RMU
REVISTA MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Revista Matemática Universitária, vol. 1, 2021
ISSN: 2675-5254 — **DOI:** 10.21711/26755254/rmu20215

ALGUNS TEOREMAS DO TIPO VALOR MÉDIO: DE LAGRANGE A MALESEVIC

MARCELO BONGARTI E GERMAN LOZADA-CRUZ

RESUMO. Nosso objetivo neste trabalho é apresentar alguns teoremas do tipo valor médio que não são estudados em disciplinas clássicas de cálculo e análise matemática. Trata-se de teoremas simples e de grande aplicabilidade na análise matemática (por exemplo no estudo de equações funcionais, operadores integrais, etc), matemática computacional, economia e outras áreas.

1. Introdução

Dos teoremas clássicos da análise matemática, o *teorema do valor médio* se destaca por sua simplicidade e vasta aplicabilidade. É, sem dúvida, um dos resultados mais conhecidos pela comunidade matemática, e, sem favor algum, um dos tijolos que constituem os alicerces do Cálculo e da Análise Matemática como um todo.

O objetivo deste artigo é apresentar uma gama de outros teoremas do tipo valor médio que somam-se ao clássico e que também são de altíssima aplicabilidade, simplicidade e contribuem para o avanço da Matemática.

Atualmente existem diversas maneiras para abordar o teorema do valor médio, cada qual ligada a alguma meta específica a qual se pretende chegar. Neste caso, como queremos um panorama acerca dos diferentes teoremas do tipo valor médio, utilizaremos a abordagem clássica.

Nossa história começa em 1691 quando Rolle[1] usou técnicas do Cálculo diferencial e integral para provar o seguinte resultado, nosso primeiro teorema do tipo valor médio:

Teorema 1.1 (Teorema de Rolle). *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Se $f(a) = f(b)$, então, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$, isto é, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ é horizontal.*

Data de aceitação: Janeiro de 2021.
Palavras chave. Teorema de Lagrange, Teorema de Flett, Condição de Tong, Condição de Malesevic.

[1] Michel Rolle (1652-1719), matemático francês.

Ainda que Rolle tenha sido merecidamente homenageado pela formalização do resultado, é interessante comentar que Bhaskara II[2], demonstrou um caso particular do teorema de Rolle muito tempo antes, embora sem pouca ou nenhuma formalidade.

O teorema de Rolle ficou mais conhecido depois que Drobisch[3] usou o termo pela primeira vez em 1834, seguido por Bellavitis[4] em 1846. Maiores detalhes podem ser encontrados em [2].

O teorema do tipo valor médio mais famoso da história é o *teorema do valor médio de Lagrange:*

Teorema 1.2 (Teorema do valor médio de Lagrange)**.** *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Este resultado foi inicialmente descoberto por Lagrange[5], que o demonstrou sem, inicialmente, fazer menção ao teorema de Rolle. Entretanto, a dedução mais conhecida tem como ideia principal a aplicação do teorema de Rolle à função auxiliar

$$\varphi(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\right],$$

e esta foi feita por Bonnet[6]. Publicamente, o teorema do valor médio de Lagrange foi citado pela primeira vez em um trabalho do renomado físico Ampére[7]. Para maiores detalhes, a referência [16] pode ser consultada.

Geometricamente, o teorema do valor médio de Lagrange diz que existe um ponto c dentro do intervalo (a, b), tal que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ é paralela à reta secante que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Fisicamente, o teorema do valor médio de Lagrange garante que se uma partícula possui uma trajetória suave $(t, f(t))$ no intervalo de tempo $[a, b]$, então existirá um instante $t_c \in (a, b)$ tal que a velocidade instantânea da partícula (em $t = t_c$) coincide com a velocidade média de todo o percurso.

Motivado por esta aplicação, Cauchy[8] se perguntou o que poderia ser dito a respeito de uma partícula de trajetória suave $(f(t), g(t))$ no intervalo de tempo $[a, b]$. Então, Cauchy aplicou o teorema de Rolle à função

$$\varphi(x) = [g(b) - g(a)]f(x) - [f(b) - f(a)]g(x)$$

e o resultado foi o que conhecemos hoje por *Teorema do valor médio de Cauchy.*

Teorema 1.3 (Teorema do valor médio de Cauchy)**.** *Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)].$$

[2]Bhaskara Akaria (1114-1185), matemático indiano.

[3]Moritz Wilhelm Drobisch (1802-1896), matemático alemão.

[4]Giusto Bellavitis (1803-1880), matemático italiano

[5]Joseph Louis Lagrange (1736-1813), matemático italiano.

[6]Pierre Ossian Bonnet (1819-1892),matemático francês.

[7]André-Marie Ampére (1775-1836), físico francês.

[8]Augustine-Louis Cauchy (1789-1857), matemático francês.

Geometricamente, o teorema do valor médio de Cauchy garante que dada uma trajetória suave $(f(t), g(t))$ com $t \in [a, b]$, existirá $c \in (a, b)$ de tal forma que a reta tangente à trajetória no ponto $(f(c), g(c))$ é paralela à reta que passa pelos pontos $(f(a), g(a))$ e $(f(b), g(b))$.

As demonstrações detalhadas dos teoremas do tipo valor médio discutidos nesta seção podem ser encontradas em [1, Teorema 6.2.4 e Teorema 6.3.2] ou em [16, Teorema 2.2 e Teorema 2.17]. O leitor interessado em variações do teorema de Lagrange pode consultar [6]. Para variações e aplicações do teorema de Cauchy, recomendamos [7] e [8]

2. Teorema de Flett e suas variações

O teorema a seguir é uma versão do clássico teorema do valor médio para integrais e a partir de observações acerca dele que nasce a motivação para o teorema do tipo valor médio que abordaremos a seguir.

