Revista Matemática Universitária, vol. 1, 2022
ISSN: 2675-5254 — DOI: 10.21711/26755254/rmu20222

A GEOMETRIA DIFERENCIAL SINTÉTICA E OS MUNDOS ONDE PODEMOS INTERPRETÁ-LA: UM CONVITE AO ESTUDO DOS ANÉIS $\mathcal{C}^\infty$

JEAN CERQUEIRA BERNI E HUGO LUIZ MARIANO

Sumário

Introdução

A Geometria Diferencial tem como um de seus principais objetos de estudo a noção de variedade (uma "quantidade $n-$vezes estendida"). Este conceito remonta à palestra de habilitação[1] de B. Riemann, em 1854, e as teorias das variedades diferenciáveis e das variedades Riemannianas surgiram como um esforço de seus sucessores para esclarecer e formalizar as ideias ali apresentadas. Originalmente essa noção abrangia, inclusive, variedades de dimensão infinita, como por exemplo,

Data de aceitação: Outubro de 2020.
Palavras chave. Geometria Diferencial Sintética, Topoi, Anéis $\mathcal{C}^\infty$.
Projeto financiado pela CAPES, Projeto PNPD 88882.463201/2019-01.

[1] "Über die Hypothesen welche die Geometrie zu Grunde liegen" — ou, "Dos pressupostos que subjazem aos axiomas da Geometria".

a dos "valores possíveis de uma função em uma dada região", a "das formas possíveis de uma figura sólida" e assim por diante.

Ao longo do desenvolvimento desses esforços, a noção de quantidades "infinitamente pequenas" (ou "infinitésimos"), tão úteis nos processos de descobertas de novos resultados na Geometria — sobretudo para geômetras como S. Lie e E. Cartan — foi sendo reduzida a uma ideia vaga de, como expressou o bispo Berkeley, *"fantasmas de quantidades que já partiram"*, sem qualquer legitimidade no âmbito do rigor introduzido por K. Weierstrass. Com o passar do tempo, apesar das críticas, o rigor de Weierstrass prevaleceu, de modo que os infinitésimos - que tantas vezes conduziam a inconsistências lógicas - acabaram se tornando meramente uma ferramenta heurística que, embora útil, deveria ser "evitada" na demonstração de novos resultados.

Em 1913 surge explicitamente o conceito de variedade diferenciável como conhecemos hoje, em um trabalho de H. Weyl[2] tratando também do conceito de superfícies de Riemann. Como se sabe, na Geometria Diferencial das variedades diferenciáveis como as conhecemos hoje não há espaço para "infinitésimos", ou seja, para entes "infinitamente pequenos", o que acaba por obscurecer a natureza de diversas definições e a essência de vários teoremas dessa área do conhecimento matemático. Mas e se, de algum modo, pudéssemos conciliar os infinitésimos com o rigor?

Ao longo da História, a Geometria foi estudada essencialmente por dois pontos de vista principais: o ponto de vista analítico e o ponto de vista sintético. Enquanto a abordagem analítica é calcada na introdução de sistemas de coordenadas em seus objetos de estudo (ou seja, na atribuição a cada ponto de uma variedade diferenciável n-dimensional uma $n-$upla de números), a abordagem sintética pretende formular a Geometria em termos de axiomas capazes de "capturar" a intuição que fazemos dos entes geométricos e das relações entre eles, de modo que os resultados sobre Geometria sejam deduzidos "formalmente", mediante deduções lógicas.

O leitor possivelmente estará familiarizado com alguns exemplos de geometrias sintéticas: a Geometria contida em "Os Elementos", de Euclides, as Geometrias Finitas e a Geometria Projetiva Sintética, introduzida (canhestramente) por Desargues no século XVII, são geometrias nas quais o *modus operandi* é deduzir, a partir de um corpo inicial de axiomas, diversos resultados acerca de seus entes geométricos e das relações entre eles.

O poder da abordagem analítica (clássica) à Geometria Diferencial procede, em grande parte, da possibilidade de se empregar métodos do Cálculo Diferencial e, mais geralmente, da Análise Matemática, à Geometria. Podemos estudar "vetores tangentes", "ângulos entre curvas" e medir áreas com o auxílio do aparato do Cálculo Diferencial, ainda que apenas "localmente", por meio da introdução de sistemas de coordenadas. Posto desta forma, a ideia de uma Geometria Diferencial que prescinda desse aparato e se utilize somente de axiomas pode parecer, à primeira vista, "improdutiva", ou mesmo "estéril".

[2] "Die Idee der Riemannschen Fläche", ou "O conceito de superfícies de Riemann".

FIGURA 1. Anders Kock e Francis William Lawvere no *Café Odeon* em Zürich, 1966. Extraído de [**Pic**].

De acordo com J. Bell (cf. [**Bel**]), uma primeira tentativa de desenvolver uma Geometria Diferencial Sintética[3] foi feita por Herbert Busemann, nos anos 1940, baseada em um trabalho de Paul Finsler. A ideia era construir uma Geometria Diferencial que, nas palavras do autor, dispensasse o uso de "derivadas". Os objetos básicos de sua abordagem não eram, como hoje, as superfícies e variedades diferenciáveis, mas espaços métricos de um certo tipo nos quais a noção de geodésica era definida de modo intrínseco.

Em 1967, quando Francis W. Lawvere (homem à direita na Figura 1) era professor assistente na Universidade de Chicago e S. MacLane ministrava um curso sobre Mecânica, Lawvere passou a refletir sobre possíveis justificativas para os velhos métodos "intuitivos" (à maneira de S. Lie e de E. Cartan por exemplo, hoje muito bem conhecidos por físicos e engenheiros) empregados por MacLane para apresentar tópicos de Geometria Diferencial pertinentes àquele curso. Destas reflexões surgiu o programa da "Dinâmica Categorial" e da "Geometria Diferencial Sintética". O então estudante de doutorado de Lawvere, Anders Kock (à esquerda na Figura 1), prosseguiu com a pesquisa em Geometria Diferencial Sintética, assim como outros matemáticos, como Eduardo J. Dubuc - orientando de S. MacLane naquela época. Desde então tem havido esforços para compor um quadro axiomático capaz de "capturar" a noção de continuidade do espaço físico (muito utilizada em Mecânica, por exemplo) e do qual se possa deduzir a maior quantidade possível de resultados da Geometria Diferencial.

[3] na qual a noção de "curva geodésica" em variedades Riemannianas e de Finsler é descrita mediante axiomas, cf. [**Bus**].

A Geometria Diferencial Sintética proposta por Lawvere é formulada no contexto da Teoria das Categorias, um ramo da Matemática que trata dos "mundos" e estruturas matemáticas de um modo mais geral. Uma categoria corresponde, a grosso modo, a um "mundo matemático", composto por objetos e por transformações entre esses objetos. Temos, por exemplo, a categoria **Sets**, dos conjuntos e das funções entre conjuntos, **Grp**, dos grupos e homomorfismos de grupos, **Top**, a categoria dos espaços topológicos e funções contínuas e assim por diante.

Sendo a Geometria Diferencial um estudo sobre os objetos da categoria **Man**, das variedades diferenciáveis (espaços topológicos de Hausdorff, com base enumerável e munidos de um atlas maximal $\mathfrak{A}$ de dimensão n, para algum $n \in \mathbb{N}$ e de classe $\mathcal{C}^\infty$) e cujas transformações são as funções infinitamente diferenciáveis entre essas, pode-se supor que um dos objetivos da Geometria Diferencial Sintética seja dar uma descrição axiomática para essa categoria. Vejamos quais características de **Man** inviabilizam uma tal descrição.

A categoria **Man** padece de certas "deficiências" que dificultam uma axiomatização, a começar por sua "escassez" de certos tipos de construções (denominados na Teoria de Categorias por "limites inversos"), que não podem ser levadas a cabo em seu interior. Por exemplo, dadas duas variedades diferenciáveis M e N, uma subvariedade $Z \subseteq N$ e uma função suave (*i.e.*, de classe $\mathcal{C}^\infty$) qualquer $f : M \to N$, seu pullback:

$$\begin{tikzcd} f^{-1}[Z] \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, hook] & N, \end{tikzcd} \tag{1}$$

em geral, *não* é uma variedade diferenciável [4]. De fato, a interseção não transversal de subvariedades suaves, na maioria das vezes, não é uma subvariedade suave[5]. Tem se tornado relativamente comum em alguns círculos referir-se a estas "lacunas" em **Man** como uma "crise nos fundamentos da Geometria Diferencial", embora talvez a palavra "crise" não seja a mais adequada. A percepção dessas lacunas varia de acordo com a subárea da Geometria Diferencial em que se trabalha: naquelas em que os problemas fundamentais são de caráter analítico, pouco se sente sobre a estrutura categorial, enquanto que naquelas em que se estuda quocientes, moduli spaces, folheações e ações de grupos (dentre outros temas), as deficiências categoriais implicam na introdução de uma profusão de outros objetos que tentam de alguma forma saná-las, como grupóides, stacks, orbifolds, e espaços de Chen, Frölicher e

[4] salvo mediante a condição de transversalidade: se $M \xrightarrow{f} N$ é uma função suave transversal à subvariedade $Z \subseteq N$, então (1) é um pullback em **Man**.

[5] Em virtude de um famoso teorema de H. Whitney, todo subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, é o conjunto dos zeros de alguma função suave. Tomando, por exemplo, o conjunto de Cantor, C [que é fechado] em $\mathbb{R}$ (e que, por diversos motivos *não* é uma variedade suave), existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suave tal que $C = f^{-1}[\{0\}]$. Desta forma, a interseção de Graf (f) (variedade suave de dimensão 1) com Graf (0) (variedade suave de dimensão 1), o gráfico da função identicamente nula, é C, que evidentemente não é uma variedade suave.

difeológicos, que são mais gerais que variedades suaves (e portanto não tão bem comportados) mas que compõem categorias que possuem melhores propriedades.

