

## A ESPIRAL LOGARÍTMICA E O LOGO DA SBM

MICHEL SPIRA

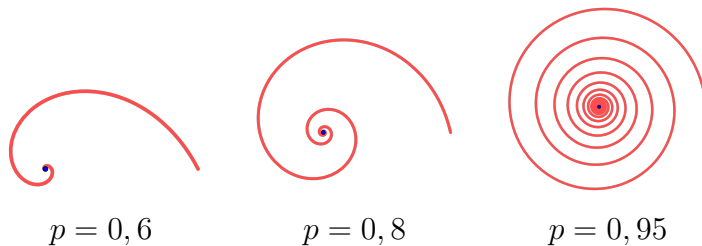
RESUMO. A espiral logarítmica é uma das mais fascinantes curvas da Matemática, devido a suas maravilhosas propriedades e sua ubiquidade em fenômenos naturais e científicos. Ela foi objeto de estudo de, entre outros, Descartes, Torricelli e Jacob Bernoulli. Aqui apresentamos a família de espirais logarítmicas e algumas de suas propriedades, mostramos como gerar espirais logarítmicas a partir de retângulos e triângulos isósceles, e determinamos quando as espirais assim geradas são tangentes aos lados da figura geradora. Ao final, discutimos o logo da SBM.

### 1. A ESPIRAL LOGARÍTMICA

Uma curva dada em um sistema de coordenadas polares de origem  $O$  por uma equação da forma

$$(1) \quad r(\theta) = ap^\theta$$

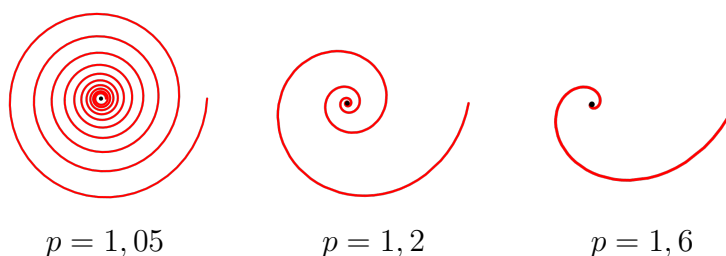
onde  $a, p \in \mathbb{R}^+$  é dita uma *espiral logarítmica de centro  $O$* . Essa equação determina uma família  $\mathcal{L}$  de curvas a dois parâmetros;  $a = r(0)$  é apenas um fator de escalonamento e não tem influência no comportamento assintótico de uma espiral logarítmica, que é determinado por  $p$ . Quando  $p < 1$  temos  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} r(\theta) = 0$  e quando  $p > 1$  temos  $\lim_{\theta \rightarrow -\infty} r(\theta) = 0$ ; em ambos os casos, podemos considerar  $O$  como uma representação do infinito.



---

Data de aceitação: 1 de outubro de 2019.

*Palavras chave.* Espiral logarítmica, logo da SBM.



Definimos acima uma família de curvas, mas mesmo assim vamos ocasionalmente referir-nos “à” espiral logarítmica. Esse abuso de linguagem já é consagrado e seu uso indica que discurso está sendo feito de modo genérico.

O centro  $O$  e dois pontos distintos  $(b, \beta)$  e  $(c, \gamma)$  em coordenadas polares com  $b, c \in \mathbb{R}^+$  determinam uma única espiral logarítmica. De fato, definindo

$$p = \left( \frac{b}{c} \right)^{\frac{1}{\beta - \gamma}}$$

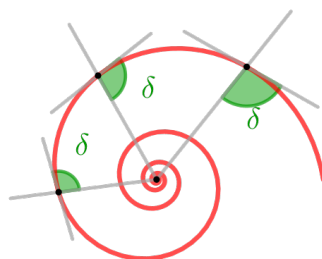
e

$$a := \frac{b}{p^\beta} = \frac{c}{p^\gamma} .$$

temos que a espiral logarítmica dada por  $r = ap^\theta$  passa pelos pontos dados. Reciprocamente, quando conhecidos o centro e dois pontos (também em coordenadas polares) de uma mesma espiral logarítmica, os parâmetros  $a$  e  $p$  podem ser recuperados como acima.

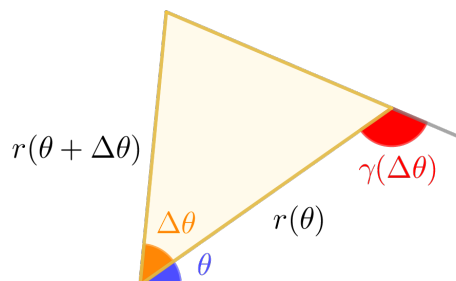
Para finalizar essa introdução, observamos que as funções  $r$  como em (1) levam progressões aritméticas em progressões geométricas e são as únicas funções com essa propriedade; equivalentemente, suas inversas são as únicas funções que levam progressões geométricas em progressões aritméticas ([1], capítulo 8). Dessa maneira, as ideias de raios igualmente espaçados angularmente e raios em progressão geométrica são equivalentes em uma espiral logarítmica.