Teorema 2.1. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então existe $\eta \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\eta)(b - a).$$

A demonstração do Teorema 2.1 pode ser encontrada em [16, Teorema 7.1].

Considere, agora, uma função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ como no Teorema 2.1, então existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$g(\xi) = \frac{1}{b - a} \int_a^b g(t)dt.$$

Além disso, se considerarmos uma tal função g, contínua, e tal que

$$g(a) = 0, \quad \int_a^b g(t)dt = 0,$$

e definirmos a função

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - a} \int_a^x g(t)dt, & x \in (a, b] \\ 0, & x = a. \end{cases}$$

A função φ é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e para $x \in (a, b)$,

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{(x - a)^2} \int_a^x g(t)dt + \frac{g(x)}{x - a}.$$

Observemos que, $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$, logo segue do teorema de Rolle que existe $\xi \in (a,b)$ tal que $\varphi'(\xi) = 0$, i.e., existe $\xi \in (a,b)$ tal que

$$g(\xi) = \frac{1}{\xi - a}\int_a^{\xi} g(t)dt. \tag{1}$$

Notemos que (1) é exatamente o teorema do valor médio para integrais com a substituição de b por ξ. Olhando rapidamente para o teorema fundamental do cálculo, podemos escrever a equação (1) da seguinte forma:

$$G'(\xi) = \frac{G(\xi) - G(a)}{\xi - a} \tag{2}$$

onde G é uma primitiva de g, ou seja, $G' = g$.

Neste sentido, dada uma função g, é natural nos perguntarmos se podemos trocar a condição de que $\int_a^b g(t)dt = 0$ simplesmente por $g(b) = 0$. A seguir, como uma consequência do teorema do valor intermediário, vemos que é possível. Estas observações foram feitas por Flett[9] e o resultado (de 1958) leva o seu nome como homenagem.

O teorema de Flett (veja [4]) é uma variação do teorema de Rolle onde a condição $f(a) = f(b)$ foi substituída por $f'(a) = f'(b)$. Por este motivo, dizemos que o teorema de Flett é um teorema do tipo de Lagrange com uma condição do tipo Rolle, ou simplesmente, teorema do tipo valor médio com uma condição do tipo Rolle.

Teorema 2.2 (Teorema do valor médio de Flett [4])**.** *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $[a,b]$ com $f'(a) = f'(b)$. Então, existe $\xi \in (a,b)$ tal que*

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}. \tag{3}$$

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor $f'(a) = f'(b) = 0$, pois caso contrário fazemos $\psi(x) = f(x) - xf'(a)$ e daí teremos $\psi'(a) = \psi'(b) = 0$. Definamos a função $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}, & x \in (a,b] \\ f'(a), & x = a. \end{cases}$$

A função φ é contínua em $[a,b]$, derivável em $(a,b]$ e para $x \in (a,b)$,

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)}{x - a} - \frac{\varphi(x)}{x - a}.$$

Observemos que, $\varphi(a) = 0$. Se $\varphi(b) = 0$, pelo teorema de Rolle existe $\xi \in (a,b)$ tal que $\varphi'(\xi) = 0$ e o teorema está provado.

[9]Thomas Muirhead Flett (1923-1976), matemático britânico.

Suponhamos $\varphi(b) \neq 0$. Se $\varphi(b) > 0$, segue que

$$\varphi'(b) = \frac{f'(b) - \varphi(b)}{b-a} = -\frac{\varphi(b)}{b-a} < 0.$$

Logo, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno existe $x_1 \in (b-\epsilon, b)$ tal que $\varphi(b) < \varphi(x_1)$. Como φ é contínua em (a, x_1) e $0 = \varphi(a) < \varphi(b) < \varphi(x_1)$, segue do teorema do valor intermediário, que existe $\eta \in (a, x_1)$ tal que $\varphi(\eta) = \varphi(b)$. E então, do teorema de Rolle aplicado ao intervalo $[\eta, b]$, existe $\xi \in (\eta, b) \subset (a, b)$ tal que $\varphi'(\xi) = 0$, isto é, $f'(\xi) = \frac{f(\xi)-f(a)}{\xi - a}$.

O caso $\varphi(b) < 0$ é análogo. □

Geometricamente, o teorema de Flett diz que se uma curva $(t, f(t))$ é suave no intervalo $[a, b]$ e as retas tangentes nos extremos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ são paralelas, então, existe um ponto $\xi \in (a, b)$ de modo que a reta tangente ao gráfico de f que passa por $(\xi, f(\xi))$ também passa por $(a, f(a))$, como podemos ver na Figura 1.