Frequentemente desejamos considerar, na categoria **Man**, e de um modo natural, um mesmo conceito sob pontos de vista distintos - conceitos importantes para a aplicação da Geometria Diferencial, por exemplo, à Mecânica dos Sólidos. Lawvere, por exemplo, ponderou o seguinte: o movimento de um certo corpo B (por exemplo, um sistema $0-$dimensional de partículas, uma corda elástica $1-$dimensional, uma membrana $2-$dimensional ou um sólido $3-$dimensional) é frequentemente representado por uma função:

$$q : B \times T \to E,$$

onde T é o espaço $1-$dimensional que representa os instantes (tempo) e E é o espaço $3-$dimensional onde o movimento se dá. Neste contexto, o movimento pode ser pensado como uma função que associa ao par:

$$(\text{partícula de } B, \text{instante}) \in B \times T$$

uma certa posição em E durante o movimento.

Para outros fins, porém, convém interpretar o movimento como uma função:

$$\bar{q} : B \to E^T,$$

que associa a cada partícula de B o seu trajeto através de E. Uma categoria em que existe uma correspondência natural biunívoca:

$$\frac{q : B \times T \to E}{\bar{q} : B \to E^T}$$

recebe a denominação de categoria "cartesiano-fechada" — o que, feliz ou infelizmente, não é o caso de **Man** (na verdade, dadas duas variedades suaves M e N, $M^N = \mathcal{C}^\infty(N, M)$, salvo em casos patológicos, não é uma variedade diferenciável e portanto, não é objeto de **Man**).

Finalmente, em **Man** não dispomos de uma linguagem adequada para lidar direta e explicitamente com estruturas "infinitesimais". Dentre essas estruturas, seria particularmente interessante dispor de certo objeto D, capaz de codificar o fibrado tangente de uma variedade diferenciável, M — ou seja, tal que $TM = M^D$. Este objeto D poderia ser considerado a "pedra filosofal" da Geometria Diferencial em virtude das inúmeras simplificações de conceitos que sua introdução proporcionaria, como os de vetores tangentes, fluxos, formas diferenciáveis, conexões etc. No entanto, em **Man**, nada se fala - por falta de vernáculo - acerca de infinitésimos.

Podemos agrupar essas características que desabonam **Man** para uma boa descrição axiomática em dois grupos principais:

(i) diversas construções envolvendo variedades diferenciáveis desbordam da categoria das variedades diferenciáveis - ou seja, não são, em si, variedades diferenciáveis;

(ii) não há, em **Man**, um objeto "infinitesimal" D, no sentido de ser o fibrado tangente de uma variedade diferenciável M, TM, identificado com uma "variedade diferenciável de todos os caminhos infinitesimais em M, M^D".

A ideia de Lawvere para superar esses obstáculos foi, então, “enriquecer” a categoria **Man**[6] a fim de obter uma categoria **S**, cujos objetos são denominados “espaços suaves”, fechada sob essas construções e que admita uma descrição axiomática simples.

Passemos às características essenciais desejadas para uma tal categoria **S**, dos espaços suaves. São elas:

(1) **S** deve conter um “modelo algébrico” da reta geométrica (assim como **Man** contém $\mathbb{R}$), que denotaremos por R. O objeto R deve admitir (pelo menos) a estrutura de anel comutativo, munido de dois “elementos” especiais, 0 e e, $0 \neq e$, correspondendo respectivamente aos elementos neutros da soma e do produto[7]. Ademais, convém que R admita um subobjeto (não trivial) D, consistindo dos “elementos” infinitésimos quadrado-nilpotentes de R e capaz de representar o fibrado tangente de qualquer espaço suave;

(2) ao expandir **Man** para **S**, toda variedade diferenciável deve ser “mergulhada” em **S** como um espaço suave, e novas transformações entre essas variedades mergulhadas não devem ser admitidas - ou seja, os únicos mapas entre variedades mergulhadas devem ser os mapas suaves (o que não ocorre quando mergulhamos **Man** em **Sets**);

(3) **S** deverá ser uma categoria cartesiano-fechada, ou seja, dados espaços suaves M, N e P, $M \times N$ e P^N devem ser espaços suaves e, além disso, deverá haver uma bijeção natural relacionando estas construções:

$$\frac{M \times N \to P}{M \to P^N}$$

(4) **S** deve ter um vernáculo capaz de codificar a noção de nilpotência em R, ou seja, de “elementos” de R tais que alguma de suas potências seja 0. Note que obter nilpotentes diferentes de 0 é impossível em um corpo como $\mathbb{R}$. Consequentemente, em **S**, deve-se exigir de R que tenha uma estrutura um tanto mais fraca que a de corpo (no sentido clássico). Convém exigirmos que R seja uma $\mathbb{Q}-$álgebra, ou seja, que $e, 2 \cdot e, \cdots, n \cdot e, \cdots$ sejam todos elementos invertíveis em R. Dentre os subobjetos de R, deve haver um particularmente especial, D, consistindo desses “infinitésimos”, incluindo os quadrados nilpotentes, e de representar[8] o funtor fibrado tangente.

Note, também, que sendo a reta geométrica modelada em **S** por R, o plano geométrico será modelado por $R \times R$, o espaço geométrico tridimensional por $R \times R \times R$ e assim por diante.

---

[6] tecnicamente isto corresponde a construir um mergulho pleno e fiel de **Man** em **S**.

[7] em qualquer categoria $\mathcal{C}$ com limites finitos, um objeto R tem estrutura de anel comutativo com unidade quando estão dados morfismos: $1 \underset{0}{\overset{e}{\rightrightarrows}} R \underset{\cdot}{\overset{+}{\leftleftarrows}} R \times R$ satisfazendo as identidades usuais que definem essa estrutura, expressas por diagramas comutativos.

[8] ou seja, tal que $T : \mathbf{S} \to \mathbf{S}$ seja naturalmente isomorfo ao funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(D, \cdot) : \mathbf{S} \to \mathbf{S}$.

1. Um axioma da Geometria Diferencial Sintética

Vamos supor, para fins de discussão, que uma tal categoria **S**, detentora de todas as propriedades descritas anteriormente de fato exista. Denotaremos por $(R, +, \cdot, -, 0, e)$ seu objeto anel comutativo com unidade e, a fim enfatizar a importância deste objeto, escreveremos $(\mathbf{S}, (R, +, \cdot, -, 0, e))$ para denotar a categoria dos espaços suaves.

Sendo **S** uma categoria com limites finitos, podemos exprimir o subobjeto de "elementos quadrado-nilpotentes", D, do objeto anel R como o equalizador dos mapas:

$$\begin{array}{rccc} (\,\cdot\,)^2 : & R & \to & R \\ & r & \mapsto & r^2 = r \cdot r \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{rccc} 0 : & R & \to & R \\ & r & \mapsto & 0 \end{array}$$

ou seja,

$$D = [\![d.R \mid d^2 = 0]\!] \rightarrowtail R \underset{0}{\overset{(\,\cdot\,)^2}{\rightrightarrows}} R$$

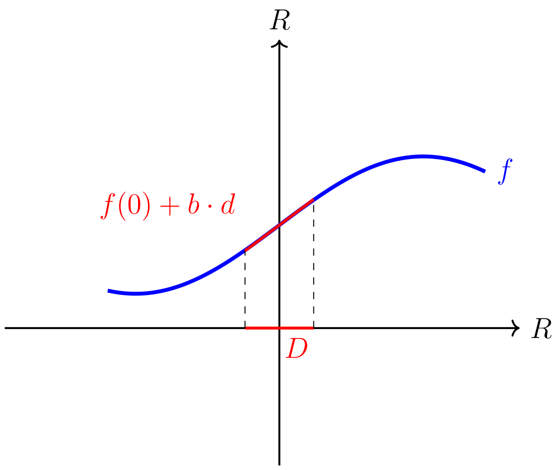
é um equalizador.

Por motivos que serão expostos posteriormente, podemos trabalhar em **S** "como se" estivéssemos na categoria dos conjuntos, fazendo menção à noção de pertencimento - embora, na realidade, em **S** haja uma noção mais flexível para o termo "elemento".

Um dos principais axiomas que dão fulcro à Geometria Diferencial Sintética é o:

Axioma 1 (axioma de Kock–Lawvere). *Em $(\mathbf{S}, (R, +, \cdot, 0, e))$, para qualquer $f : D \to R$ existe um único $b \in R$ tal que:*

$$(\forall d \in D)(f(d) = f(0) + b \cdot d)$$



O **axioma de Kock–Lawvere** afirma, portanto, que todo morfismo $f : D \to R$ é essencialmente uma "função afim", admitindo um único coeficiente linear, $f(0)$, e um único coeficiente angular, b. Deste modo, é comum nos referirmos coloquialmente ao **axioma de Kock–Lawvere** como o **"princípio da microafinidade"**.

Anders Kock descreve este axioma de um modo particularmente pitoresco: D é tão "pequeno" que não se pode distinguir o gráfico de uma função de D em R de um segmento de reta e, ao mesmo tempo, é "grande" o suficiente para que o coeficiente angular desta reta seja unicamente determinado.

Sabemos, da Álgebra, que em um anel R não é possível qualquer elemento ser simultaneamente nilpotente e invertível, de modo que se $a, b \in R$ e $d \in D$ forem tais que $a \cdot d = b \cdot d$, não podemos concluir daí que $a = b$. O **axioma de Kock–Lawvere** implica, não obstante, uma espécie de "lei do cancelamento" para infinitésimos universalmente quantificados. Veja a seguinte:

Proposição 2. *Em* $(\mathbf{S}, (R, +, \cdot, -, 0, e))$ *vale a seguinte dedução, para quaisquer* $a, b \in R$*:*

$$\frac{(\forall d \in D)(a \cdot d = b \cdot d)}{a = b}$$

Demonstração. Consideremos a função $f(d) = a \cdot d$, que é, por hipótese, $f(d) = b \cdot d$. Do **axioma de Kock–Lawvere**, existe um único $c \in R$ tal que $f(d) = f(0) + c \cdot d = c \cdot d$. Como c é o *único* com esta propriedade e tanto a quanto b a satisfazem, segue que $a = c = b$. $\square$

Quanto à estrutura algébrica de D, note que D *não* é fechado pela soma, uma vez que dados $d_1, d_2 \in D$, não é necessário que $(d_1 + d_2) \in D$ (de fato, $(d_1 + d_2)^2 = d_1^2 + 2 \cdot d_1 \cdot d_2 + d_2^2 = 2d_1 \cdot d_2$ e não há nenhum motivo para afirmarmos que $d_1 \cdot d_2 = 0$ [note que convencionamos munir R da estrutura de $\mathbb{Q}-$álgebra]). No que diz respeito à relação entre os "elementos" de D e os de R, note que D "absorve" produtos, ou seja, dados $b \in R, d \in D$, tem-se $b \cdot d \in D$, uma vez que $(b \cdot d)^2 = b^2 \cdot d^2 = b^2 \cdot 0 = 0$.