**1.1. A propriedade equiangular.** Uma linda propriedade de  $\mathcal{L}$  é que o ângulo entre o raio vetor e a tangente em qualquer ponto de uma espiral logarítmica dada é constante; vamos denotar esse ângulo por  $\delta$  a partir de agora.



Do ponto de vista qualitativo, isso decorre imediatamente do fato apontado anteriormente de que  $r$  como em (1) leva progressões aritméticas em progressões geométricas; para nossos propósitos, no entanto, é importante caracterizar  $\delta$  quantitativamente,

o que vamos fazer mostrando que  $\text{ctg } \delta \equiv \ln p$ . Para isso, consideremos a figura abaixo, onde supomos por um momento que  $r$  é uma função diferenciável qualquer<sup>1</sup>.



A lei dos senos nos dá a primeira igualdade abaixo

$$\frac{r(\theta + \Delta\theta)}{\text{sen } \gamma(\Delta\theta)} = \frac{r(\theta)}{\text{sen}[\gamma(\Delta\theta) - \Delta\theta]} = \frac{r(\theta + \Delta\theta) - r(\theta)}{\text{sen } \gamma(\Delta\theta) - \text{sen}[\gamma(\Delta\theta) - \Delta\theta]}$$

e a segunda segue de propriedades elementares de proporções. Reescrevendo essa última igualdade como

$$\frac{r(\theta + \Delta\theta) - r(\theta)}{\Delta\theta} \cdot \frac{1}{r(\theta)} = \frac{\text{sen } \gamma(\Delta\theta) - \text{sen}[\gamma(\Delta\theta) - \Delta\theta]}{\Delta\theta} \cdot \frac{1}{\text{sen}[\gamma(\Delta\theta) - \Delta\theta]},$$

fazendo  $\Delta\theta \rightarrow 0$  e observando que  $\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \gamma(\Delta\theta) = \delta(\theta)$  obtemos

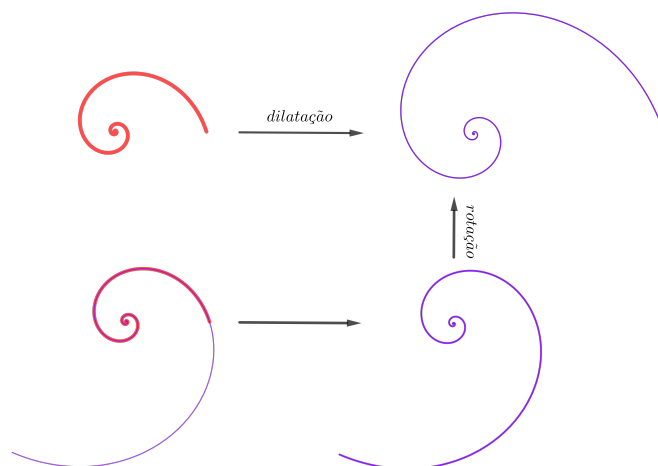
$$(2) \quad \frac{r'(\theta)}{r(\theta)} = \text{ctg } \delta(\theta).$$

Quando  $r(\theta) = ap^\theta$  temos  $\text{ctg } \delta(\theta) = \ln p$  para todo  $\theta$ , como anunciado. A equação (1) costuma ser apresentada na forma  $r(\theta) = ae^{b\theta}$  para deixar em evidência o parâmetro  $b = \ln p$ .

Reciprocamente, (2) mostra que a propriedade equiangular é característica de  $\mathcal{L}$ ; por esse motivo, uma espiral logarítmica também atende pelo nome de *espiral equiangular*.

**1.2. Autosimilaridade.** Outra bela propriedade de  $\mathcal{L}$  é a *autosimilaridade por rotação*, que diz que uma rotação com centro  $O$  e ângulo  $\alpha$  e uma dilatação de centro  $O$  e razão  $p^\alpha$  têm o mesmo efeito sobre uma espiral logarítmica. Para ver isso, basta escrever  $r(\theta + \alpha) = ap^{\theta+\alpha} = p^\alpha r(\theta)$  para todo  $\theta$ .

<sup>1</sup>A redação original do argumento que segue foi corrigida e simplificada com sugestões dos relatores.