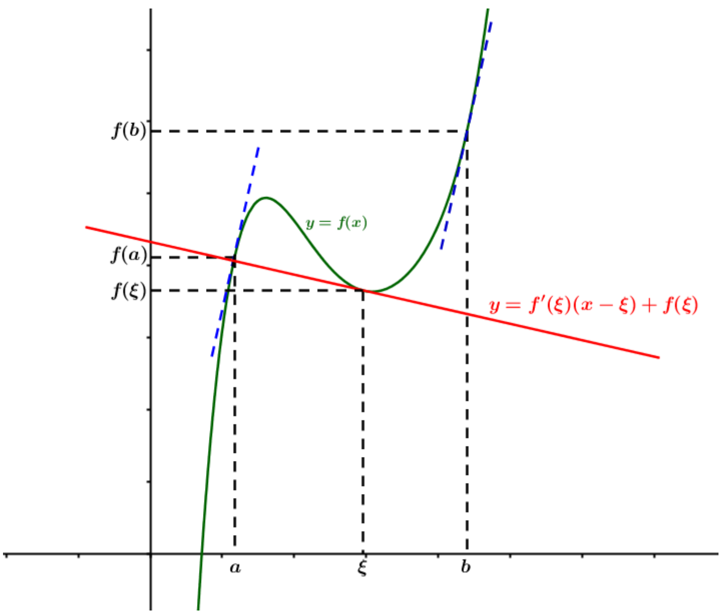

Figura 1. Interpretação geométrica do teorema de Flett

Por outro lado, do ponto de vista cinemático, Flett concluiu que, se as velocidades inicial e final de uma partícula com trajetória $(t, f(t))$ suave no intervalo de tempo $[a, b]$ forem iguais, então, existe um momento $t_j \in (a, b)$ tal que a velocidade instantânea da partícula neste instante, é exatamente a velocidade média do percurso até o instante t_j.

Por comodidade, dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, chamaremos o ponto $\xi \in (a, b)$ tal que satisfaz a conclusão do teorema de Flett simplesmente de *ponto de Flett*.

Um exemplo básico para exemplificar o uso do teorema de Flett pode ser dado quando consideramos a função $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 + 2x - 1$. Como

f é um polinômio segue que f é derivável em $[-2, 2]$ e usando (3) vemos facilmente que $\xi = 1 \in (-2, 2)$ é um ponto de Flett de f.

A seguir trataremos brevemente dos resultados apresentados por R. Meyers em 1977. Estes apresentam variações do teorema de Flett. As interpretações geométricas e físicas são análogas às interpretações do teorema de Flett, portanto, não serão verbalmente discutidas nesta seção.

Teorema 2.3 ([13, Teorema 1′]). *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $[a, b]$ com $f'(a) = f'(b)$. Então, existe $\xi \in (a, b)$ tal que*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(\xi)}{b - \xi}.$$

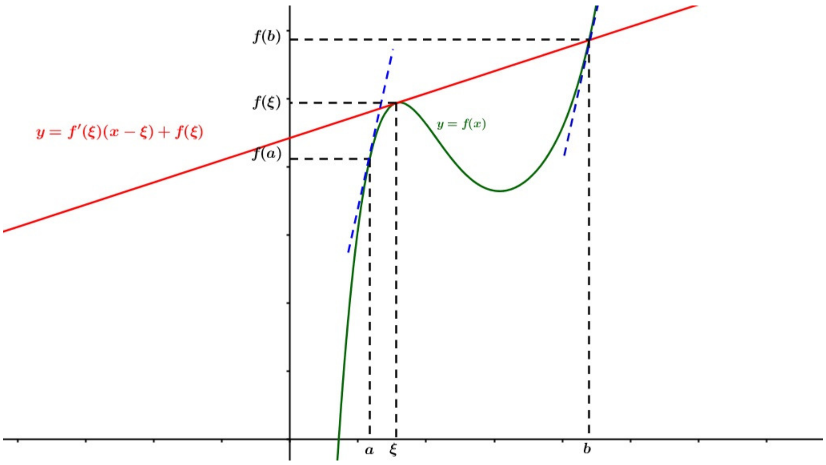

FIGURA 2. Interpretação geométrica Teorema 2.3

Teorema 2.4 ([13, Teorema 2]). *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $[a, b]$ com $f'(a) = f'(b)$. Então, existe $\xi \in (a, b)$ tal que*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(\xi)}{\xi - a}.$$

Teorema 2.5 ([13, Teorema 2′]). *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $[a, b]$ com $f'(a) = f'(b)$. Então, existe $\xi \in (a, b)$ tal que*

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b - \xi}.$$

Teorema 2.6 ([13, Teorema 3]). *Se f é diferenciável e f' é contínua em $[a, b]$ e $[f(b) - f(a)][f(b) - f(a) - (b - a)f'(b)] < 0$. Então, existe $\xi \in (a, b)$ tal que*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{\xi - a}.$$

