)$ satisfaz $\varphi(W) = W$ e $d\varphi_W = -\text{Id}_{T_W \text{Gr}_k V}$ — e isto tem inúmeras consequências que exploraremos em breve. Note que se $T: V \rightarrow V$ é a reflexão ortogonal sobre algum subespaço Z fixado, um subespaço de V é T -invariante se e somente se for a soma direta de um subespaço de Z com um subespaço de Z^\perp :



A primeira consequência é que $\text{Gr}_k Z$ é uma subvariedade totalmente geodésica de $\text{Gr}_k V$ para todo subespaço $Z \subseteq V$ com dimensão pelo menos k , pelo seguinte argumento: a discussão acima nos leva a considerar o subconjunto Q de $\text{Gr}_k V$ formado pelos pontos que são fixos por todas as isometrias de $\text{Gr}_k V$ induzidas por isometrias lineares de V que restritas a Z são Id_Z ; Sendo precisamente o conjunto de pontos fixos de uma família de isometrias de $\text{Gr}_k V$, vale que Q é a união disjunta de subvariedades totalmente geodésicas de $\text{Gr}_k V$ (possivelmente de dimensões diferentes). Tais subvariedades acabam por ser $\text{Gr}_k Z$ e $\{W \in \text{Gr}_k V \mid Z^\perp \subseteq W\}$.

Neste ponto, podemos nos perguntar se estas são todas as subvariedades totalmente geodésicas de $\text{Gr}_k V$. Em geral, a resposta é não, e há vários estudos sobre tais subvariedades com propriedades geométricas adicionais, como por exemplo em [2] e [12]. Quando $k = 1$, a situação é bem mais simples: por exemplo, quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

vale que toda subvariedade (complexa, conexa, completa) e totalmente geodésica N de PV é $N = PZ$ para algum subespaço Z de V : se $r = \dim N$, tomamos $Z = L \oplus \bigoplus_{i=1}^r H_i[L]$, onde $L \in N$ é qualquer reta e $\{H_1, \dots, H_r\}$ é uma base para $T_L N$ (afinal, subvariedades totalmente geodésicas nas condições dadas são determinadas por um ponto e seu espaço tangente).

Exemplo 7. Continuando o Exemplo 6, nos concentremos por um instante no caso $k = 1$. Mostramos que $PO(V) \subseteq \text{Iso}(PV, \mathfrak{g})$ no caso real e $PU(V) \subseteq \text{Iso}(PV, \mathfrak{g})$ no caso complexo. Na verdade, vale que estas são *todas* as isometrias (holomorfas, quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), i.e., valem igualdades acima. Mais precisamente, é possível mostrar que dada uma isometria linear $\psi: T_{L_1}(PV) \rightarrow T_{L_2}(PV)$, existe uma única isometria linear $T: V \rightarrow V$ tal que $d(PV)_{L_1} = \psi$ (construída explicitamente a partir de um levantamento de ψ). Para $\text{Gr}_k V$ com $k \neq 1$ e $n - 1$, isto já não é mais verdade em geral: usando o produto h para identificar V com V^* , a aplicação $\text{Gr}_k V \rightarrow \text{Gr}_{n-k} V$ que leva W em W^\perp nada mais é do que Pol , vista no Exemplo 5. Vejamos que Pol é uma isometria. Com efeito, $d(\text{Pol})_W(H) = -H^*$, onde $H^*: W^\perp \rightarrow W$ agora denota o adjunto de H , donde

$$\mathfrak{g}_{W^\perp}(-H^*, -H^*) = \text{Re tr}((H^*)^* H^*) = \text{Re tr}(H^* H) = \mathfrak{g}_W(H, H).$$

Mas quando $n = 2k \geq 4$, Pol não é induzida por nenhuma isometria linear de V .

O Exemplo 6 nos permite aplicar para $(\text{Gr}_k V, \mathfrak{g})$ uma observação geral da Álgebra Linear: se B é um tensor r vezes contravariante e s vezes covariante em um espaço vetorial Z , com $r + s$ ímpar, que é preservado por $-\text{Id}_Z$, então $B = 0$. Com efeito, $(-\text{Id}_Z)^* B$ é simultaneamente igual a B (por hipótese) e também igual a $-B$ (pois $r + s$ é ímpar). Como a aplicação antípoda de cada espaço tangente a $\text{Gr}_k V$ é realizada como a derivada de uma isometria, podemos aplicar isto ponto a ponto para ∇R e ∇J (onde R é o tensor de curvatura e, no caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, J é a estrutura quase-complexa dada por $JH \doteq iH$), que possuem valência total 5 e 3, respectivamente. Obtemos o:

Corolário 8. $(\text{Gr}_k V, \mathfrak{g})$ é uma variedade localmente simétrica e, quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, também é de Kähler.