A autosimilaridade por rotação é uma propriedade característica de  $\mathcal{L}$ . De fato<sup>2</sup>, seja  $r$  uma curva contínua dada em coordenadas polares tal que para todo  $\alpha$  existe  $\lambda(\alpha)$  tal que

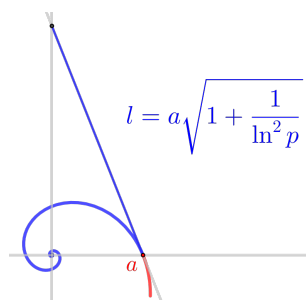
$$(3) \quad \lambda(\alpha)r(\theta) = r(\theta + \alpha)$$

para todo  $\theta$ ; sem perda de generalidade, podemos supor  $r(0) = 1$ . Colocando  $\theta = 0$  em (3) obtemos  $\lambda(\alpha) = r(\alpha)$  para todo  $\alpha$ ; em particular,  $\lambda$  é contínua. Segue também de (3) que  $\lambda(\alpha + \beta) = r(\alpha + \beta) = \lambda(\alpha)\lambda(\beta)$  para todos  $\alpha, \beta$  e logo  $\lambda(\alpha) = e^{c\alpha}$  para algum  $c$  ([1], capítulo 8). Colocando  $p = e^c$  temos  $r(\theta) = \lambda(\theta) = e^{c\theta} = p^\theta$  e recuperamos uma espiral logarítmica.

**1.3. Um mínimo de História.** Vamos agora apresentar alguns aspectos históricos da espiral logarítmica.

René Descartes (1596-1650) descobriu a espiral logarítmica a partir da propriedade equiangular; devemos a ele a terminologia *espiral equiangular*. A primeira menção a essa curva aparece em uma de suas cartas, enviada para Marin Mersenne (1588-1648) em 1638 [2].

Evangelista Torricelli (1608-1647) determinou em 1645 o comprimento da espiral logarítmica de  $\theta = 0$  a  $\theta = \infty$  usando o método de exaustão ([2],[3] capítulo 9). Essa foi a segunda retificação de uma curva na história da Matemática, a primeira sendo a da circunferência. O resultado de Torricelli aparece na figura abaixo.



<sup>2</sup>Argumento sugerido por Marco Moriconi.

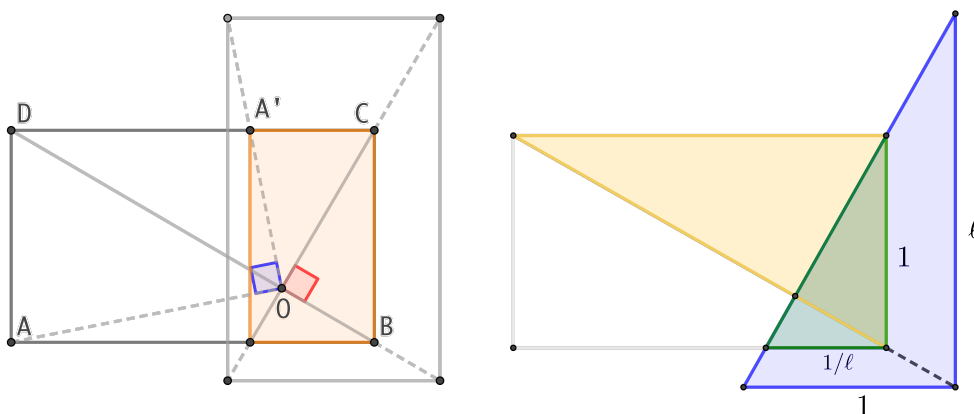
Jacob Bernoulli (1654-1705) estudou profundamente a espiral logarítmica e descobriu muitas de suas maravilhosas propriedades, que o levaram a chamá-la de *spira mirabilis*. Descrever as contribuições de Bernoulli foge ao escopo desse artigo; observamos apenas que a terminologia *espiral logarítmica* foi introduzida por ele em 1691 [2].

Mencionamos também que Isaac Newton (1642-1726) mostrou nos *Principia* que se um corpo percorre uma espiral logarítmica sob a ação de uma força central então essa força varia com o inverso do cubo da distância ao centro ([4],[5]).

Encerramos aqui nossa breve apresentação da espiral logarítmica. Recomendamos ([2],[3] capítulo 9) para exposições históricas mais completas, ([6],[7]) para detalhes sobre as propriedades que tanto encantaram Bernoulli, ([8],[9],[10]) para suas manifestações em outras áreas de conhecimento, ([11],[12],[13]) para informações adicionais e lindas figuras, e [14] para os interessados em seus aspectos místicos.

## 2. A ESPIRAL ASSOCIADA A UM RETÂNGULO

A figura abaixo, à esquerda, mostra um retângulo  $ABCD$  de dimensões  $\ell \times 1$  com  $\ell > 1$ ; o ponto  $O$  é a interseção da diagonal  $BD$  com a perpendicular por  $C$ .