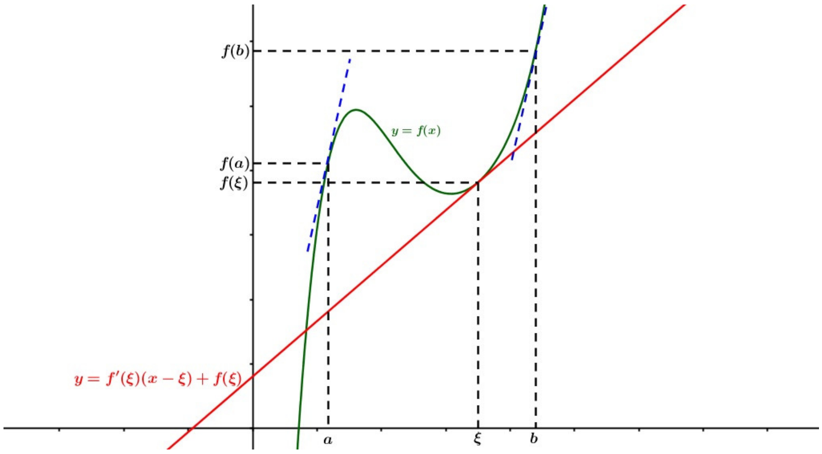

Figura 3. Interpretação geométrica Teorema 2.4

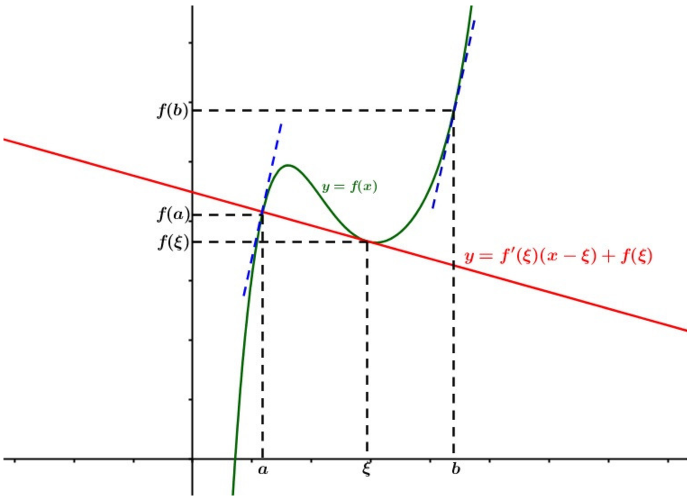

Figura 4. Interpretação geométrica Teorema 2.5

Teorema 2.7 ([13, Teorema 3′]). *Se f é diferenciável e f' é contínua em $[a,b]$ e $[f(b)-f(a)][f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)]<0$. Então, existe $\xi\in(a,b)$ tal que*

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-\xi}.$$

Teorema 2.8 ([13, Teorema 4]). *Se f é diferenciável e f' é contínua em $[a,b]$ e $f'(a)[f(b)-f(a)-(b-a)f'(b)]>0$. Então, existe $\xi\in(a,b)$ tal que*

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}.$$

Teorema 2.9 ([13, Teorema 4′]). *Se f é diferenciável e f' é contínua em $[a,b]$ e $f'(b)[f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)]>0$. Então, existe $\xi\in(a,b)$ tal que*

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(\xi)}{b-a}.$$

3. Existência de Pontos de Flett

O assunto discutido nessa seção tem motivação no exemplo a seguir.

Seja $[a,b]$ um intervalo fechado que contém o 0 no seu interior e considere a função $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=|x|$, que não é diferenciável em $x=0$, entretanto, supondo que $a<x<0$ temos,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{|x|-|a|}{x-a}=\frac{-x+a}{x-a}=-1=f'(x),\ \forall x\in(a,0).$$

Portanto, existem infinitos pontos de Flett em $(a,0)\subset(a,b)$.

Este exemplo mostra que o conjunto das funções que satisfazem as hipóteses do teorema de Flett está estritamente contido no conjunto das funções que têm um ponto de Flett. Portanto, é natural perguntarmos que outras condições suficientes existem que garantam a existência de pontos de Flett.

Originalmente, em 1958, T.M. Flett demonstrou que pontos de Flett existem sob as hipóteses de que f seja diferenciável no intervalo fechado $[a,b]$ e que $f'(a)=f'(b)$. Mas esta não é a única.

Os primeiros estudos sobre os resultados de T.M Flett e suas generalizações foram feitos em 1966 pelo matemático Donald. H. Trahan em 1966 (ver [18]). Ele deu uma nova condição para a existência de um ponto de Flett através de algumas desigualdades, usando uma comparação entre a inclinação da reta secante ao gráfico da função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ passando pelos extremos $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$ e a inclinação das retas tangentes ao gráfico passando pelos mesmos.

Os seguintes resultados são necessários para a compreensão da condição de Trahan.

Lema 3.1 ([18, Lema 1]). *Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma função contínua, diferenciável em $(a,b]$ e $f'(b)[f(b)-f(a)]\leqslant 0$, então existe $c\in(a,b]$ tal que $f'(c)=0$.*

Lema 3.2 ([18, Lema 2]). *Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma função contínua, diferenciável em $(a,b]$ e $f'(b)[f(b)-f(a)]<0$, existe $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.*

Observemos que os Lemas 3.1 e 3.2 são generalizações do Teorema de Rolle.

Teorema 3.1 (**Condição de Trahan** [18]). *Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável e tal que*

$$\left(f'(b)-\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)\left(f'(a)-\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)\geqslant 0. \tag{4}$$

Então, existe um ponto de Flett em $(a,b]$.

Demonstração. Considere a função $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & x\in(a,b]\\ f'(a), & x=a\end{cases}$$

Observemos que φ é contínua em $[a,b]$, é diferenciável em $(a,b]$ e que $\varphi'(b)[\varphi(b)-\varphi(a)] \leqslant 0$.

Logo, pelo Lema 3.1, existe $\xi \in (a,b)$ tal que $\varphi'(\xi)=0$, o que significa que

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi)-f'(a)}{\xi - a},$$

ou seja, ξ é um ponto de Flett em $(a,b]$. □

No exemplo a seguir, temos uma função que não satisfaz a condição de Flett, mas satisfaz a de Trahan e possui, portanto, um ponto de Flett.

Exemplo 3.1. *Considere a função* $f : [-\frac{1}{2}, 1] \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^3$.

Notemos que f *é diferenciável e que* $f'(-\frac{1}{2}) \neq f'(1)$*, logo,* f *não satisfaz a condição de Flett.*

No entanto, f *satisfaz a condição de Trahan e, portanto, possui um ponto de Flett, a saber* $\xi = \frac{1}{4} \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right]$.

Outra condição suficiente para a existência de um ponto de Flett foi provada por J. Tong em [17]. Um ponto interessante desta condição é que Tong só exige a diferenciabilidade de f em (a,b), mas usa os conceitos de média aritmética de f, $\mathscr{M}(f) := \frac{f(a)+f(b)}{2}$ e média de f, $\mathscr{I}(f) := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$.

Teorema 3.2 (**Condição de Tong** [17, Teorema 2])**.** *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a,b]$ *e diferenciável em* (a,b)*. Se* $\mathscr{M}(f) = \mathscr{I}(f)$ *então,* f *admite um ponto de Flett em* (a,b).