O **axioma de Kock–Lawvere** nos permite definir facilmente o que entendemos pela derivada de um mapa $f : R \to R$ em um ponto $a \in R$ sem fazer qualquer menção à noção de limite:

Definição 3 (derivada). *Em* $(\mathbf{S}, (R, +, \cdot, -, 0, e))$*, sejam* $f : R \to R$ *uma função,* $a \in R$*, e considere:*

$$\begin{array}{rccc} g_a : & D & \to & R \\ & d & \mapsto & f(a+d). \end{array}$$

Pelo ***axioma de Kock–Lawvere****, existe um único* $b \in R$ *tal que:*

$$(\forall d \in D)(g_a(d) = g_a(0) + b \cdot d),$$

ou seja, tal que:

$$(\forall d \in D)(f(a+d) = f(a) + b \cdot d).$$

Denotamos o b *assim obtido por* $f'(a)$ *e o denominamos* ***a derivada de*** f ***em*** a*. Podemos, portanto, escrever:*

$$(\forall d \in D)(f(a+d) = f(a) + f'(a) \cdot d).$$

A ideia básica por detrás da definição acima é tomar, para cada $a \in R$, $f'(a)$ como a parte linear de g_a. Por exemplo, para $f(x) = x^3$, tem-se $g_a(d) = f(a+d) = (a+d)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot d + 3 \cdot a \cdot d^2 + d^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot d = f(a) + 3 \cdot a^2 \cdot d$, e como:

$$(\forall d \in D)(f(a+d) = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot d),$$

segue que $f'(a) = 3 \cdot a^2$, coincidindo com a derivada "clássica" de $f(x) = x^3$ em $x = a$.

Sabendo calcular a derivada de uma função $f : R \to R$ em qualquer ponto $a \in R$, podemos definir naturalmente sua "*função* derivada", como segue.

Definição 4. *Em* $(\mathbf{S}, (R, +, \cdot, -, 0, e))$*, dada qualquer* $f : R \to R$*, a* ***função derivada de*** f *é a função:*

$$\begin{array}{rccc} f' : & R & \to & R \\ & x & \mapsto & f'(x). \end{array}$$

Assim, retomando o exemplo dado anteriormente, para $f(x) = x^3$ temos $f'(x) = 3 \cdot x^2$.

O leitor poderá verificar que, utilizando o **axioma de Kock–Lawvere**, as demonstrações das propriedades básicas das derivadas (regras da soma, do produto, da cadeia e outras) se reduzem a simples manipulações algébricas.

Observe que ao assumirmos o **axioma de Kock–Lawvere**, *toda função* $f : R \to R$ *se torna infinitamente diferenciável*, uma vez que o processo dado na **Definição 3** acima pode ser repetido tantas vezes quanto quisermos.

Vejamos, na sequência, como alguns conceitos da Geometria Diferencial se tornam simples no contexto sintético:

Definição 5 (vetor tangente). *Em* $(\mathbf{S}, (R, +, \cdot, -, 0, e))$*, sejam* M *um espaço suave e* $x \in M$*. Um* ***vetor tangente a*** M ***em*** x *é um morfismo* $t : D \to M$ *tal que* $t(0) = x$*.*

Sendo assim, um vetor tangente a M em $x \in M$ pode ser concebido como um "caminho infinitesimal" em M tal que $t(0) = x$, dispensando-nos de todo o trabalho de tomar classes de equivalências de certas curvas contendo o ponto x. Dito de outro modo, os vetores tangentes a M em x são simplesmente *micro-caminhos em* M *que contêm o ponto-base* x. Mais geralmente, definimos o **morfismo ponto-base** por:

$$\begin{array}{rccc} \pi : & TM = M^D & \to & M \\ & D \xrightarrow{t} R & \mapsto & t(0) = x, \end{array}$$

o que nos permite enunciar a seguinte:

Definição 6 (espaço tangente). *Sejam* M *um espaço suave,* $x \in M$ *e* $\pi : TM \to M$ *o morfismo ponto-base* x*. O espaço tangente a* M *em* x *é* $T_x M = \pi^{-1}[\{x\}]$*.*

Na Geometria Diferencial Sintética temos a seguinte:

Definição 7 (campo vetorial tangente). *Um* ***campo vetorial tangente a*** M *é um morfismo* $\tau : M \to TM = M^D$ *tal que para todo* $x \in M$*,* $\tau(x)(0) = x$*, ou seja, tal que* $\pi \circ \tau = \mathrm{id}_M$ *(uma seção* <u>*global*</u> *do morfismo ponto-base). Em outros termos,* *um campo vetorial tangente ao espaço suave M é um morfismo $\tau : M \to TM$ tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} & TM \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[ur, "\tau"] \arrow[r, "\mathrm{id}_M"'] & M \end{tikzcd}$$

Munidos destes conceitos de simples formulação,podemos definir também a versão sintética de $k-$forma diferencial, com ajuda da seguinte:

Definição 8 **($k-$tangente).** *Para $k \in \mathbb{N}$, um morfismo $\tau : D^k \to M$, onde $D^k = D \times \cdots \times D$, é um $k-$**tangente em** M. O espaço dos $k-$tangentes é denotado, portanto, por M^{D^k}.*

No contexto sintético, uma $k-$**forma diferencial em** M com valores em um $R-$módulo euclidiano E é simplesmente um morfismo:

$$\omega : M^{D^k} \to E,$$

satisfazendo certos axiomas.

Outro conceito fundamental em Geometria Diferencial é o de "conexão afim", que é, a grosso modo, um modo de identificar localmente vetores tangentes a uma variedade em pontos diferentes (porém próximos) de uma curva. Formalmente, no contexto sintético, temos a seguinte:

Definição 9 **(conexão afim).** *Seja M um espaço suave. Uma **conexão afim** no fibrado tangente $TM = M^D$ é um morfismo:*

$$\nabla : M^D \times_M M^D \to M^{D\times D} \tag{2}$$

onde $M^D \times_M M^D$ é tal que o diagrama abaixo é um pullback:

$$\begin{tikzcd} M^D \times_M M^D \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & M^D \arrow[d] \\ M^D \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

tal que para todo $(t_1, t_2) \in M^D \times_M M^D$ e para quaisquer $d_1, d_2 \in D$ e $\lambda \in R$ tem-se:
(CA1) $\nabla(t_1, t_2)(d_1, 0) = t_1(d_1)$;
(CA2) $\nabla(t_1, t_2)(0, d_2) = t_2(d_2)$;
(CA3) $\nabla(\lambda \cdot t_1, t_2)(d_1, d_2) = \nabla(t_1, t_2)(\lambda \cdot d_1, d_2)$;
(CA4) $\nabla(t_1, \lambda \cdot t_2)(d_1, d_2) = \nabla(t_1, t_2)(d_1, \lambda \cdot d_2)$.

Note que esta definição de conexão é uma corporificação bastante fiel à ideia original de Élie Cartan:

"Uma variedade com uma conexão afim é uma variedade que, na vizinhança imediata de qualquer um de seus pontos, manifesta todas as propriedades de um espaço afim e na qual se tem uma lei que relaciona duas vizinhanças infinitesimalmente próximas".([Car] *apud* [Kos].*)*

De fato, no contexto sintético podemos formalizar de modo coerente os termos utilizados por Cartan, sendo fiéis à sua ideia original. A presença de objetos infinitesimais em **S** nos permite formalizar o que entendemos por pontos "infinitesimalmente próximos", mediante uma relação reflexiva e simétrica, $\sim$. Por exemplo, em R podemos dizer que dois pontos $x, y \in R$ estão infinitesimalmente próximos, $x \sim y$, se, e somente se, $x - y \in D$. Desta forma, dado um espaço suave qualquer M, munido de uma relação de "proximidade infinitesimal" $\sim$, uma conexão no fibrado tangente $TM = M^D$ é simplesmente um morfismo que associa ao par (x, y) com $x \sim y$, um morfismo $\nabla(x, y) : T_xM \to T_yM$ tal que:

$$\nabla(x, x) = \nabla(y, x) \circ \nabla(x, y) = \mathrm{id}_{T_xM}.$$

A partir deste conceito seguem-se muitos outros, como o de "transporte paralelo", em termos igualmente claros.

Ainda outros conceitos da Geometria Diferencial se exprimem de modo particularmente simples em **S**. Veja a seguinte:

Definição 10 (microfluxo). *Seja M um espaço suave. Um **microfluxo em** M é um morfismo:*

$$\phi : M \times D \to M$$

Além da evidente clareza desses conceitos expressos em termos de construções na categoria dos espaços suaves, sendo **S** uma categoria cartesiano-fechada, há uma correspondência natural entre campos vetoriais e microfluxos, dada por:

$$\frac{\tau : M \to M^D}{\widehat{\tau} : M \times D \to M} : \ \widehat{\tau}(x, d) = \tau(x)(d)$$

Por sua vez, temos também uma correspondência natural entre microfluxos e micro-caminhos em M^M com ponto-base id_M, dada por :

$$\frac{\widehat{\tau} : M \times D \to M}{\tau^* : D \to M^M} : \ \tau^*(d)(x) = \widehat{\tau}(x, d) = \tau(x)(d)$$

Desta maneira, em **S**, *campos vetoriais, micro-fluxos e micro-caminhos são noções (naturalmente) equivalentes*, o que em Geometria Diferencial Clássica pode ser dito, na melhor das hipóteses, em sentido metafórico.

As noções de geodésica e todo o aparato da Geometria Riemanniana também podem ser desenvolvidas no contexto da Geometria Diferencial Sintética. Remetemos o leitor interessado a [**Bel**] e a [**Lav**].