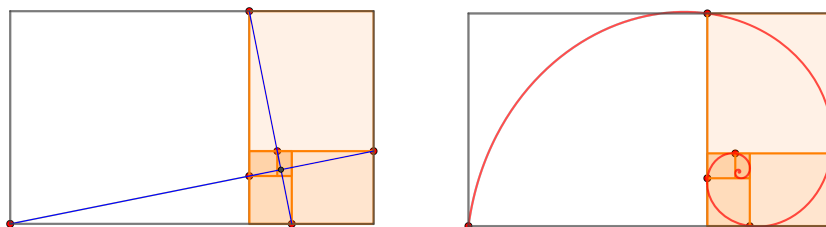


O retângulo sombreado é obtido do retângulo original por uma rotação de  $\frac{\pi}{2}$  em torno de  $O$  no sentido horário seguida de uma contração de  $\frac{1}{\ell}$  com centro  $O$ ; o ponto  $A'$  é a imagem de  $A$  por esse processo e  $OA$  é perpendicular a  $OA'$ . Para justificar essas afirmativas<sup>3</sup> basta observar a figura à direita, onde notamos que todos os triângulos que aparecem são semelhantes. O triângulo azul é a imagem do triângulo amarelo pela rotação e o triângulo verde, a imagem desse último pela contração. Como a imagem do retângulo original por essas transformações é um retângulo e já temos as imagens de três de seus vértices, a correção da figura à esquerda fica estabelecida.

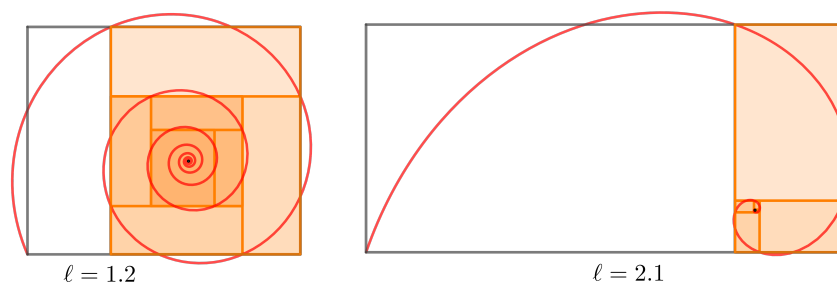
Como o retângulo sombreado é semelhante ao retângulo original, podemos iterar essa construção e obter a figura a seguir, à esquerda, onde exibimos cinco iterações, as sucessivas imagens de  $A$  e os raios por elas determinados. Esses raios formam uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{\ell}$  e estão angularmente espaçados de  $\frac{\pi}{2}$ , de

<sup>3</sup>Agradecemos a um dos relatores por insistir na inclusão de uma justificativa.

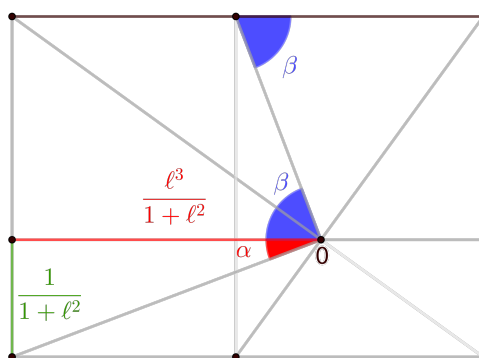
modo que seus extremos estão em uma espiral de centro  $O$ , como à direita. Dizemos que essa é a *espiral associada ao retângulo*; para ela temos  $p = \ell^{\frac{2}{\pi}}$ .



A figura a seguir



e o teorema do valor intermediário mostram que existe um único retângulo  $\ell_0 \times 1$  tal que a espiral associada é tangente ao lado  $CD$  (e logo também tangente a  $BC$  e  $AB$ ). Para determinar  $\ell_0$ , consideramos o retângulo  $\ell \times 1$  da figura abaixo

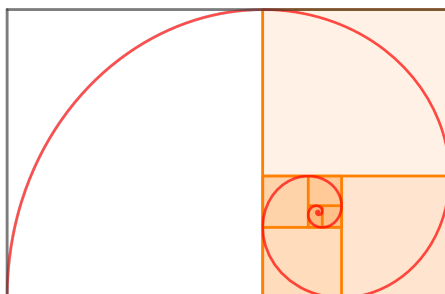


onde vemos que  $\text{ctg } \beta = \text{tg } \alpha = \frac{1}{\ell^3}$ . A condição de tangência é  $\beta = \delta$ ; como  $\text{ctg } \delta = \ln p$  temos, nesse caso,

$$\frac{1}{\ell^3} = \frac{2}{\pi} \ln \ell$$

e segue que  $\ell_0$  é o (único) zero de  $f(x) = x^3 \ln x - \frac{\pi}{2}$ . O comando `Root` do *Geogebra* fornece  $\ell_0 = 1,5388620467\dots$ <sup>4</sup>; aqui temos  $\delta_0 = 74^\circ 39' 18'' \dots$ . Segue para contemplação a figura correspondente.