Demonstração. Basta observar que a função h dada por

$$\begin{array}{rccl} h: & [a,b] & \to & [a,b] \\ & x & \mapsto & h(x) = \frac{f(x)+f(a)}{2}(x-a) - \int_a^x f(t)dt. \end{array}$$

é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b) com derivada

$$h'(x) = \frac{1}{2}f'(x)(x-a) + \frac{1}{2}(f(x)+f(a)) - f(x).$$

Como $h(a)=0$ e $\mathscr{M}(f) = \mathscr{I}(f)$, segue que $h(b)=0$. Agora, usando o teorema de Rolle obtemos a conclusão do eorema. □

O exemplo a seguir traz uma função que não satisfaz a condição de Flett, nem de Trahan, mas satisfaz a de Tong.

Exemplo 3.2. *Considere a função* $f(x) = \arcsin x$ *sobre o intervalo* $[-1,1]$.

Notemos que f *não satisfaz a condição de Flett, nem a de Trahan, pois não é diferenciável nos extremos. No entanto, um cálculo simples usando integração por partes garante que* $\mathscr{M}(f) = \mathscr{I}(f)$*, o que prova que a função* $\arcsin x$ *satisfaz a condição de Tong no intervalo* $[-1,1]$ *e que, portanto, possui um ponto de Flett.*

A terceira condição se deve ao matemático B. Malesevic e é feita em termos de uma função infinitesimal.

Para tanto, seja $f : [a, b] \in \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $[a, b]$ e diferenciável um número arbitrário de vezes numa vizinhança à direita do ponto $x = a$.

Considere a expansão de Taylor de ordem um, com resto, dado por

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \varphi(x)(x - a),$$

onde $\lim_{x\to a^+} \varphi(x) = 0$. Então, definimos a função $\varphi_1 : [a, b] \in \mathbb{R}$ por

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a), & x \in (a, b] \\ 0, & x = a. \end{cases} \tag{5}$$

A partir desta função φ_1 Malesevic demonstrou o seguinte resultado:

Teorema 3.3 (Condição de Malesevic [11])**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e φ_1 como em* (5)*. Se uma das seguinte condições*

$$\mathrm{T}_1 : \ \varphi_1'(b)\,\varphi_1(b) < 0 \ \text{ e}$$
$$\mathrm{M}_1 : \ \varphi_1'(a)\,\varphi_1(b) < 0$$

é satisfeita, então f possui um ponto de Flett.

Demonstração. Se a condição T_1 é satisfeita então $\varphi_1'(b)[\varphi_1(b) - \varphi_1(a)] < 0$. Logo, do Lema 3.2 existe $\xi_1 \in (a, b)$ tal que $\varphi_1'(\xi_1) = 0$, i.e.,

$$\tfrac{1}{\xi_1 - a}\big(f'(\xi_1) - \tfrac{f(\xi_1)-f(a)}{\xi_1 - a}\big) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi_1) = \tfrac{f(\xi_1)-f(a)}{\xi_1 - a},$$

Agora se a condição M_1 é satisfeita então $\varphi_1'(a)\big[\varphi_1(b) - \varphi_1(a)\big] < 0$. Logo, do Corolário 3 do Teorema 2 em [12] existe $\xi_2 \in (a, b)$ tal que $\varphi_1'(\xi_2) = 0$, i.e.,

$$\tfrac{1}{\xi_2 - a}\big(f'(\xi_2) - \tfrac{f(\xi_2)-f(a)}{\xi_2 - a}\big) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi_2) = \tfrac{f(\xi_2)-f(a)}{\xi_2 - a}.$$

□

Observação 3.1. *Se ambas as condições* T_1 *e* M_1 *do* Teorema 3.3 *são satisfeitas, então existem dois pontos (distintos) de Flett. (veja* [12]*).*

A relação entre funções que satisfazem as condições de Flett, Trahan, Tong e Malesevic é representada na Figura 5.

Observemos que $\Delta_{12} \neq \emptyset$, uma vez que $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ é uma função que não satisfaz nenhuma das condições, pois não é diferenciável em (a, b) para qualquer intervalo $[a, b]$ da reta, que contenha o zero. Entretanto, possui infinitos pontos de Flett.

Analogamente,

(i) $f(x) = x^3$, $x \in [-1, 1]$ está em Δ_1.

(ii) $f(x) = \sin(x), x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ está em Δ_2.

(iii) $f(x) = x^3, x \in \left[-\frac{2}{3}, 1\right]$ está em Δ_3.

(iv) $f(x) = \arcsin(x), x \in [-1, 1]$ está em Δ_{12}.

Prova-se que todos os conjuntos Δ_i, $i = 1, 2, ..., 12$ são não vazios, mas a confecção de exemplos para $i = 4, 5, 6, 7, 8, 10$ e 11 fogem ao objetivo deste trabalho e por isso não serão discutidos aqui.

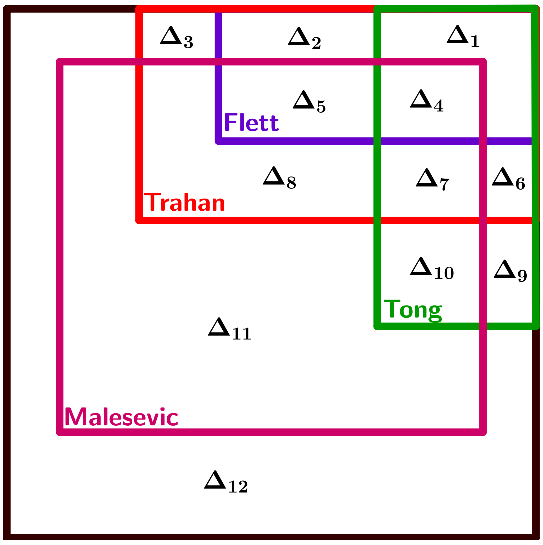

FIGURA 5. Relação entre as condições de Flett, Tong, Trahan e Malesevic

Maiores detalhes das demonstrações e exemplos vistos nesta seção, sugerimos a referência [5].