2. Mundos (modelos) para a Geometria Diferencial Sintética

Conforme discutido anteriormente, a Geometria Diferencial Sintética é formulada no contexto da Teoria das Categorias. Também vimos que, para simplificar a formulação de vários conceitos, faz-se necessário, dentre outras coisas, um "fechamento" da categoria que nos servirá de modelo, **S**, sob diversas construções, como limites finitos[9] (produtos, espaços de funções, pullbacks etc.), bem como uma adjunção entre produtos e exponenciais que nos permita, por exemplo, "unificar" conceitos como campos vetoriais, microfluxos e micro-caminhos.

Como não se obtém resultados "sofisticados" em Geometria Diferencial sem se operar com variáveis e elementos, é natural desejarmos que $\mathbf{S}$ se comporte essencialmente como **Sets**, no sentido de que em $\mathbf{S}$, para cada objeto, tenhamos uma noção de "elemento" ou "pertinência".

Uma classe importante de categorias que possuem todas essas características é a classe dos *toposes* (ou "topoi"). Estas categorias são, a grosso modo, categorias bastante parecidas com **Sets** sob diversos aspectos. Como os toposes têm objeto terminal (ou seja, um objeto - usualmente denotado por $\mathbf{1}$ - tal que para qualquer objeto A existe um único morfismo $A \xrightarrow{!} \mathbf{1}$), neles podemos formular o que entendemos por "elemento global". Em um topos $\mathcal{E}$, um elemento global b de um objeto $B \in \mathbf{Obj}(\mathcal{E})$ é simplesmente um morfismo $\mathbf{1} \xrightarrow{b} B$, o que corresponde com a identificação mental que fazemos, em **Sets**, entre funções de um conjunto unitário genérico, $\{*\}$, em um conjunto A e seus elementos:

$$\frac{\{*\} \xrightarrow{f} A}{f(*) \in A}$$

Passemos, portanto, à definição de topos:

Definição 11 (topos). *Um **topos** é uma categoria $\mathcal{E}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

(I) *$\mathcal{E}$ tem objeto terminal, $\mathbf{1}$, e pullbacks; equivalentemente, $\mathcal{E}$ tem todos os limites finitos;*

(II) *$\mathcal{E}$ é cartesiano-fechada, ou seja, para todo objeto X temos um funtor* exponencial, *$(\cdot)^X : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ que é adjunto à direita do funtor $(\cdot) \times X : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$;*

(III) *$\mathcal{E}$ tem classificador de subobjetos, ou seja, um objeto Ω e um morfismo $\mathbf{1} \xrightarrow{\top} \Omega$ tal que para todo monomorfismo $Y \overset{\sigma}{\rightarrowtail} X$ existe um único morfismo $\chi_\sigma : X \to \Omega$ tal que o seguinte diagrama é um pullback:*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, tail, "\sigma"] \arrow[d, "!"] & X \arrow[d, "\chi_\sigma"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

O exemplo mais familiar de topos é **Sets**. Uma classe de grande importância de toposes pode ser obtida considerando-se $\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$, a categoria de todos os funtores de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ em **Sets**, onde $\mathcal{C}$ é uma categoria pequena. Outra classe especial de toposes, denominada por "toposes de Grothendieck", é obtida tomando-se feixes sobre um espaço topológico (X, τ) ou, mais geralmente, tomando-se feixes sobre locales ou sítios pequenos.

[9] que, inclusive, nos permita definir estruturas como a de "anel comutativo com unidade" em seu bojo.

Conforme já esperávamos, as simplificações proporcionadas pela robustez estrutural de **S** não vêm gratuitamente. Vimos, por exemplo, que **S** deve conter um objeto R, munido de uma estrutura de anel comutativo com unidade, que satisfaça o **axioma de Kock–Lawvere**. Abaixo enunciamos o sentido exato do que entendemos por isso:

Definição 12. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria com todos os limites finitos e $(R, +, \cdot, -, 0, e)$ um objeto anel comutativo com unidade em $\mathcal{C}$, munido do subobjeto $D = [\![d.R \mid d^2 = 0]\!] \rightarrowtail R$. Dizemos que R **satisfaz o axioma de Kock–Lawvere** se, e somente se, para qualquer $f : D \to R$ existir um único $b \in R$ tal que:*

$$(\forall d \in D)(f(d) = f(0) + b \cdot d).$$

A proposição a seguir nos dá uma formulação do **axioma de Kock–Lawvere** unicamente em termos de isomorfismos, o que torna sua verificação particularmente mais simples em categorias de pré-feixes.

Proposição 13 (axioma de Kock–Lawvere, 2^a versão). *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com todos os limites finitos e suponha que $(R, +, \cdot, -, 0, e)$ seja um objeto anel comutativo com unidade. Seja, também, $D = [\![d.R \mid d^2 = 0]\!] \rightarrowtail R$ o seu subobjeto de quadrados nilpotentes. Então R satisfaz o **axioma de Kock–Lawvere** se, e somente se:*

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & R \times R & \to & R^D \\ & (x, y) & \mapsto & \alpha(x,y) : \begin{array}{ccc} D & \to & R \\ d & \mapsto & x + y \cdot d \end{array} \end{array}$$

é um isomorfismo, ou seja, se, e somente se $R \times R \cong R^D$.

Objetos anéis que satisfazem o axioma de Kock–Lawvere são tão especiais que recebem uma denominação própria: **anéis do tipo linha**. Com essas definições em mãos, podemos enunciar o que, exatamente, entendemos por um "mundo" (modelo) onde podemos interpretar a Geometria Diferencial Sintética, ou seja, que tipo de categoria **S** deve ser.

Definição 14. *Um **modelo** para a Geometria Diferencial Sintética[10] é um par $(\mathcal{E}, R)$, onde:*

(I) *$\mathcal{E}$ é um topos, de modo que em $\mathcal{E}$ podemos trabalhar "como se" estivéssemos em **Sets**, ao menos no que diz respeito à noção de "elemento";*
(II) *R é um objeto anel comutativo do tipo linha em $\mathcal{E}$;*
(III) *O subobjeto $D = [\![d.R \mid d^2 = 0]\!] \rightarrowtail R$ (que pode ser visto como o equalizador dos morfismos $0 : D \to R$ e $(\cdot)^2 : D \to R$) é exponenciável - ou seja, para todo objeto $A \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{E})$ tem-se $A^D \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{E})$;*
(IV) *O funtor* $\mathrm{Hom}\,(D, \cdot) : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *preserva* todos *os limites indutivos.*

Uma questão natural que nos ocorre é: quais são os toposes munidos de objeto anel do tipo linha que satisfazem o **axioma de Kock–Lawvere**? Na sequência analisaremos este tema, exibindo primeiramente um "mundo" onde a admissão do **axioma de Kock–Lawvere** nos conduz à trivialização - e portanto inexistência, pois requeremos $e \neq 0$ - do anel do tipo linha.

[10] cf. p. 231,232 de [**Dub**].

2.1. **Incompatibilidade com a Lógica Clássica e com o "mundo" dos Conjuntos.** Comentamos, de passagem, que **Sets** é um topos, de modo que é legítimo que nos perguntemos se a categoria dos conjuntos, onde podemos definir anel do tipo linha, serve de modelo para a Geometria Diferencial Sintética. Veremos, a seguir, um resultado que exclui **Sets** de nosso rol de possíveis modelos.

Proposição 15 (**Sets não é modelo para a Geometria Diferencial Sintética**). *Ao considerarmos o topos dos conjuntos,* ***Sets****, se* $(R, +, \cdot, -, 0, e)$ *satisfaz o* ***axioma de Kock–Lawvere****, então* $R = \{0\}$*.*

Demonstração. Consideremos a seguinte função:

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \to & R \\ & d & \mapsto & \begin{cases} 0, & \text{se}\, d = 0 \\ e, & \text{se}\, d \neq 0 \end{cases} \end{array}$$

Como R satisfaz o **axioma de Kock–Lawvere**, existe um único $b \in R$ tal que:

$$(\forall d \in D)(f(d) = f(0) + b \cdot d).$$

Se existisse $\delta \in D$ tal que $\delta \neq 0$, teríamos:

$$f(\delta) = f(0) + \delta \cdot b$$

$$e = \delta \cdot b.$$

Elevando os dois membros da igualdade acima ao quadrado, teríamos:

$$e = e^2 = (\delta \cdot b)^2 = \delta^2 \cdot b^2 = 0 \cdot b^2 = 0,$$

de modo que $R = \{0\}$. □

Na demonstração da **Proposição 15**, fizemos uso do fato que, em **Sets**, podemos decompor D como reunião de dois subconjuntos, um consistindo dos elementos que são 0, e seu complementar em D, consistindo dos elementos que não são zero, cuja reunião é todo D (não há uma terceira possibilidade). Desta forma, sempre que pudermos decompor nosso objeto de quadrados nilpotentes, $D \rightarrowtail R$, desta forma[11], ao satisfazer o **axioma de Kock–Lawvere** teremos, fatalmente, $R = \{0\}$.

Uma vez que em **Sets**, para qualquer conjunto D, $\text{Sub}\,(D)$ é uma álgebra de Boole, a categoria dos conjuntos não nos fornecerá um "bom" modelo para o axioma de Kock–Lawvere. Devemos, assim, buscar outra categoria da qual D seja um objeto em que $\text{Sub}\,(D)$ *não* seja uma álgebra de Boole. Desejamos assim que em **S**, para todo objeto D, tenha-se em $\text{Sub}\,(D)$ a estrutura de Álgebra de Heyting,[12] que é uma estrutura mais geral do que a de álgebra de Boole no que diz respeito a "complementos". Mas que tipo de categoria podemos tomar com esta propriedade? Veremos a seguir um exemplo.

[11] ou seja, sempre que $\text{Sub}\,(D)$ for uma álgebra de Boole.

[12] Um bom exemplo de álgebra de Heyting é a álgebra de abertos de um espaço topológico (X, τ). Intuitivamente, podemos "pensar" nos subobjetos de X não como a totalidade de seus subconjuntos, mas como a totalidade de seus subconjuntos abertos, ou seja, $\text{Sub}\,(X) = \{U \in \tau \mid U \subseteq X\}$. Assim como "álgebras de Boole"são a contraparte algébrica da Lógica Clássica, as "álgebras de Heyting" são a contraparte algébrica da Lógica Intuicionista (ou "construtivista").