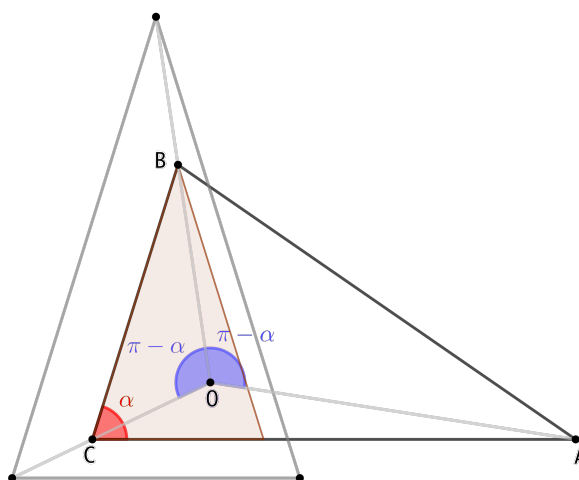
<sup>4</sup>O *Mathematica* fornece o mesmo valor, como informa um dos relatores.



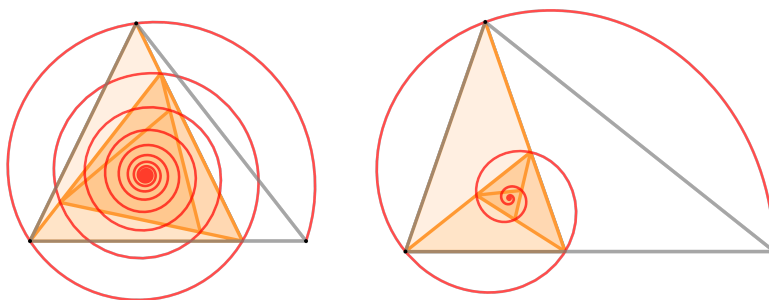
### 3. A ESPIRAL ASSOCIADA A UM TRIÂNGULO ISÓSCELES

Espirais logarítmicas também aparecem associadas a triângulos isósceles, em particular ao assim dito *triângulo áureo* ([15],[16]). Vamos aqui analisar brevemente essas espirais, de modo análogo ao que fizemos na seção anterior.

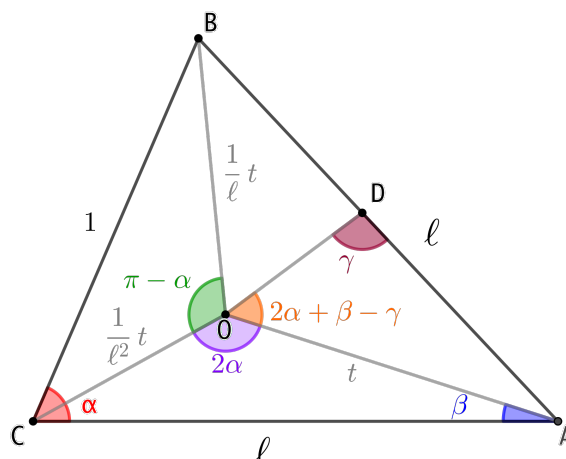
Consideremos um triângulo isósceles  $ABC$  de base  $BC = 1$  e lados  $AB = AC = \ell$ , com  $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \alpha$ ; nele determinamos o ponto  $O$  como a interseção de arcos capazes de  $\pi - \alpha$  dos segmentos  $AB$  e  $BC$ .



O triângulo sombreado é obtido a partir do triângulo original por uma rotação de  $\pi - \alpha$  em torno de  $O$  no sentido anti-horário seguida de uma contração de  $\frac{1}{\ell}$  com centro  $O$ ; a iteração desse processo leva a uma espiral logarítmica de centro  $O$  que passa pelas sucessivas imagens de  $A$ .



Para essa espiral temos  $p = \left(\frac{1}{\ell}\right)^{\frac{1}{\pi-\alpha}}$ . Como na seção anterior, existe um único triângulo isósceles cuja espiral associada é tangente a seus lados. Para determiná-lo, consideremos a seguinte figura.