4. Generalizações e Aplicações

4.1. **Algumas Generalizações.** A seguir trataremos de algumas generalizações e consequências do teorema de Flett. O teorema abaixo foi demonstrado em 1998. Este resultado é uma generalização do teorema de Flett que não exige a condição tipo Rolle, nesse caso o resultado é mais geral. Notemos que nos dois teoremas a seguir, o caso em que $f'(a) = f'(b)$ é exatamente o teorema de Flett.

Teorema 4.1 (**Riedel-Sahoo** [16, Teorema 5.2])**.** *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $[a, b]$, então, existe $\xi \in (a, b)$ tal que*

$$f(\xi) - f(a) = (\xi - a)f'(\xi) - \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(\xi - a)^2. \tag{6}$$

Demonstração. Definamos a função $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(x - a)^2.$$

Fácilmente vemos que f é diferenciável em $[a, b]$ e

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(x - a).$$

Como $\varphi'(a) = f'(a) = \varphi'(b)$, segue do teorema de Flett que existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$\varphi'(\xi) = \frac{\varphi(\xi) - \varphi(a)}{\xi - a}.$$

Portanto, existe $\xi \in (a, b)$ tal que a equação (6) é satisfeita, o que prova o teorema. $\square$

Inspirados, então, pela afirmação do Teorema 2.3, demonstra-se o resultado abaixo.

Teorema 4.2 ([3, Teorema 2.1])**.** *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $[a, b]$, então, existe $\xi \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) - f(\xi) = (b - \xi)f'(\xi) + \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(b - \xi)^2.$$

O resultado abaixo é também uma generalização do teorema de Flett com outra condição do tipo Rolle $f''(a) = f''(b)$.

Teorema 4.3 ([15, Exercício 5.3.11(b)])**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável e tal que $f''(a) = f''(b)$. Então, existe $\xi \in (a, b)$ tal que*

$$f(\xi) - f(a) = (\xi - a)f'(\xi) - \frac{(\xi - a)^2}{2}f''(\xi).$$

O resultado abaixo é análogo ao Teorema anterior, também com a condição do tipo Rolle $f''(a) = f''(b)$.

Teorema 4.4. *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável e tal que $f''(a) = f''(b)$. Então, existe $\xi \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) - f(\xi) = (b - \xi)f'(\xi) - \frac{(b - \xi)^2}{2}f''(\xi).$$

A demonstração do Teorema 4.4 é análoga à demonstração do Teorema 4.3 e portanto deixamos como exercício para o leitor.

Os Teoremas 2.2 e 4.3 foram generalizados por I. Pawlikowska em [14] para funções n vezes diferenciáveis, com a condição do tipo Rolle $f^{(n)}(a) = f^{(n)}(b)$.

Teorema 4.5 ([14, Lema 2.2])**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ n vezes diferenciável e tal que $f^{(n)}(a) = f^{(n)}(b)$. Então, existe $\xi \in (a, b)$ tal que*

$$f(\xi) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i!}(\xi - a)^i f^{(i)}(\xi).$$

4.2. **Algumas Aplicações.** A seguir vamos apresentar algumas aplicações do teorema de Flett. Vamos tratar, principalmente, dos trabalhos feitos por C. Lupu e T. Lupu em [9] e por C. Lupu em [10].

O objetivo desta seção é apresentar algumas propriedades importantes sobre alguns operadores integrais, como o de Volterra.

Lembremos que $C([0, 1])$ denota o conjunto das funções contínuas reias definidas em $[0, 1]$ e $C^1([0, 1])$ é o conjunto de todas as funções reais continuamente diferenciáveis definidas no mesmo intervalo.

Definamos operadores $T, S : C([0,1]) \to C([0,1])$ por

$$(T\varphi)(t) = \varphi(t) - \int_0^t \varphi(x)dx$$

$$(S\psi)(t) = t\psi(t) - \int_0^t x\psi(x)dx.$$

As seguintes propriedades valem para os operadores T e S.

Teorema 4.6 ([9, Teorema 2.11]). *Se $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, então existem $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (0,1)$ tal que*

$$\int_0^1 f(x)dx\,(Tg)(\xi_1) = \int_0^1 g(x)dx\,(Tf)(\xi_1)$$

$$(Tf)(\xi_2) = (Sf)(\xi_2)$$

$$\int_0^1 f(x)dx\,(Sg)(\xi_3) = \int_0^1 g(x)dx\,(Sf)(\xi_3).$$

Teorema 4.7 ([9, Teorema 2.12]). *Se $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, então existem $\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$ tal que*

$$\int_0^1 (1-x)f(x)dx\,(Tg)(\xi_1) = \int_0^1 (1-x)g(x)\,dx\,(Tf)(\xi_1)$$

$$\int_0^1 (1-x)f(x)dx\,(Sg)(\xi_2) = \int_0^1 (1-x)g(x)\,dx\,(Sf)(\xi_2).$$

As demonstrações dos Teoremas 4.6 e 4.7 encontram-se com detalhes em [9, Teorema 2.11 e Teorema 2.12].

O seguinte resultado é a versão equivalente do teorema do valor médio de Flett para o teorema do valor médio de Cauchy e é criticamente utilizado para obter os resultados seguintes.