Consideremos, dada uma categoria pequena $\mathcal{C}$, a categoria $\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ dos funtores (também denominados "pré-feixes") de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ - a categoria oposta de $\mathcal{C}$ - em $\mathbf{Sets}$. Dado qualquer $D : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Sets}$, $\mathrm{Sub}\,(D) = \{S \in \mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} \mid S$ é subfuntor de $D\}$ tem a estrutura de álgebra de Heyting dada por:

• o "maior" subfuntor de D é o próprio D;

• o "menor" subfuntor de D é $0 : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Sets}$, dado por $0(C) = \varnothing$ para todo $C \in \mathbf{Obj}\,(\mathcal{C})$;

• dados S e T, subfuntores de D, tem-se para qualquer $C \in \mathbf{Obj}\,(\mathcal{C})$, $(S \vee T)(C) = S(C) \cup T(C)$ e $(S \wedge T)(C) = S(C) \cap T(C)$;

• se S é um subfuntor de D, então para qualquer $C \in \mathbf{Obj}\,(\mathcal{C})$, tem-se:

$$(\neg S)(C) = \{x \in D(C) \mid (\forall f : B \to C)(f(x) \notin S(B))\}$$

• dados S e T, subfuntores de D, para qualquer $C \in \mathbf{Obj}\,(\mathcal{C})$, tem-se:

$$(S \Rightarrow T)(C) =$$
$$= \{x \in D(C) \mid (\forall f : B \to C)(f(x) \in S(B) \Rightarrow f(x) \in T(C))\}.$$

Neste nosso caso, verifica-se que, em geral:

$$(S \vee \neg S)(C) \neq D(C)$$

(tome, por exemplo, $\mathcal{C} = \mathbf{2}$ como a categoria discreta de dois objetos, ou seja, tal que $\mathbf{Obj}\,(\mathbf{2}) = \{0, 1\}$ e $\mathbf{Mor}\,(\mathbf{2}) = \{\mathrm{id}_0 : 0 \to 0, \mathrm{id}_1 : 1 \to 1\}$). Esta condição nos desapossaria do princípio do terceiro excluído usado na demonstração da **Proposição 15** , nos permitindo admitir o **Axioma de Kock–Lawvere** sem que, fatalmente, se tenha $R = \{0\}$.

Vimos acima que, em categorias da forma $\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$, onde $\mathcal{C}$ é uma categoria pequena, não é obrigatório que $\mathrm{Sub}\,(D)$ seja uma álgebra de Boole, o que sugere que categorias de pré-feixes sejam bons candidatos a "mundos" onde podemos interpretar o **axioma de Kock–Lawvere** para R e D sem nos reduzirmos a $R = \{0\}$. Categorias de pré-feixes também possuem a (grande) vantagem de serem toposes, de modo a serem cartesiano-fechadas e possuírem uma noção interna de "elemento" e "pertencimento". Por terem todos os limites finitos, nessas categorias podemos definir estruturas algébricas como anéis, objeto de quadrado-nilpotentes dentre muitas outras.

Uma boa questão a se colocar neste momento é: por qual(quais) categoria(s) podemos substituir $\mathcal{C}$ de modo a poder interpretar, do melhor modo possível, a Geometria Diferencial Sintética em $\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$? Veremos, na sequência, duas categorias de pré-feixes que validam o axioma de Kock–Lawvere. Posteriormente, faremos algumas restrições aos pré-feixes aceitos como objetos de nossa categoria a fim de obter um modelo com as características adequadas ao nosso propósito.

2.2. **Um topos que valida o Axioma de Kock–Lawvere.** O primeiro exemplo de um topos com um anel do tipo linha, R, é um bem simples - e na verdade simples demais para ser realmente útil em Geometria Diferencial.

Seja $\mathbb{R}-\mathbf{Alg}_{\text{f.g.}}$ a categoria cujos objetos são as $\mathbb{R}-$álgebras[13] comutativas finitamente geradas, ou seja, quocientes de $\mathbb{R}-$álgebras livres finitamente geradas por algum de seus ideais [14]:

$$\mathbf{Obj}\,(\mathbb{R}-\mathbf{Alg}_{\text{f.g.}}) =$$
$$= \left\{ \frac{\mathbb{R}[X_1,\cdots,X_n]}{I} \mid (n\in\mathbb{N})\&(I\subseteq \mathbb{R}[X_1,\cdots,X_n] \text{ ideal}) \right\}.$$

Considere, agora, o topos de pré-feixes $\mathbf{Set}^{\mathbb{R}-\mathbf{Alg}_{\text{f.g.}}}$[15] e tome, como objeto anel do tipo linha, o funtor esquecimento:

$$\begin{array}{rccc} R: & \mathbb{R}-\mathbf{Alg}_{\text{f.g.}} & \to & \mathbf{Set} \\ & A & \mapsto & |A| \\ & A \overset{h}{\to} B & \mapsto & |A| \overset{|h|}{\to} |B| \end{array}$$

que a cada $\mathbb{R}-$álgebra finitamente gerada associa seu conjunto subjacente, e a cada homomorfismo de $\mathbb{R}-$álgebras associa a função subjacente.

Proposição 16. *Em* $\mathbf{Set}^{\mathbb{R}-\mathbf{Alg}_{\text{f.g.}}}$, $R:\mathbb{R}-\mathbf{Alg}_{\text{f.g.}}\to\mathbf{Set}$ *é um anel comutativo com unidade.*

Demonstração. Demonstrar isto significa mostrar que existem transformações naturais $+,\cdot : R\times R \Rightarrow R$ e "elementos" $0,e:\mathbf{1}\Rightarrow R$, onde $\mathbf{1}=\{0\}$, satisfazendo os diagramas comutativos correspondentes à estrutura de anel comutativo com unidade.

Definimos, em cada estágio ($\mathbb{R}-$álgebra) $(A,+,\cdot,-,0,e)$:

$$\begin{array}{rccc} +_A: & R(A)\times R(A) = A\times A & \to & R(A)=A \\ & (a,b) & \mapsto & a+b \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \cdot_A: & R(A)\times R(A) = A\times A & \to & R(A)=A \\ & (a,b) & \mapsto & a\cdot b \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} -_A: & R(A)=A & \to & R(A)=A \\ & a & \mapsto & -a \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} 0_A: & R(\mathbf{1})=\{0\} & \to & R(A)=A \\ & 0 & \mapsto & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} e_A: & R(\mathbf{1})=\{0\} & \to & R(A)=A \\ & 0 & \mapsto & 1 \end{array}$$

A naturalidade destas transformações segue da própria definição de homomorfismo de $\mathbb{R}-$álgebras.

A comutatividade dos diagramas a seguir expressam:

[13] uma $\mathbb{R}-$álgebra é, a grosso modo, um $\mathbb{R}-$espaço vetorial A munido de um produto $\cdot : A\times A\to A$ bilinear.

[14] observe que esta categoria é *pequena*.

[15] os objetos desta categoria são todos os funtores de $\mathbb{R}-\mathbf{Alg}_{\text{f.g.}}$ em **Set**, e os morfismos são as transformações naturais entre esses funtores.

- **Associatividade da soma e do produto, respectivamente:**

$$\begin{tikzcd} R\times R\times R \arrow[r, Rightarrow, "(+,\mathrm{id}_R)"] \arrow[d, Rightarrow, "(\mathrm{id}_R,+)"'] & R\times R \arrow[d, Rightarrow, "+"] \\ R\times R \arrow[r, Rightarrow, "+"'] & R \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R\times R\times R \arrow[r, Rightarrow, "(\cdot,\mathrm{id}_R)"] \arrow[d, Rightarrow, "(\mathrm{id}_R,\cdot)"'] & R\times R \arrow[d, Rightarrow, "\cdot"] \\ R\times R \arrow[r, Rightarrow, "\cdot"'] & R \end{tikzcd}$$

- **Comutatividade da soma e do produto, respectivamente:**

$$\begin{tikzcd} R\times R \arrow[r, Rightarrow, "(\pi_2,\pi_1)"] \arrow[d, Rightarrow, "(\pi_1,\pi_2)"'] & R\times R \arrow[d, Rightarrow, "+"] \\ R\times R \arrow[r, Rightarrow, "+"'] & R \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R\times R \arrow[r, Rightarrow, "(\pi_2,\pi_1)"] \arrow[d, Rightarrow, "(\pi_1,\pi_2)"'] & R\times R \arrow[d, Rightarrow, "\cdot"] \\ R\times R \arrow[r, Rightarrow, "\cdot"'] & R \end{tikzcd}$$

- **Elemento neutro da soma e do produto, respectivamente:**

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1}\times R \arrow[r, Rightarrow, "(0,\mathrm{id}_R)"] \arrow[dr, Rightarrow, "\pi_2"'] & R\times R \arrow[d, Rightarrow, "+"] \\ & R \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{1}\times R \arrow[r, Rightarrow, "(e,\mathrm{id}_R)"] \arrow[dr, Rightarrow, "\pi_2"'] & R\times R \arrow[d, Rightarrow, "\cdot"] \\ & R \end{tikzcd}$$

- **Elemento simétrico da soma:**

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, Rightarrow, "!"] \arrow[d, Rightarrow, "(\mathrm{id}_R,-)"'] & \mathbf{1} \arrow[d, Rightarrow, "0"] \\ R\times R \arrow[r, Rightarrow, "+"'] & R \end{tikzcd}$$

- **Distributividade do produto sobre a soma:**

$$\begin{tikzcd} & (R\times R)\times(R\times R) \arrow[dr, Rightarrow, "(\cdot,\cdot)"] & \\ R\times R\times R \arrow[ur, Rightarrow, "((\pi_1,\pi_2),(\pi_1,\pi_3))"] \arrow[d, Rightarrow, "(\pi_1,+)"'] & & R\times R \arrow[d, Rightarrow, "+"] \\ R\times R \arrow[rr, Rightarrow, "\cdot"'] & & R \end{tikzcd}$$

onde $\pi_1, \pi_2, \pi_3 : R\times R\times R \to R$ são as projeções na primeira, segunda e terceira coordenada, respectivamente. $\square$