Aqui  $D$  é o primeiro ponto (quando existe) onde a espiral associada intercepta o lado  $AB$ ; a diferença angular entre  $A$  e  $D$  é  $2\pi + 2\alpha + \beta - \gamma$ . Temos

$$\alpha = \arccos \frac{1}{2\ell}$$

$$t = \ell^2 \sqrt{\frac{1}{\ell^2 + 2}} \quad (\text{lei dos cossenos no triângulo } ACO)$$

$$\beta = \arcsen \frac{t \operatorname{sen} 2\alpha}{\ell^3} \quad (\text{lei dos senos no triângulo } ACO)$$

$$OD = tp^{2\pi+2\alpha+\beta-\gamma}$$

e lembramos que

$$\delta = \operatorname{arccotg} \ln p = \arccos \frac{\ln p}{\sqrt{1 + \ln^2 p}}.$$

A espiral é tangente em  $D$  quando  $\gamma = \delta$ ; nesse caso, a lei dos senos no triângulo  $ADO$  nos dá

$$\frac{t}{\operatorname{sen} \delta} = \frac{tp^{2\pi+2\alpha+\beta-\delta}}{\operatorname{sen}(2\alpha + \beta)}$$

ou seja

$$\operatorname{sen}(2\alpha + \beta) = p^{2\pi+2\alpha+\beta-\delta} \operatorname{sen} \delta$$

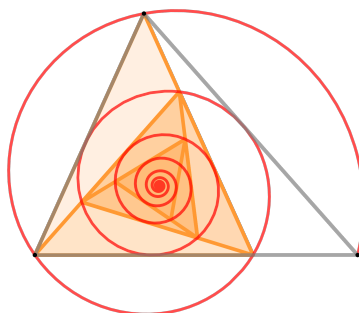
e segue que a tangência ocorre quando  $\ell$  é o (único) zero da função

$$g(x) = \operatorname{sen}[2\alpha(x) + \beta(x)] - p(x)^{2\pi+2\alpha(x)+\beta(x)-\delta(x)} \operatorname{sen} \delta(x).$$

O comando `Root` fornece o zero  $\ell_1 = 1,2162407940\dots$ <sup>5</sup>, que corresponde a um triângulo isósceles com ângulo da base  $65^\circ 43' 33'' \dots$  e a  $\delta_1 = 96^\circ 10' 21'' \dots$ . Segue, também para contemplação, a figura pertinente.

<sup>5</sup>Já o *Mathematica* fornece  $\ell_1 = 1,2162407942\dots$ , como apontado pelo mesmo relator.



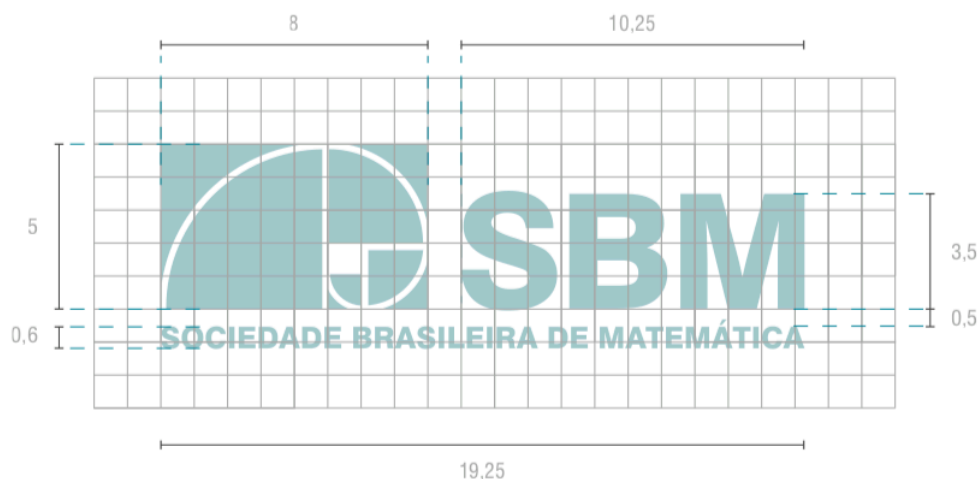


#### 4. O LOGO DA SBM

Nessa seção vamos considerar alguns aspectos do logo da SBM, começando por sua história.

Um concurso para a escolha do logo foi divulgado no *Noticiário da SBM* em outubro de 1977. Em reunião do Conselho Diretor de maio de 1978 não houve consenso sobre nenhuma das propostas, o que se repetiu em reuniões de março e outubro de 1980, bem como de junho de 1981; a partir daí não se encontram menções a esse assunto no *Noticiário* [17]<sup>6</sup>. Em comunicação pessoal, o professor César Camacho informa que o logo foi escolhido em um concurso realizado pela diretoria da SBM durante seu mandato como presidente no período 1987-89; a proposta vencedora foi de Rodolfo Capeto, na época o *designer* gráfico do IMPA.