Teorema 4.8 ([10, Lema 2.1]). *Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis em $[a,b]$ com $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a,b]$ e $\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{f'(b)}{g'(b)}$. Então, existe $\xi \in (a,b)$ tal que*

$$\frac{f(\xi) - f(a)}{g(\xi) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Denotemos por $L^2((0,1))$ o espaço vetorial das funções reais quadrado integráveis a Lebesgue sobre $(0,1)$, i.e.,

$$L^2((0,1)) = \left\{ f : (0,1) \to \mathbb{R} : f \text{ é Lebesgue mensurável e} \int\limits_a^b f^2(x)dx < \infty \right\}.$$

Observemos que para funções contínuas no intervalo $(0,1)$ a integral de Lebesgue e de Riemann coincidem, logo podemos pensar num primeiro momento no espaço $L^2((0,1))$ como sendo o espaço das funções contínuas em $(0,1)$ cujo quadrado é Riemann integrável em $(0,1)$. Mais ainda, o espaço $L^2((0,1))$ é um espaço vetorial normado com a norma

$$\|f\|_{L^2((0,1))} = \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{1/2}, \quad f \in L^2((0,1)).$$

Definição 4.1 (Operador de Volterra)**.** *Sejam $f \in L^2((0,1))$ e $x \in (0,1)$. Definimos o operador de Volterra, V, por*

$$\begin{array}{rccl} V: & L^2((0,1)) & \to & L^2((0,1)) \\ & f & \to & V(f)(x) = \int\limits_0^x f(t)dt. \end{array}$$

Sejam $\Psi, \phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ funções sendo Ψ contínua e ϕ diferenciável com $\phi'(x) \neq 0$ para todo $x \in (0,1)$. Definimos o operador do *tipo Volterra com peso*

$$V_\phi \Psi(t) = \int\limits_0^t \phi(x)\Psi(x)dx.$$

No que segue, definimos os espaços

$$\mathfrak{C}([a,b]) := \left\{ \phi \in C^1([a,b]), \phi'(x) \neq 0, x \in [a,b], \phi(a) = 0 \right\} \text{ e}$$

$$C_{nula}([a,b]) := \left\{ f \in C([a,b]) : \int\limits_a^b f(x)dx = 0 \right\}.$$

Teorema 4.9. *Seja $f \in C_{nula}([a,b])$ e $g \in C^1([a,b])$, com $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Então, existe $\xi \in (a,b)$ tal que*

$$V_g f(\xi) = g(a) \cdot V f(\xi).$$

Demonstração. Consideremos as funções $\varphi, \eta : [a,b] \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int\limits_a^t f(x)g(x)dx - g(t)\int\limits_a^t f(x)dx \text{ e} \\ \eta(t) &= g(t). \end{aligned}$$

Como φ é diferenciável segue que

$$\varphi'(t) = f(t)g(t) - \left(g'(t)\int_a^t f(x)dx + g(t)f(t)\right) = -g'(t)\int_a^t f(x)dx.$$

Observemos que $\varphi'(a) = 0$, assim $\dfrac{\varphi'(a)}{\eta'(a)} = 0$.

Por outro lado, $\varphi'(b) = -g'(b)\int_a^b f(x)dx = 0$ pois $f \in C_{nula}([a,b])$, e daí,

$$\frac{\varphi'(b)}{\eta'(b)} = 0.$$

Logo, do Teorema 4.8 segue que existe $\xi \in (a,b)$ tal que

$$\frac{\varphi(\xi) - \varphi(a)}{\eta(\xi) - \eta(a)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\eta'(\xi)}.$$

Equivalentemente

$$\frac{\int_a^\xi f(x)g(x)dx - g(\xi)\int_a^\xi f(x)dx}{g(\xi) - g(a)} = \frac{-g'(\xi)\int_a^\xi f(x)dx}{g'(\xi)}.$$

Disso segue que

$$\int_a^\xi f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx.$$

□

Teorema 4.10. *Se f, g são funções reais contínuas em $[0,1]$ e $\phi \in \mathfrak{C}([0,1])$, então existe $\xi \in (0,1)$ tal que*

$$V_\phi f(\xi)\int_0^1 g(x)dx - V_\phi g(\xi)\int_0^1 f(x)dx$$
$$= \phi(0)\left(Vf(\xi)\int_0^1 g(x)dx - Vg(\xi)\int_0^1 f(x)dx\right).$$

Os detalhes da demonstração do Teorema 4.10 podem ser encontrados em [10, Teorema 2.4]. Além disso, algumas observações a respeito deste teorema são pertinentes:

(i) Se $\phi(0) = 0$ então existe $\xi \in (0,1)$ tal que

$$V_\phi f(\xi)\int_0^1 g(x)dx = V_\phi g(\xi)\int_0^1 f(x)dx;$$

Em particular se $\phi(x)=x$, existe $\xi\in(0,1)$ tal que

$$\int_0^1 f(x)dx\int_0^\xi xg(x)dx=\int_0^1 g(x)dx\int_0^\xi xf(x)dx.$$

(**ii**) Considere o espaço L^2 com peso dado por

$$L^2_\phi(0,\xi)=\left\{u:(0,\xi)\to\mathbb{R}:\int_0^\xi u^2(x)\phi(x)\,dx<\infty\right\}$$

e equipado com a norma

$$\|u\|_{L^2_\phi(0,\xi)}=\left(\int_0^\xi u^2(x)\phi(x)dx\right)^{1/2},\quad u\in L^2_\phi(0,\xi).$$