Proposição 17. *No contexto acima, o funtor R é representável.*

Demonstração. Dada qualquer $\mathbb{R}-$álgebra finitamente gerada, A, temos um isomorfismo natural:

$$R(A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}-\mathbf{Alg}_{\mathrm{f.g.}}}(\mathbb{R}[X], A)$$

que associa a cada $a \in R(A)$ o único $\mathbb{R}-$homomorfismo:

$$\begin{array}{cccc} \phi_a : & \mathbb{R}[X] & \to & A \quad \text{tal que} \\ & X & \mapsto & a \end{array}$$

□

Desta forma, neste topos, R é um funtor representável por $\mathbb{R}[X]$, *i.e.*,

$$R \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}-\mathbf{Alg}_{\mathrm{f.g.}}}(\mathbb{R}[X], \bullet).$$

Nosso objeto de quadrados nilpotentes nesta categoria é o subfuntor de R dado por:

$$\begin{array}{cccc} D : & \mathbb{R}-\mathbf{Alg}_{\mathrm{f.g.}} & \to & \mathbf{Set} \\ & A & \mapsto & \{a \in A \mid a \cdot a = 0\} \\ & A \xrightarrow{f} B & \mapsto & \{a \in A \mid a^2 = 0\} \overset{|f|\restriction_{\{a\in A | a^2=0\}}}{\to} \{b \in B \mid b^2 = 0\} \end{array}$$

que é representado pela $\mathbb{R}-$álgebra dos números duais, $\mathbb{R}[\varepsilon] = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$, onde:

$$\begin{array}{cccc} + : & (\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \times (\mathbb{R}\times\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ & ((a,b),(c,d)) & \mapsto & (a+c, b+d) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \cdot : & (\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \times (\mathbb{R}\times\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ & ((a,b),(c,d)) & \mapsto & (a\cdot c, a\cdot d + b\cdot c) \end{array}$$

Isto significa que:

$$D \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}-\mathbf{Alg}_{\mathrm{f.g.}}}(\mathbb{R}[\varepsilon], \bullet).$$

Recorde que a segunda versão do **axioma de Kock–Lawvere** nos diz que $R\times R \cong R^D$, de modo que para interpretá-lo em nosso topos precisamos explicitar o que entendemos por R^D e por $R \times R$. Definimos o produto de dois funtores R e S por:

$$\begin{array}{cccc} R\times S : & \mathbb{R}-\mathbf{Alg}_{\mathrm{f.g.}} & \to & \mathbf{Set} \\ & A & \mapsto & R(A)\times S(A) \\ & A \xrightarrow{f} B & \mapsto & R(A)\times S(A) \overset{(R(f),S(f))}{\to} R(B)\times S(B) \end{array}$$

Tendo a definição de produto de dois funtores, em qualquer topos de pré-feixes podemos definir:

$$\begin{array}{cccc} R^D : & \mathbb{R}-\mathbf{Alg}_{\mathrm{f.g.}} & \to & \mathbf{Set} \\ & A & \mapsto & \mathrm{Nat}\left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}-\mathbf{Alg}_{\mathrm{f.g.}}}(A,\bullet)\times D, R\right). \end{array}$$

Teorema 18. *R satisfaz o* ***axioma de Kock–Lawvere****.*

Demonstração. De fato, para qualquer $\mathbb{R}-$álgebra finitamente gerada A, temos:

$$\begin{aligned} R^D(A) &\overset{\text{def.}}{=} \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}-\mathbf{Alg}_{\text{f.g.}}}(A,\bullet)\times D, R) \overset{\mathbf{Prp.}\ 17}{\cong} \\ &= \mathrm{Nat}\left(\mathrm{Hom}\left(A,\bullet\right)\times \mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}[\varepsilon],\bullet\right), \mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}[X],\bullet\right)\right) \cong \\ &\cong \mathrm{Nat}\left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}-\mathbf{Alg}_{\text{f.g.}}}\left(A\otimes\mathbb{R}[\varepsilon],\bullet\right), \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}-\mathbf{Alg}_{\text{f.g.}}}\left(\mathbb{R}[X],\bullet\right)\right) \overset{\text{Yoneda}}{\cong} \\ &\cong \left|\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}-\mathbf{Alg}_{\text{f.g.}}}\left(\mathbb{R}[X], A\otimes\mathbb{R}[\varepsilon]\right)\right| = |A\otimes\mathbb{R}[\varepsilon]| \overset{\text{como conjunto}}{=} A\times A = \\ &= (R\times R)(A), \end{aligned}$$

ou seja, $R^D \overset{\alpha}{\cong} R\times R$. □

Assim, $(\mathbf{Set}^{\mathbb{R}-\mathbf{Alg}_{\text{f.g.}}}, R)$, onde R é o funtor esquecimento, é um topos que satisfaz o **axioma de Kock–Lawvere** e, portanto, neste sentido, um "modelo" para a Geometria Diferencial Sintética. No entanto, pode-se verificar que nosso "modelo da reta geométrica", R, neste topos não é sequer um anel local. Não temos disponível, tampouco, um objeto neste topos que represente o intervalo $[0,1]$, imprescindível para desenvolver a teoria de integração. Além disto, este topos claramente não contém as variedades diferenciáveis (apenas as variedades algébricas, representadas por seus anéis de coordenadas), de modo que não é possível se "fazer" Geometria Diferencial nele. Convém, portanto, buscar outra categoria na qual além de valer o **Axioma de Kock–Lawvere**, possamos codificar as variedades diferenciáveis suaves.

2.3. **Um "Toy Model" para a Geometria Diferencial Sintética.** Conforme prometido no título deste trabalho, a busca por modelos da Geometria Diferencial Sintética nos motiva a estudar os anéis $\mathcal{C}^\infty$ [16]. Nesta seção definiremos, funtorialmente, o que é um anel $\mathcal{C}^\infty$ e daremos, em seguida, uma definição da categoria dos anéis $\mathcal{C}^\infty$ finitamente gerados, cujos objetos talvez sejam mais familiares para o leitor. Citaremos alguns exemplos destes anéis e exibiremos um topos munido de um objeto anel do tipo linha que, além de satisfazer o **axioma de Kock–Lawvere**, contém uma "cópia" de da categoria das variedades diferenciáveis suaves.

Definição 19 (**anel $\mathcal{C}^\infty$**)**.** *Seja $\mathcal{C}^\infty$ a categoria cujos objetos são as potências cartesianas de $\mathbb{R}$, ou seja,* $\mathbf{Obj}\,(\mathcal{C}^\infty) = \{\{*\},\mathbb{R},\mathbb{R}^2,\cdots,\mathbb{R}^n,\cdots\}$, *e cujos morfismos são as funções suaves (isto é, de classe $\mathcal{C}^\infty$) entre esses objetos:*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty}\left(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n\right) = \{\mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \mid f \textit{ é uma função suave}\} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$$

Um anel $\mathcal{C}^\infty$ é um funtor $A:\mathcal{C}^\infty\to$ **Set** *que preserva produtos finitos. Desta forma, pode-se conceber um anel $\mathcal{C}^\infty$ como uma interpretação, em* **Set**, *da teoria das funções suaves.*

Uma vez que todas as funções polinomiais são funções suaves, podemos considerar um anel $\mathcal{C}^\infty$ como uma extensão natural do conceito de $\mathbb{R}-$álgebra, no sentido de interpretar não apenas funções polinomiais mas *todas* as funções suaves.

[16] o leitor interessado encontrará um estudo mais aprofundado sobre esta classe de objetos matemáticos em [Ber].

Definição 20 (**anel $\mathcal{C}^\infty$ finitamente gerado**). *Um anel comutativo com unidade A é um* ***anel $\mathcal{C}^\infty$ finitamente gerado*** *se, e somente se, existirem $n \in \mathbb{N}$ e um ideal $I \subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que:*

$$A \cong \frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}$$

Os morfismos de anéis $\mathcal{C}^\infty$ finitamente gerados são exatamente os morfismos entre os anéis comutativos unitários subjacentes. Denotamos a categoria de todos os anéis $\mathcal{C}^\infty$ finitamente gerados e seus morfismos por $\mathcal{C}^\infty\mathbf{Rng}_{\text{f.g.}}$.

Dado qualquer aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^\infty(U)$ é um anel $\mathcal{C}^\infty$ finitamente gerado. De fato, consideramos uma função característica suave para U, digamos $\chi_U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (uma função que é diferente de zero exatamente em U) e tomamos $\widehat{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid y \cdot \chi_U(x) = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Verifica-se, então, que $\mathcal{C}^\infty(U) \cong \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1})/\langle y \cdot \chi_{\widehat{U}}(x) - 1\rangle$.

Uma outra classe importante de exemplos de anéis $\mathcal{C}^\infty$ finitamente gerados é obtida utilizando-se de variedades diferenciáveis suaves. Dada qualquer variedade suave M, por exemplo, $\mathcal{C}^\infty(M) = \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ é um anel $\mathcal{C}^\infty$ finitamente gerado. De fato, pelo **Teorema do Mergulho de Whitney** existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Pelo **Teorema da $\varepsilon-$vizinhança** existe um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $M \subseteq U$ e existe uma retração $r : U \twoheadrightarrow M$. Assim, como $\mathcal{C}^\infty(M)$ é um retrato do anel $\mathcal{C}^\infty$ finitamente gerado $\mathcal{C}^\infty(U)$, segue que $\mathcal{C}^\infty(M)$ é finitamente gerado. Um outro importante exemplo de anel $\mathcal{C}^\infty$ finitamente gerado é o dos números duais, $\mathbb{R}[\varepsilon]$, uma vez que $\mathbb{R}[\varepsilon] \cong \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})/\langle x^2\rangle$.

Observa-se que a categoria dos anéis $\mathcal{C}^\infty$ finitamente gerados é capaz de codificar todas as variedades suaves de um modo análogo ao que a categoria das $\mathbb{R}-$álgebras finitamente apresentadas é capaz de codificar variedades algébricas, além de codificar o objeto "infinitesimal" $\mathbb{R}[\varepsilon]$. Deste modo, é justo esperamos obter um modelo melhor para a Geometria Diferencial Sintética tomando o topos de pré-feixes de $\mathcal{C}^\infty\mathbf{Rng}_{\text{f.g.}}$ em $\mathbf{Sets}$ ao invés de $\mathbf{Sets}^{\mathbb{R}-\mathbf{Alg}_{\text{f.g.}}}$.