A descrição do logo aparece no *Manual da marca e identidade visual* da SBM [18]



e vemos que ele é a conhecida *espiral de Fibonacci* ([19],[20]) em um retângulo  $8 \times 5$ . A partir do quadrado branco, os lados dos quadrados são 1, 1, 2, 3 e 5 que, com o lado 8 do retângulo, são os primeiros termos da *sequência de Fibonacci*. Essa espiral é formada por quartos de círculo<sup>7</sup>, de modo a fazê-la tangente aos lados do retângulo.

<sup>6</sup>Referência indicada por Paulo César Carvalho.

<sup>7</sup>O *Manual* não especifica a espessura dos arcos de círculo e dos segmentos que delimitam os quadrados; em uma grade apropriada, observa-se que ela é aproximadamente  $\frac{1}{5}$ .



Como  $\frac{8}{5\Phi} = 0,9888\dots$ , o retângulo  $\frac{8}{5} \times 1$  é uma boa aproximação do retângulo  $\Phi \times 1$ , onde  $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  é o *número de ouro*. Retângulos semelhantes a esse último, conhecidos como *retângulos áureos*, são os únicos retângulos que deixam quadrados em seu caminho no processo de rotação e contração descrito na seção 2.

Podemos assim visualizar no logo as ideias de quadrado, círculo, tangência e números de Fibonacci e, de modo aproximado, do número de ouro e do retângulo áureo. Ressaltamos também a simplicidade de seus elementos, que resulta em grande facilidade para sua descrição e composição gráfica.

Por outro lado, a gênese da espiral de Fibonacci através de arcos de círculo e números de Fibonacci faz com que ela não seja sequer de classe  $C^2$  e exclui qualquer sugestão das ideias de autosimilaridade, equiangularidade e representação do infinito. Notamos que, com exceção da referência a números de Fibonacci, ela não tem relação com a História da Matemática, e observamos ainda que, às vezes apresentada como uma espiral logarítmica, ela ilustra o uso incorreto e autoritário de linguagem matemática em pseudociência, misticismo, culto do número de ouro, arte e outras manifestações culturais ([14],[21],[22],[23],[24]).

A construção de uma espiral por meio de quartos de círculo pode ser realizada no retângulo áureo ([16],[25]) e é originalmente devida a Albrecht Dürer (1471-1528) [20]. Aqui aplicam-se os mesmos comentários feitos no parágrafo anterior em relação à espiral de Fibonacci, com exceção da possibilidade de representação do infinito.

Notamos, finalmente, que essa não é a primeira vez que o logo de uma sociedade matemática é criticado<sup>8</sup>. Em [26] (ver também [27]) aponta-se que o logo da MAA anterior a 1972 apresentava uma projeção em perspectiva incorreta do icosaedro, que foi devidamente corrigida.

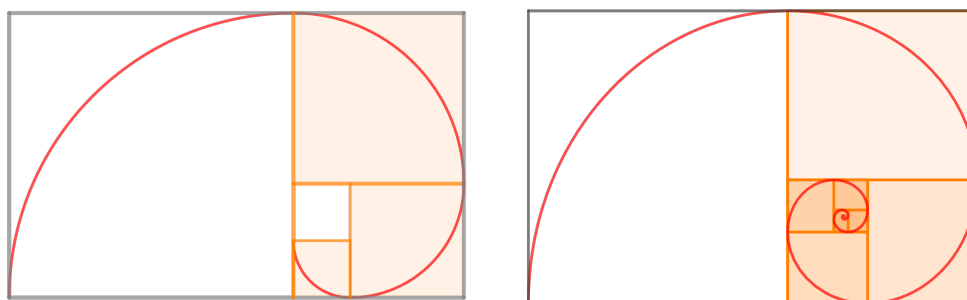
## 5. DUAS PROPOSTAS

O logo da SBM acompanhou boa parte da história da Matemática brasileira, tendo assim inegável valor simbólico e afetivo. Por outro lado, de acordo com o exposto na seção anterior, consideramos que ele não possui características adequadas para representar nossa Sociedade. Desse modo, apresentamos duas propostas para eventual consideração por parte do Conselho Diretor e dos membros da SBM.

- I. Substituir o logo pela espiral tangente no retângulo  $\ell_0 \times 1$ .
- II. Substituir o logo na página e nas publicações digitais da SBM por uma animação da espiral tangente exibindo propriedades da espiral logarítmica<sup>9</sup>.

<sup>8</sup>Observação devida a Humberto Bortolossi.

<sup>9</sup>Ideia sugerida por Paulo César Carvalho.



### AGRADECIMENTOS

O autor agradece a generosa colaboração de César Camacho, Humberto Bortolossi, Marco Moriconi e Paulo César Carvalho, bem como a dos dois relatores.