A última propriedade mencionada na Seção 1 que ainda não estabelecemos é que $(\text{Gr}_k V, \mathfrak{g})$ é uma variedade de Einstein. Isto acaba sendo um caso particular de um argumento mais geral sobre variedades homogêneas, entre as quais Grassmannianas estão inclusos. Digamos, no caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, fixado $W \in \text{Gr}_k V$, o estabilizador de W sob a ação $U(V) \curvearrowright \text{Gr}_k V$ é o produto $U(W) \times U(W^\perp)$, de modo que pelo Teorema da Órbita e do Estabilizador, temos

$$\text{Gr}_k V \cong \frac{U(V)}{U(W) \times U(W^\perp)}.$$

No caso real, trocamos U por O acima. Dito isto, se G é um grupo agindo por isometrias em uma variedade Riemanniana (M, \mathfrak{g}) e fixamos $x \in M$, o estabilizador G_x age em $T_x M$ via derivadas (mais precisamente, define-se $g \cdot v \doteq dg_x(v)$, onde $g: M \rightarrow M$), o que nos permite considerar as chamadas *representações de isotropia* da ação. E vemos que se em algum $x \in M$, esta representação é *irredutível*, ou seja, o

espaço tangente $T_x M$ não possui subespaços G_x -invariantes, então (M, \mathfrak{g}) é Einstein, pelo seguinte motivo: se usamos \mathfrak{g}_x para considerar Ric_x como um operador linear auto-adjunto em $T_x M$, o fato de G_x agir por isometrias nos diz que os autoespaços de Ric_x são G_x -invariantes, e logo a irreducibilidade implica que $\text{Ric}_x = \lambda \mathfrak{g}_x$ para alguma constante $\lambda \in \mathbb{R}$. Mas novamente, G age por isometrias em M , então se $\text{Ric}_x = \lambda \mathfrak{g}_x$ vale para algum ponto $x \in M$, vale para *todos* os pontos. Um argumento ligeiramente técnico mostra que a representação de isotropia da ação de $U(V)$ em $\text{Gr}_k V$ é irreduzível, e assim obtemos o:

Corolário 9. $(\text{Gr}_k V, \mathfrak{g})$ é uma variedade de Einstein.

4. ALGUNS MERGULHOS CLÁSSICOS

4.1. O mergulho de Plücker. Os produtos h e g em V induzem produtos (que também denotaremos por h e g) na k -ésima potência exterior $V^{\wedge k}$, via determinantes de Gram. Mais precisamente, definimos

$$h(x_1 \wedge \cdots \wedge x_k, y_1 \wedge \cdots \wedge y_k) = \det \left((h(x_i, y_j))_{i,j=1}^k \right),$$

e similarmente para g . Deste modo, o espaço projetivo $P(V^{\wedge k})$ também ganha uma métrica de Fubini-Study. Se $W \in \text{Gr}_k V$ e escolhemos uma base \mathfrak{x} para W , podemos considerar o k -vetor (não-nulo) $x_1 \wedge \cdots \wedge x_k$, e mudando a base para $\mathfrak{x}' = \mathfrak{x}A$, com $A \in \text{GL}_k(\mathbb{K})$, vale que

$$x'_1 \wedge \cdots \wedge x'_k = \det(A) x_1 \wedge \cdots \wedge x_k.$$

Isto quer dizer que W determina uma certa reta em $V^{\wedge k}$. O *mergulho de Plücker* $\mathfrak{p}: \text{Gr}_k V \rightarrow P(V^{\wedge k})$ leva W nesta reta $\mathfrak{p}(W)$. Verifiquemos que \mathfrak{p} é, de fato, um mergulho isométrico. Olhando para expressões em coordenadas não é difícil ver que \mathfrak{p} é diferenciável (ou holomorfa se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Em seguida, vejamos que \mathfrak{p} é injetor: se $\mathfrak{p}(W) = \mathfrak{p}(W')$ e escolhemos bases \mathfrak{x} e \mathfrak{x}' para W e W' , escrevemos $x'_1 \wedge \cdots \wedge x'_k = x_1 \wedge \cdots \wedge x_k$. Por absurdo, se $x'_1 \notin W$, então temos que

$$0 \neq x'_1 \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge x_k = x'_1 \wedge x'_1 \wedge \cdots \wedge x'_k = 0.$$