O teorema a seguir nos garante que há uma réplica suficientemente bem comportada da categoria das variedades diferenciáveis suaves na categoria dos anéis $\mathcal{C}^\infty$ finitamente gerados. O mergulho de $\mathbf{Man}$ em $\mathcal{C}^\infty\mathbf{Rng}_{\text{f.g.}}$ é descrito a seguir.

Teorema 21. *O funtor contravariante:*

$$\begin{array}{rccc} m: & \mathbf{Man} & \to & (\mathcal{C}^\infty\mathbf{Rng})^{\text{op}}_{\text{f.g.}} \\ & M & \mapsto & \mathcal{C}^\infty(M) \\ & M \xrightarrow{g} N & \mapsto & \mathcal{C}^\infty(M) \stackrel{(-\circ g)^{\text{op}}}{\to} \mathcal{C}^\infty(N) \end{array}$$

é pleno, fiel e preserva pullbacks transversais.

Demonstração. A fim de verificar que m aplica variedades suaves sobre anéis $\mathcal{C}^\infty$ finitamente gerados, veja o **Teorema 2.3** da p. 25 de [MR]. Para ver que m aplica pullbacks transversais sobre pushouts, veja a **Proposição 2.6** da p. 27 de [MR]. Para uma demonstração de que m é pleno e fiel, veja o **Teorema 2.8** da p. 30 de [MR]. □

Consideremos, finalmente, o seguinte topos:

$$\mathbf{S} = \mathbf{Set}^{(\mathcal{C}^\infty\mathbf{Rng})_{\text{f.g.}}}$$

e vejamos como mergulhar $\mathcal{C}^\infty\mathbf{Rng}_{\text{f.g.}}$ nele. Ao considerarmos o funtor de Yoneda contravariante:

$$\begin{array}{rccc} Y: & (\mathcal{C}^\infty\mathbf{Rng})^{\text{op}}_{\text{f.g.}} & \to & \mathbf{Set}^{(\mathcal{C}^\infty\mathbf{Rng})_{\text{f.g.}}} \\ & A & \mapsto & \mathrm{Hom}_{(\mathcal{C}^\infty\mathbf{Rng})_{\text{f.g.}}}(A, \bullet) \end{array}$$

obtemos um mergulho contravariante pleno, fiel e que preserva pullbacks transversais. Por conseguinte, a composição dos dois funtores plenos, fiéis e contravariantes:

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{Sets}^{(\mathcal{C}^\infty\mathbf{Rng})_{\text{f.g.}}} \\ \mathbf{Man} \arrow[ur, "s"] \arrow[r, "m"'] & \mathcal{C}^\infty\mathbf{Rng}^{\text{op}}_{\text{f.g.}} \arrow[u, "Y"'] \end{tikzcd}$$

nos dá um mergulho pleno, fiel e covariante de **Man** em $\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^\infty\mathbf{Rng}_{\text{f.g.}}}$.

Pode-se demonstrar que:

• Em $\mathbf{S}$ o funtor esquecimento:

$$\begin{array}{rccc} R: & (\mathcal{C}^\infty\mathbf{Rng})_{\text{f.g.}} & \to & \mathbf{Set} \\ & A & \mapsto & |A| \end{array}$$

é representado por $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, ou seja, $R \cong \mathrm{Hom}_{(\mathcal{C}^\infty\mathbf{Rng})_{\text{f.g.}}}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \bullet)$.

• O funtor:

$$\begin{array}{rccc} D: & (\mathcal{C}^\infty\mathbf{Rng})_{\text{f.g.}} & \to & \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^\infty\mathbf{Rng}_{\text{f.g.}}} \\ & A & \mapsto & \mathrm{Hom}_{(\mathcal{C}^\infty\mathbf{Rng})_{\text{f.g.}}}(\mathbb{R}[\varepsilon], A) \end{array}$$

é, em $\mathbf{S}$, o objeto de quadrados nilpotentes. Ademais, tem-se:

Teorema 22. *Em* $(\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^\infty\mathbf{Rng}_{\text{f.g.}}}, R)$ *vale o* ***axioma de Kock–Lawvere****.*

Demonstração. Dado qualquer anel $\mathcal{C}^\infty$ finitamente gerado A, tem-se:

$$\begin{aligned} R^D(A) &= \mathrm{Nat}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty\mathbf{Rng}_{\text{f.g.}}}(A, \bullet) \times D, R\right) = \\ &= \mathrm{Nat}\left(\mathrm{Hom}(A, \bullet) \times \mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}[\varepsilon], \bullet\right), \mathrm{Hom}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \bullet)\right) = \\ &= \left|\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty\mathbf{Rng}_{\text{f.g.}}}\left(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), A \otimes_\infty \mathbb{R}[\varepsilon]\right)\right| = \left|A \otimes_\infty \mathbb{R}[\varepsilon]\right| = A \times A = \\ &= (R \times R)(A). \end{aligned}$$

(cf. **Teorema 2.4** da p. 87 de [MR]). □

O topos $(\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^\infty\mathbf{Rng}_{\text{f.g.}}}, R)$, no entanto, é muito "grande" - e tem uma estrutura muito "grosseira", no sentido em que:

- O mergulho $s = Y \circ m : \mathbf{Man} \to \mathbf{S}$ não preserva alguns colimites interessantes, como coberturas abertas;
- O objeto anel do tipo linha, R, não é um anel local;
- O objeto anel do tipo linha (nosso modelo da reta geométrica), R, não é arquimediano.
- Em $\mathbf{S}$ não temos um objeto que nos valha pelo intervalo unitário $[0, 1]$.

Veremos, na sequência, que ao considerar somente certos objetos de $\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^\infty\mathbf{Rng}_{\text{f.g.}}}$ (feixes sobre um sítio de anéis $\mathcal{C}^\infty$ de um certo tipo especial), podemos obter um topos que preenche todas essas lacunas.

2.4. **Há um mundo bem melhor: o topos de Dubuc.** Consideramos, agora, uma subcategoria da dos pré-feixes de certa classe de anéis $\mathcal{C}^\infty$ sobre **Set**. Este topos é mais sofisticado, por se tratar de um topos de feixes. Usa-se aqui a noção de topologia de Grothendieck (um conceito que generaliza a noção de cobertura aberta de um espaço topológico), que nos permite interpretar fórmulas (geométricas) e conceitos no topos. Referimos, em benefício do leitor, o **Capítulo 8** de [Lav] para um bom estudo sucinto das noções de semântica categorial.

Para construir o topos de Dubuc, precisamos nos restringir a certos anéis $\mathcal{C}^\infty$ finitamente gerados que satisfazem uma propriedade especial, a saber, os anéis $\mathcal{C}^\infty$ germe-determinados (também denominados "de caráter local").

Definição 23 (anel $\mathcal{C}^\infty$ germe-determinado). *Seja I um ideal de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dizemos que I é um* ***ideal germe-determinado*** *se, e somente se para todo $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tivermos:*

$$\left(\forall x \in Z(I) = \bigcap_{g \in I} g^{-1}[\{0\}]\right)(f\restriction_x \in I\restriction_x \to f \in I).$$

A categoria dos anéis $\mathcal{C}^\infty$ (finitamente gerados) da forma $\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}$, onde I é um ideal germe-determinado, juntamente com seus morfismos, será denotada por $\mathbb{G}$.

Uma classe importante de exemplos de anéis $\mathcal{C}^\infty$ germe-determinados é a classe dos anéis $\mathcal{C}^\infty$ que são quocientes de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, para algum $n \in \mathbb{N}$, por ideais finitamente gerados - ou seja, os anéis $\mathcal{C}^\infty$ finitamente apresentados (cf. **Proposição 12** de [**Dub1**]). Assim, tanto $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ quanto $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})/\langle x^2\rangle$ são anéis $\mathcal{C}^\infty$ germe-determinados, e como para qualquer variedade diferenciável suave M tem-se $\mathcal{C}^\infty(M)$ finitamente apresentado, segue que $\mathcal{C}^\infty(M)$ é germe-determinado.

No entanto, nem todo ideal germe-determinado é finitamente gerado. De fato, dado qualquer $X \subsetneq \mathbb{R}^n$ fechado, em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ o ideal:

$$\mathfrak{m}^g_X = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \mid (\exists U \subseteq \mathbb{R}^n)\&(U \text{ aberto})\&(f\restriction_U \equiv 0)\}$$

embora germe-determinado, não é sequer enumeravelmente gerado. Mais concretamente, $\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})}{\mathfrak{m}^g_{[0,1]}}$ é um exemplo de anel $\mathcal{C}^\infty$ germe-determinado que *não* é finitamente apresentado.

O ideal $\mathfrak{m}^\infty_{[0,1]} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid D^\alpha f\restriction_{[0,1]} = 0 \text{ para todo } \alpha\}$ é, também, germe-determinado, de modo que $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})/\mathfrak{m}^\infty_{[0,1]}$ é um anel $\mathcal{C}^\infty$ germe-determinado. Este fato nos permite, por assim dizer, conceder "cidadania" ao intervalo $[0,1]$ em nosso topos. Munidos deste objeto em nosso "universo", podemos interpretar o **Axioma da Integração**:

$$(\forall f \in R^{[0,1]})(\exists! g \in R^{[0,1]})((g(0) = 0)\&(g' \cong f)),$$

com o qual se desenvolve uma grande parte da Geometria Diferencial, que engloba, por exemplo, o teorema de Stokes - cuja demonstração no caso sintético se reduz a poucas linhas.

Eduardo J. Dubuc demonstrou, dentre muitas outras coisas, que a classe dos ideais germe-determinados de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ (que ele chama de "ideais de caráter local") é a maior classe de ideais que satisfaz o $\mathcal{C}^\infty-$**Nullstellensatz** (fraco):

$$Z(I) = \varnothing \iff 1 \in I,$$

o que nos sugere uma forte conexão entre a variedades diferenciáveis e os anéis $\mathcal{C}^\infty$ germe-determinados, semelhante àquela estabelecida pelo **Nullstellensatz fraco**, entre variedades algébricas e $\mathbb{K}-$álgebras reduzidas de tipo finito, onde $\mathbb{K}$ denota um corpo algebricamente fechado.