Substituindo f e g por f^2 e g^2 temos que existe $\xi\in(0,1)$ tal que

$$\begin{aligned}V_\phi f^2(\xi)\int_0^1 g^2(x)dx&-V_\phi g^2(\xi)\int_0^1 f^2(x)dx\\ &=\phi(0)\left(Vf^2(\xi)\int_0^1 g^2(x)dx-Vg^2(\xi)\int_0^1 f^2(x)dx\right),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}||f||^2_{L^2_\phi(0,\xi)}||g||^2_{L^2(0,1)}&-||g||^2_{L^2_\phi(0,\xi)}||f||^2_{L^2(0,1)}\\ &=\phi(0)\big(||f||^2_{L^2(0,\xi)}||g||^2_{L^2(0,1)}-||g||^2_{L^2(0,\xi)}||f||^2_{L^2(0,1)}\big).\end{aligned}$$

Desta última igualdade, se $\phi(0)=0$, obtemos

$$||f||_{L^2_\phi(0,\xi)}||g||_{L^2(0,1)}=||g||_{L^2_\phi(0,\xi)}||f||_{L^2(0,1)}. \tag{7}$$

Escrevendo a equação (7) da seguinte maneira

$$\frac{||f||_{L^2_\phi(0,\xi)}}{||g||_{L^2_\phi(0,\xi)}}=\frac{||f||_{L^2(0,1)}}{||g||_{L^2(0,1)}}, \tag{8}$$

concluímos a seguinte propriedade interessante: dadas duas funções f,g que tem normas iguais (ou proporcionais) em $L^2(0,1)$, e se for dada uma função peso não constante ϕ, então existe um número $\xi\in(0,1)$ onde as normas das funções serão iguais (ou proporcionais) em $L^2_\phi(0,\xi)$.

5. Problemas em aberto

O estudo de condições necessárias e suficientes para a existência de pontos de Flett (veja seção 2) não é, até onde sabemos, completo. Recorde que a função $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$ pertence ao conjunto Δ_{12} (veja a Figura 5), portanto, não satisfaz nenhuma das condições discutidas anteriormente. No entanto, possui infinitos pontos de Flett. Esta observação, sozinha, torna natural três perguntas, ainda não respondidas na literatura:

Pergunta 5.1. *Além das apresentadas neste trabalho, existem outras condições suficientes para a existência de pontos de Flett?*

Pergunta 5.2. *Existe uma condição necessária para a existência de pontos de Flett?*

Pergunta 5.3. *Assumindo que uma função possua pelo menos um ponto de Flett. Sob quais condições este seria único?*

Agradecimentos: Os autores agradecem ao parecerista pelos comentários e observações, que ajudaram a melhorar de maneira significativa a apresentação deste trabalho. Este trabalho é fruto da Iniciação Científica realizada pelo primeiro autor, quem agradece o apoio da FAPESP através do Processo 2013/03866-9.

Referências

[1] R.G. Bartle e Donald R. Sherbert. *Introduction to real analysis*. Four edition. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2011.
[2] F. Cajori. *A history of mathematics*. Fifth Edition. AMS, 1991.
[3] D. Cakmak, A. Tiryaki. *Mean value theorem for holomorphic functions*, Vol. 2012 (2012), No. 34, pp. 1–6.
[4] T.M. Flett. *A mean value problem*, Math. Gaz. 42(1958), pp. 38-39.
[5] O. Hutník and J. Molnárová. *On Flett's mean value theorem*. Aequat. Math., Published online: 22 October 2014.
[6] G. Lozada-Cruz. *Some variants of Lagrange's mean value theorem*. Sel. Mat. 7 (1)(2020), pp. 144–150.
[7] G. Lozada-Cruz. *Some variants of Cauchy's mean value theorem*. Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech. 51 (2020), no. 7, pp. 1155–1163.
[8] G. Lozada-Cruz. *Some applications of Cauchy's mean value theorem*. Asia Pac. J. Math. 7 (30) (2020), pp. 1–9.
[9] C. Lupu e T. Lupu. *Mean value theorems for some linear integral operators*, Electron. J. Diff. Eqn., 2009, no. 117, pp. 1–15.
[10] C. Lupu. *Mean value problems of Flett type for a Volterra operator*, Electron. J. Diff. Eqn., 2013, No. 53, pp. 1–7.
[11] B.J. Malesevic. *Some mean value theorem in terms of an infinitesimal function*. Mat. Vesnik 51 (1999), pp. 9–13.
[12] J. Malesevic. *O jednoj teoremi G. Darboux-a i teoremi D. Trahan-a*. Mat. Vesnik 4 (13) (32) (1980), pp. 304–312.
[13] R.E. Meyers. *Some elementary results related to the mean value theorem*, The two-year college Mathematics Journal. Vol. 8, No. 1 (1977), pp. 51-53.
[14] I. Pawlikowska. *An extension of a theorem of Flett*. Demonstratio Math. 32 (1999), no. 2, pp. 281–286.
[15] T.L. Radulescu, V.D. Radulescu, T. Andreescu. *Problems in Real Analysis: advanced calculus on the real axis*, Springer Verlag, 2009.
[16] P.K. Sahoo and T. Riedel. *Mean Value Theorems and Functional Equations*, World Scientific Publishing Company, River Edge, NJ, 1998.
[17] J. Tong. *On Flett's mean value theorem*. Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech. **35** (2004), 936-941.
[18] D.H. Trahan. *A new type of mean value theorem*. Math. Mag. 39, pp. 264–268, (1966).

Department of Mathematical Sciences, The University of Memphis, Memphis, TN 38152, USA. *Email address:* msbngrti@memphis.edu

Departamento de Matemática, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas (IBILCE)–Universidade Estadual Paulista (UNESP), São José do Rio Preto, Brasil.
Email address: german.lozada@unesp.br