Repetir o argumento com qualquer x'_j no lugar de x'_1 nos dá a inclusão $W' \subseteq W$, e logo $W' = W$ pois ambos tem dimensão k . Assim, como $\text{Gr}_k V$ é compacto, uma vez que também mostrarmos que \mathfrak{p} é uma imersão, \mathfrak{p} será automaticamente um mergulho. E para mostrar que cada derivada $d\mathfrak{p}_W$ é uma aplicação linear injetora, vamos colocar a carroça na frente dos bois e mostrar logo que é uma isometria linear. A regra do produto nos dá que $d\mathfrak{p}_W: \text{Hom}(W, W^\perp) \rightarrow \text{Hom}(\mathfrak{p}(W), \mathfrak{p}(W)^\perp)$ é dada por

$$d\mathfrak{p}_W(H)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_k) = \sum_{i=1}^k x_1 \wedge \cdots \wedge x_{i-1} \wedge Hx_i \wedge x_{i+1} \wedge \cdots \wedge x_k.$$

Com efeito, note que o lado direito da relação acima está em $\mathfrak{p}(W)^\perp$, visto que o i -ésimo termo da soma

$$\sum_{i=1}^k h(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{i-1} \wedge Hx_i \wedge x_{i+1} \wedge \cdots \wedge x_k, x_1 \wedge \cdots \wedge x_k)$$

é o determinante da matriz obtida substituindo a i -ésima linha da matriz de Gram $(h(x_i, x_j))_{i,j=1}^k$ por $(h(Hx_i, x_1) \cdots h(Hx_i, x_k)) = (0 \cdots 0)$.

E finalmente, para mostrar que $d\mathfrak{P}_W$ preserva as métricas naturais, suponha agora que a base \mathfrak{x} escolhida para W é h -ortonormal. Com isto, é suficiente mostrar que

$$\|d\mathfrak{P}_W(H)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_k)\|^2 = \sum_{i=1}^k \|Hx_i\|^2,$$

visto que o lado esquerdo é igual a $g_{\mathfrak{P}(W)}(d\mathfrak{P}_W(H), d\mathfrak{P}_W(H))$ e o direito é $g_W(H, H)$. Isto talvez requiera um esforço de visualização do leitor, mas o lado esquerdo é a soma sobre i e j dos determinantes das matrizes descritas do seguinte modo: comece com a identidade de ordem k , troque a i -ésima linha e a j -ésima coluna por zeros, e insira na posição (i, j) o produto $g(Hx_i, Hx_j)$. Os únicos termos não-nulos ocorrem para $i = j$ e assim obtemos a soma dos $\|Hx_i\|^2$, como desejado.

Isto conclui a demonstração, mas ainda há dois comentários instrutivos a serem feitos, agora que o trabalho duro está feito.

- Primeiro, para cada elemento $\alpha \in V^{\wedge k}$, podemos considerar o subespaço $W_\alpha \doteq \{x \in V \mid \alpha \wedge x = 0\}$ de V . Quando $\alpha = x_1 \wedge \cdots \wedge x_k$, ou seja, α é decomponível (e portanto na imagem de \mathfrak{P}), temos que $\alpha \mapsto W_\alpha$ é a inversa de \mathfrak{P} .
- Segundo, podemos reconciliar o que foi feito acima com o a situação em que $V = \mathbb{K}^n$ e temos a descrição de $\text{Gr}_k(\mathbb{K}^n)$ dada na Seção 1. A aplicação \mathfrak{P} deve levar a classe de equivalência de uma matriz A de ordem $k \times n$ com posto máximo em uma certa reta em um espaço de dimensão $n!/k!(n-k)!$. Mas este é exatamente o número de menores principais de ordem k que uma matriz $k \times n$ tem! Ou seja, teremos que $\mathfrak{P}([A]) = [p_{i_1 \dots i_k} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n]$, onde $p_{i_1 \dots i_k}$ é o subdeterminante de A formado pelas colunas i_1, \dots, i_k . O fato de A ter posto máximo garante que realmente temos um elemento bem definido em $\mathbb{K}\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$. A letra p , naturalmente, vem de Plücker. E este ponto de vista é o que evidencia que Grassmannianos são variedades projetivas. Por exemplo, temos coordenadas $[p_{11} : p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34}]$ para $\text{Gr}_2(\mathbb{K}^4)$ mergulhado em $\mathbb{K}\mathbb{P}^5$. Como $\text{Gr}_2(\mathbb{K}^4)$ tem codimensão 1, esperamos poder descrevê-lo como o conjunto de zeros de um único polinômio. Dito e feito, temos $p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0$. Isto pode ser repetido em dimensões maiores, com mais equações, e descrito de forma intrínseca (isto é, sem apelar diretamente para matrizes) — veja [4], por exemplo.