Deve-se ressaltar, ainda, que se I é um ideal germe-determinado, $I\restriction_U = \{f\restriction_U : U \to \mathbb{R} \mid f \in I\}$ *não é, necessariamente,* germe-determinado: de fato, embora o ideal $\mathfrak{m}^g_{\{0\}}$ seja germe-determinado, considerando $U = \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$ obtemos o ideal $\mathfrak{m}^g_{\{0\}}\restriction_U$, que não é germe-determinado (cf. p. 98 de [MR]).

A definição a seguir é importante para a construção do topos de Dubuc.

Definição 24. *Uma família de funções $(f_\alpha : M \to \mathbb{R})_\alpha$ é **localmente finita** se para todo $x \in M$ existir uma vizinhança U_x tal que $f_\alpha\restriction_{U_x} = 0$ exceto por uma quantidade finita de índices.*

Se I é um ideal de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, existe um <u>menor</u> ideal germe-determinado, $\widetilde{I}$, denominado o **germe-radical de** I, que contém I. Basta tomarmos:

$$\widetilde{I} = \left\{ \sum_{\alpha\in\Lambda} f_\alpha \mid (f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \text{ é uma família localmente finita de } I \right\}$$

Observação 25. *Nós precisamos da "germe determinação" dos ideais a fim de que a topologia de Grothendieck do sítio a ser construído seja subcanônica - ou seja, a fim de que os funtores representáveis sejam feixes (e em particular, o objeto anel do tipo linha, que é representável, esteja na categoria, cf. **Lema 1.3** da p. 101 de [MR]), e portanto objetos da categoria de feixes. Veja, por exemplo, p. 102 de [MR].*

Para construir o sítio e, posteriormente o topos de Dubuc, vamos munir $\mathbb{G}^{\mathrm{op}}$ de uma pré-topologia de Grothendieck, *i.e.*, vamos definir, para cada objeto de $\mathbb{G}$ o que entendemos por famílias recobridoras:

Dado um anel $\mathcal{C}^\infty$ germe-determinado, $A = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)/I$, definimos:

$$\mathrm{Cov}\left(\frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)}{I}\right) = \left\{ \frac{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)}{I} \xrightarrow{u_\alpha} \frac{\mathcal{C}^\infty(U_\alpha)}{\widetilde{I\restriction_{U_\alpha}}} \mid \{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\} \in \mathcal{O}(Z(I)) \right\},$$

onde $\mathcal{O}(Z(I))$ denota a classe de todas as coberturas abertas do conjunto $Z(I) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Denotando por $J_{\mathrm{Cov}} : \mathbf{Obj}\,(\mathbb{G}^{\mathrm{op}}) \to \wp(\wp(\mathbf{Mor}\,(\mathbb{G}^{\mathrm{op}})))$ a topologia de Grothendieck gerada por Cov, obtemos um sítio pequeno, $(\mathbb{G}^{\mathrm{op}}, J_{\mathrm{Cov}})$, onde J_{Cov} é subcanônica - ou seja, para todo anel $\mathcal{C}^\infty$ germe determinado A, o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}^{\mathrm{op}}}(A, \bullet)$ é feixe.

O **topos de Dubuc** é o topos[17] de feixes sobre o sítio dos anéis $\mathcal{C}^\infty$ germe-determinados:

$$\mathcal{G} = \mathrm{Sh}\,(\mathbb{G}^{\mathrm{op}}, J_{\mathrm{Cov}})$$

[17]para uma prova de que $\mathcal{G}$ é um topos, ver **Proposição 1.5**, da p.102 de [MR].

Sendo J_{Cov} subcanônica, tem-se que $R = \mathrm{Hom}_{\mathbb{G}^{\mathrm{op}}}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \bullet)$ e $D = \mathrm{Hom}_{\mathbb{G}^{\mathrm{op}}}(\mathbb{R}[\varepsilon], \bullet)$ são feixes e, portanto, estão em $\mathcal{G}$.

Demonstra-se que $\mathcal{G}$ tem as seguintes características:

- existe um mergulho covariante pleno e fiel de **Man** em $\mathcal{G}$, que preserva pullbacks transversais e leva coberturas abertas em famílias recobridoras: (cf. **Corolário 1.4** de [MR])
- $\mathcal{G}$ valida o axioma de Kock–Lawvere e o objeto anel do tipo linha, R, que é representável, é um feixe;
- O objeto anel do tipo linha de $\mathcal{G}$, é um objeto anel local (cf. **Proposição 1.7**, da p. 108 de [MR]) e até mesmo um corpo internalizado, num sentido específico (cf. **Proposição 1.9**, p. 109 de [MR]);
- o objeto anel do tipo linha, R, munido da relação de ordem conveniente em $\mathcal{G}$ é arquimediano.
- Em $\mathcal{G}$, temos disponível o correspondente ao intervalo $[0, 1]$, que é representado por $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})/\mathfrak{m}^\infty_{[0,1]}$.

3. Considerações Finais

Apesar de terem sido extensivamente utilizados para descobertas e raciocínios sobre diversos conceitos da Geometria, os infinitésimos permaneceram durante muito tempo com o status de "ficções úteis". Cronologicamente, a primeira tentativa bem sucedida de formalizar uma noção de infinitésimo (invertível) foi a de A. Robinson, nos anos 1960, com sua Análise Não-Standard. Foi somente ao final da mesma década que surgiu uma abordagem capaz de "conceder cidadania" aos entes infinitésimos nilpotentes no mundo das "variedades" estudadas pela Geometria Diferencial, capazes de explicitar a intuição por detrás de conceitos intrincados, como conexões, fibrados vetoriais e muitos outros. Os argumentos e intuições de Lie, Cartan, Darboux e muitos outros tornam-se, com a Geometria Diferencial Sintética, finalmente vindicados - o que tem implicações óbvias no ensino da Geometria Diferencial, por exemplo.

Da busca de modelos para a Geometria Diferencial Sintética surge uma motivação para o estudo da teoria algébrica dos anéis $\mathcal{C}^\infty$. A partir deste estudo surgem novos ramos da Matemática, como o estudo de uma Geometria Algébrica sobre anéis $\mathcal{C}^\infty$ (cf. [Joy]), bem como o de sua contraparte algébrica, a Álgebra Comutativa Suave (cf. [BM]). Estes anéis vêm assumindo um protagonismo cada vez maior em novas áreas da Matemática, como a Geometria Diferencial Derivada, bem como em outras partes do conhecimento. Esperamos, com este trabalho, ter contribuído com a familiarização do leitor com a Geometria Diferencial Sintética e com a utilidade dos anéis $\mathcal{C}^\infty$.

Agradecimentos: *Os autores gostariam registrar seus sinceros agradecimentos ao parecerista anônimo pelas excelentes sugestões e pelos comentários os quais este, gentilmente, nos permitiu, através do editor, o professor Daniel Gonçalves, incorporá-los ao presente texto enriquecendo-o grandemente, sobretudo na contextualização do tema apresentada na introdução.*

Referências

[**Bel**] Bell, J. *Two approaches to Modelling the Universe: Synthetic Differential Geometry and Frame-Valued Sets*, 2008. Disponível em http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.114.1930

[**Ber**] Berni, J. C., *Some Algebraic and Logical Aspects of $\mathcal{C}^\infty-$Rings*, tese de doutorado, Instituto de Matemática e Estatística - IME-USP, 2018.

[**BM**] Berni, J. C., Mariano, H.L. *Topics on Smooth Commutative Algebra (preprint)*, 2019, disponível em https://arxiv.org/pdf/1904.02725.pdf.

[**Bus**] Busemann, H. *Metric Methods in Finsler Spaces in the Foundations of Geometry*, Princeton University Press,1942.

[**Car**] Cartan, E. *On Manifolds with Affine Connection and the Theory of General Relativity*, Bibliopolis, Edizioni di Filosofia e Science, Napoli, 1986.

[**Dub1**] Dubuc, E. *$\mathcal{C}^\infty-$Schemes*, American Journal of Mathematics, vol. 103, n. 4, pp. 683-690, 1981.

[**Dub**] Dubuc, E. *Sur les modèles de la Géométrie Différentielle Synthétique*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégorique, tome 20, n. 3 (1979), p. 231-279.

[**Gol**] Goldblatt, R. *Topoi - the categorial analysis of logic*, Dover Publications, Inc., Mineola, 2006.

[**End**] Enderton, H. *A Mathematical Introduction to Logic*, Academic Press, Inc., 1972.

[**Joy**] Joyce, D. *Algebraic Geometry over $\mathcal{C}^\infty-$Rings*, 2015, disponível em https://arxiv.org/pdf/1001.0023.pdf.

[**Koc**] Kock, A. *Synthetic Differential Geometry*, London Mathematical Society Lecture Note Series 333, Cambridge University Press, 2006.

[**Kos**] Kostecki, R. *Differential Geometry in Toposes*, disponível em https://www.fuw.edu.pl/~kostecki/sdg.pdf.

[**Law**] Lawvere, F. W. *Outline of Synthetic Differential Geometry*, disponível em http://www.acsu.buffalo.edu/~wlawvere/SDG_Outline.pdf

[**Lam**] Lamers, J. *Smooth Infinitesimal Analysis*, Bachelor Thesis, Utrecht University, 2009.

[**Lav**] Lavendhomme, R. *Basic Concepts of Synthetic Differential Geometry*, Kluwer Texts in Mathematical Sciences, 1996.

[**Mac**] MacLane, S. *Saunders MacLane: a mathematical autobiography*, A. K. Peters Ltd., 2005.

[**MMo**] MacLane, S., Moerdijk, I. *Sheaves in Geometry and Logic - A First Introduction to Topos Theory*, Springer Verlag, 1992.

[**MMR**] Moerdijk, I., Reyes, G. *A Smooth Version of the Zariski Topos*. Advances in Mathematics 65, 229-253 (1987).

[**MR**] Moerdijk, I., Reyes, G. *Models for Smooth Infinitesimal Analysis*, Springer Verlag New York Inc, 1991.

[**Pic**] Picado, J. *An Interview with F. William Lawvere*, disponível em http://www.mat.uc.pt/~picado/lawvere/interview.pdf.

Instituto de Matemática e Estatística, Rua do Matão, 1010, Cidade Universitária, São Paulo - SP

Email address: jeancb@ime.usp.br, hugomar@ime.usp.br