### REFERÊNCIAS

- [1] Elon Lages Lima, Paulo César Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado: *A Matemática do Ensino Médio*. Coleção do Professor de Matemática, SBM, 1996
- [2] Raymond Claire Archibald: *Notes on the logarithmic spiral, golden section and the Fibonacci series*. Note V in Jay Hambidge: *Dynamic symmetry*. Yale University Press, 1920.
- [3] Øyvind Hammer: *The Perfect Shape: Spiral Stories*. Copernicus, 2016.
- [4] Herman Erlichson: *Newton's Solution to the Equiangular Spiral Problem and a New Solution Using Only the Equiangular Property*. *Historia Mathematica* 19 (1992), pp.420-413.
- [5] Curtis Wilson: *Newton on the Equiangular Spiral. An Addendum to Erlichson's Account*. *Historia Mathematica* 21 (1994), pp.196-203.
- [6] Sérgio Alves: *A espiral equiangular*. Notas de minicurso, I Bienal da SBM, 2002.
- [7] Eli Maor: *The logarithmic spiral*. *The Mathematics Teacher*, vol. 67(4), 1974, pp. 321-327.
- [8] Kinko Tsuji, Stefan Müller (eds): *Spirals and vortices in Culture, Nature and Science*. Springer Verlag, 2019.
- [9] Jay Kappraff: *The Logarithmic Spiral in Geometry, Nature, Architecture, Design and Music*. <https://directorymathsed.net/public/CataniaConferenceDocuments&Papers/Proceedings/All%20PapersInPDF/KAPPRAFF.pdf>
- [10] Khristo Boyadzhiev: *Spirals and Conchospirals in the Flight of Insects*. *The College Mathematics Journal* 30(1), 1999, pp. 23-31.
- [11] Jim Wilson: *Equiangular Spiral (or Logarithmic Spiral) and Its Related Curves*. <http://jwilson.coe.uga.edu/EMT668/EMAT6680.F99/Erbas/KURSATgeometrypro/related%20curves/related%20curves.html>
- [12] <https://mathcurve.com/courbes2d.gb//logarithmic/logarithmic.shtml>
- [13] [http://xahlee.info/SpecialPlaneCurves\\_dir/EquiangularSpiral\\_dir/equiangularSpiral.html](http://xahlee.info/SpecialPlaneCurves_dir/EquiangularSpiral_dir/equiangularSpiral.html)
- [14] <http://www.spirasolaris.ca>
- [15] Arthur Lee Loeb & William Varney: *Does the golden spiral exist, and if not, where is its center?* In István Hargittai & Clifford Alan Pickover (eds.): *Spiral Symmetry*, World Scientific, 1992.
- [16] John Sharp: *Spirals and the golden section*. *Nexus Network Journal*, vol. 4(1), 2002, pp. 59-82.
- [17] Viviane de Oliveira Santos: *Uma história da Sociedade Brasileira de Matemática durante o período de 1969 a 1989: criação e desenvolvimento*. Tese de doutorado, Unesp - Rio Claro, 2016.
- [18] *Manual da marca e identidade visual*. SBM, 2017. [https://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2017/03/SBM\\_Manual\\_Marca\\_ver20170223.pdf](https://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2017/03/SBM_Manual_Marca_ver20170223.pdf)

- [19] [https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci\\_number](https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number)
- [20] Andrey Polezhaev: *Spirals, Their Types and Peculiarities*. In Kinko Tsuji, Stefan Müller (eds): *Spirals and vortices in Culture, Nature and Science*. Springer Verlag, 2019.
- [21] *The Fibonacci Sequence in Nature*. <https://insteadof.com/blog/fibonacci-sequence-in-nature/>
- [22] *The Fibonacci Sequence Is Everywhere – Even the Troubled Stock Market*. <https://www.smithsonianmag.com/science-nature/fibonacci-sequence-stock-market-180974487/>
- [23] *The Fibonacci Sequence In Artistic Composition*. <https://www.markmitchellpaintings.com/blog/the-fibonacci-sequence-in-artistic-composition/>
- [24] *Nature's proof of intelligent design: sacred geometry, phi, the Fibonacci spiral, & self-reflective designs*. <https://newearthknowledge.com/2019/11/22/proof-intelligent-design/>
- [25] [https://en.wikipedia.org/wiki/Golden\\_spiral](https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_spiral)
- [26] Branko Grunbaum: *Geometry strikes again*. Mathematics Magazine 58(1) (Jan.1985), pp. 12-17.
- [27] Doris Schattschneider: *The mystery of the MAA logo*. Mathematics Magazine 58(1) (Jan.1985), p. 18

RUA DA NASCENTE 136, DISTRITO DE SÃO GONÇALO DO RIO DAS PEDRAS, SERRO, MG  
Email address: michelspira@gmail.com