4.2. O mergulho de Conway-Hardin-Sloane. Dado $W \in \text{Gr}_k V$, sempre podemos escrever a soma direta $V = W \oplus W^\perp$, e tal decomposição nos fornece a projeção ortogonal $\text{pr}_W: V \rightarrow V$. Claramente pr_W é um operador auto-adjunto com traço k/n que determina W completamente. Por outro lado, recorde que dado qualquer operador linear $T \in \mathfrak{gl}(V)$, definimos a *parte sem traço* de T como $T_0 \doteq T - (\text{tr}(T)/n)\text{Id}_V$. E T_0 juntamente com o número $\text{tr}(T)$ determina T completamente, no sentido de que se denotamos por $\mathfrak{gl}_0(V)$ o espaço dos operadores lineares em V com traço zero, a aplicação

$$\mathfrak{gl}(V) \ni T \mapsto (T_0, \text{tr}(T)) \in \mathfrak{gl}_0(V) \times \mathbb{K}$$

é um isomorfismo de álgebras de Lie. Então, denotando por $\mathfrak{gl}_0^{\text{sym}}(\mathbf{V})$ o espaço dos operadores auto-adjuntos em \mathbf{V} com traço zero, é natural considerar a aplicação $\mathfrak{C}: \text{Gr}_k \mathbf{V} \rightarrow \mathfrak{gl}_0^{\text{sym}}(\mathbf{V})$ dada por $\mathfrak{C}(W) \doteq (\text{pr}_W)_0$. Como estamos interessados em Geometria Diferencial, precisamos de uma métrica no espaço $\mathfrak{gl}_0^{\text{sym}}(\mathbf{V})$ para continuar a discussão. A boa e velha métrica Euclideana servirá para os nossos propósitos: $\langle T, S \rangle \doteq \text{Re tr}(TS)/2$.

Com isto em mãos, a afirmação é que não apenas \mathfrak{C} é um mergulho isométrico, mas também a imagem de $\text{Gr}_k \mathbf{V}$ sob \mathfrak{C} é um subconjunto da esfera em $\mathfrak{gl}_0^{\text{sym}}(\mathbf{V})$ de raio $\sqrt{k(n-k)/2n}$.

A discussão acima já mostra que \mathfrak{C} é injetora. Escrevendo

$$(\text{pr}_W)_0 = \frac{1}{n} ((n-k)\text{pr}_W - k\text{pr}_{W^\perp}),$$

vemos que

$$\langle (\text{pr}_W)_0, (\text{pr}_W)_0 \rangle = \frac{1}{2n^2} ((n-k)^2 k + k^2(n-k)) = \frac{k(n-k)}{2n}.$$

Finalmente, vejamos que a derivada $d\mathfrak{C}_W$ preserva as métricas dadas. Dado qualquer $H \in T_W \text{Gr}_k \mathbf{V}$, como pr_W e $(\text{pr}_W)_0$ diferem por algo (constante) que não depende de W , o Exemplo 4 nos dá que $d\mathfrak{C}_W(H) = H^* \text{pr}_{W^\perp} + H \text{pr}_W$. Um cálculo direto implica que vale a identidade $d\mathfrak{C}_W(H)^2 = H^* H \text{pr}_W + H H^* \text{pr}_{W^\perp}$, e portanto

$$\langle d\mathfrak{C}_W(H), d\mathfrak{C}_W(H) \rangle = \frac{1}{2} (2 \text{Re tr}(H^* H)) = \mathfrak{g}_W(H, H),$$

concluindo o argumento (pois novamente, uma imersão isométrica injetora com domínio compacto é automaticamente um mergulho).

Historicamente não é claro se tal mergulho de fato é devido a Conway e seus colaboradores, mas a atribuição não deixa de ser válida em vista de suas surpreendentes aplicações. Em [3], tal mergulho é utilizado no estudo de empacotamentos de retas em \mathbb{R}^3 (e mais geralmente, no empacotamento de subespaços k -dimensionais de \mathbb{R}^n , que nos traz de volta a $\text{Gr}_k \mathbf{V}$), em uma pesquisa interdisciplinar relacionada com o tratamento de tumores por meio de lasers de alta energia.

4.3. Os mergulhos de Segre e Veronese. Se (\mathbf{V}_1, h_1) e (\mathbf{V}_2, h_2) são espaços com produtos internos (reais ou complexos) e escrevemos $g_i = \text{Re } h_i$, para $i = 1, 2$, como na Seção 3, o produto tensorial $\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2$ também ganha um produto h caracterizado pela relação

$$h(x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2) = h_1(x_1, y_1) h_2(x_2, y_2),$$

e similarmente definimos um produto real g a partir de g_1 e g_2 . Em particular, cada Grassmanniano de $\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2$ ganha uma métrica natural. E a operação de produto tensorial pode ser vista como uma aplicação

$$\mathfrak{T}: \text{Gr}_{k_1} \mathbf{V}_1 \times \text{Gr}_{k_2} \mathbf{V}_2 \rightarrow \text{Gr}_{k_1 k_2} (\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2),$$

explicitamente dada por $\mathfrak{T}(W_1, W_2) \doteq W_1 \otimes W_2$. Vejamos que \mathfrak{T} é injetora: suponha que $W_1 \otimes W_2 = W'_1 \otimes W'_2$, onde assumimos que $W_1, W'_1 \in \text{Gr}_{k_1} \mathbf{V}_1$ e $W_2, W'_2 \in \text{Gr}_{k_2} \mathbf{V}_2$. Sem perda de generalidade, é suficiente mostrar que $W_1 \subseteq W'_1$. Tomamos $x \in W_1$ e fixamos $y \in W_2$, não-nulo. Se não tivemos $x \in W'_1$, existirá $\phi \in \mathbf{V}_1^*$ com $\phi(x) = 1$ e

$\phi|_{W'_1} = 0$, donde segue o absurdo $y = (\phi \otimes \text{Id}_{V_2})(x \otimes y) = 0$, visto que $x \otimes y$ é uma soma de tensores puros em $W'_1 \otimes W'_2$. Portanto devemos ter $x \in W'_1$.

Prosseguindo, temos que a derivada desta aplicação \mathfrak{T} é a aplicação linear

$$d\mathfrak{T}_{(W_1, W_2)}: T_{W_1} \text{Gr}_{k_1} V_1 \times T_{W_2} \text{Gr}_{k_2} V_2 \rightarrow T_{W_1 \otimes W_2} \text{Gr}_{k_1 k_2} (V_1 \otimes V_2)$$

dada por

$$d\mathfrak{T}_{(W_1, W_2)}(H_1, H_2) = H_1 \otimes \text{Id}_{W_2} + \text{Id}_{W_1} \otimes H_2.$$

Mas se \mathfrak{x} é uma base h_1 -ortonormal para W_1 e \mathfrak{y} é uma base h_2 -ortonormal para W_2 , então $\{x_i \otimes y_j \mid 1 \leq i \leq k_1, 1 \leq j \leq k_2\}$ é uma base g -ortonormal para $W_1 \otimes W_2$. Usando a caracterização de g em $V_1 \otimes V_2$, obtemos

$$\mathfrak{g}_{(W_1, W_2)}((H_1, H_2), (H_1, H_2)) = k_2 \mathfrak{g}_{W_1}(H_1, H_1) + k_1 \mathfrak{g}_{W_2}(H_2, H_2),$$

donde pelo menos segue que \mathfrak{T} é um mergulho suave, apesar de não ser isométrico. Mas quando temos que $k_1 = k_2 = 1$ (que incidentalmente é equivalente à relação $k_1 = k_2 = k_1 k_2$ entre as dimensões dos subespaços envolvidos), obtemos o chamado mergulho de Segre de um produto de espaços projetivos: $\text{PV}_1 \times \text{PV}_2 \rightarrow \text{P}(V_1 \otimes V_2)$. Isto imediatamente se generaliza para um mergulho isométrico

$$\prod_{i=1}^r \text{PV}_i \hookrightarrow \text{P} \left(\bigotimes_{i=1}^r V_i \right)$$

quando temos r espaços V_1, \dots, V_r . Quando tomamos $V = V_1 = \dots = V_r$, compor \mathfrak{T} com o mergulho diagonal Δ nos dá ainda outro mergulho isométrico

$$\text{PV} \hookrightarrow (\text{PV})^{\times r} \hookrightarrow \text{P}(V^{\odot r}),$$

onde $V^{\odot r}$ denota a r -ésima potência simétrica de V . Observe que a homotetia causada pelo mergulho diagonal Δ é desfeita pela normalização da métrica natural em $V^{\odot r}$ (ou seja, considerar $\text{P}(V^{\otimes r})$ ao invés de $\text{P}(V^{\odot r})$ nos dá apenas um mergulho homotético). Este é chamado o mergulho de Veronese de grau r de V .

Estes dois mergulhos combinados nos dão uma gama de exemplos de subvariedades de espaços projetivos, e são frequentes tanto em Geometria Diferencial e Geometria Algébrica. Por exemplo, quando temos $V = \mathbb{K}^3$ e $r = 2$, o mergulho de Veronese $\nu: \text{KP}^2 \rightarrow \text{KP}^5$ resulta nas coordenadas homogêneas consistindo de todos os produtos possíveis (dois a dois) entre as variáveis x, y, z , isto é, $\nu([x : y : z]) = [x^2 : y^2 : z^2 : yz : xz : xy]$. Uma exposição bastante detalhada sobre variedades de Segre e Veronese, do ponto de vista da Geometria Algébrica, pode ser consultada em [5].

REFERÊNCIAS

- [1] Absil, P. A.; Mahony, R.; Sepulchre, R., *Riemannian geometry of Grassmann manifolds with a view on algorithmic computation*, Acta Applicandae Mathematicae (Volume 80, Issue 2, pp. 199-220), 2004.
- [2] Chen, B. Y.; Nagano, T.; *Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces, I*, Duke Math Journal (Volume 44, pp. 745-755), 1977.
- [3] Conway, J. H.; Hardin, R. H.; Sloane, N. J. A.; *Packing lines, planes, etc.: packings in Grassmannian spaces*, Experiment. Math. (Volume 5, Issue 2, pp. 139-159), 1996.
- [4] Griffiths, P.; Harris, J.; *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley & Sons, Inc., 1994.

- [5] Harris, J., *Algebraic Geometry: A First Course*, Springer-Verlag, 1995.
- [6] Klein, F., *Development of Mathematics in the 19th Century*, tradução por M. Ackerman, apêndices por R. Hermann, *Math Sci Press* (Lie Groups: History, Frontiers and Applications — volume IX), 1979.
- [7] Kobayashi, N.; Nomizu, K.; *Foundations of Differential Geometry, Volume 2*, Interscience Publishers, 1969.
- [8] McDuff, D.; Salamon, D.; *Introduction to Symplectic Topology*, 3^a edição, Oxford Graduate Texts in Mathematics (Volume 27), 2017.
- [9] O’Neill, B., *The Fundamental Equations of a Submersion*, Michigan Math J. (volume 13, pp. 459-469), 1966.
- [10] Piccione, P.; Tausk, D. V.; *On the Geometry of Grassmannians and the Symplectic Group: the Maslov Index and Its Applications*, 2007.
- [11] Rapcšák, T., *Sectional curvatures in non linear optimization*, J. Glob. Optim. (Volume 40, pp. 375-388), 2008.
- [12] Wolf, J., *Elliptic Spaces in Grasmann Manifolds*, Illinois J. Math (Volume 7, Issue 3, pp. 447-462), 1963.
- [13] Wong, Y. C., *Differential Geometry of Grassmann Manifolds*, PNAS March 1 (Volume 57, Issue 3, pp. 589-594), 1967.
- [14] Wong, Y. C., *Sectional Curvatures of Grassmann Manifolds*, Proc. Natl. Aca. Sci. USA (Volume 60, Issue 1, pp. 75-79), 1968.

THE OHIO STATE UNIVERSITY
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Email address: terekcoutho.1@osu.edu