

KLEIN NOS AJUDA CONTAR RETAS EM SUPERFÍCIES PROJETIVAS

JACQUELINE ROJAS E SALLY ANDRIA

RESUMO. Os grupos de simetrias por rotações dos Sólidos Platônicos reaparecem no *Teorema de classificação dos subgrupos finitos de $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$* , dado por *F. Klein* em 1870. Neste artigo veremos como este teorema pode ser utilizado na contagem de retas em certas superfícies projetivas não singulares, seguindo as linhas do artigo *Counting lines on surfaces* de *Boissière & Sarti* publicado em 2007 (cf. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 5).

1. INTRODUÇÃO

Desde a Grécia Antiga até os dias atuais, cinco sólidos capturaram a imaginação da humanidade, desempenhando um papel importante em várias áreas do conhecimento. Há milênios, os geômetras estudaram sua beleza matemática e simetrias únicas. No início da cosmologia, eles também tiveram um papel importante, sendo utilizados pelo astrônomo alemão *Johannes Kepler* (1571-1630) para explorar seu primeiro modelo do sistema solar. No modelo de Kepler, as órbitas dos planetas estariam circunscritas pelos cinco sólidos platônicos, que embora errada, levaria mais adiante a descoberta das órbitas elípticas do sistema solar (cf. p. 76 em [23]). Além disso, na Biologia e na Química também existem reflexos das propriedades e simetrias destes sólidos, por exemplo ao estudar a morfologia de um vírus ou a geometria molecular de diversos elementos (veja [12]).

Em 1884, o matemático alemão *Felix Christian Klein* (1849-1925) explicou em seu livro [11], como expressar as raízes de qualquer polinômio de grau 5 em termos de funções modulares elípticas. A ideia dele foi relacionar o grupo das rotações do icosaedro com o grupo de automorfismos dos pontos de torção de ordem 5 de uma determinada curva elíptica. De fato, ele criou uma teoria que relacionava o grupo das rotações de cada um dos cinco sólidos platônicos com o grupo de automorfismos de certos subconjuntos de pontos de torção.

Data de aceitação: 16 de março de 2021.

Palavras chave. Retas em superfícies. Teorema de classificação de Klein.

Um dos resultados obtidos por *Klein* (em [11]) é o *Teorema de classificação dos subgrupos finitos de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$* , o qual foi usado em 2007 por *Boissière & Sarti* (em [5]) na contagem de retas em superfícies projetivas não singulares.

A referida contagem, surge como uma tentativa de responder, ou mais precisamente, achar cotas inferiores para a clássica questão da área de geometria enumerativa (ainda em aberto para $d \geq 5$):

Qual é o número máximo de retas que uma superfície não singular de grau d em \mathbb{P}^3 contém?

No qual \mathbb{P}^3 é o espaço projetivo sobre o corpo dos números complexos.

Este texto tem como objetivo principal mostrar para o leitor (seguindo as linhas da demonstração da Proposição 3.3 em [5]), como a partir de um subconjunto C da reta projetiva, constituído por d pontos distintos (com $d \geq 3$), obtemos um subgrupo finito Γ_C de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ e também uma superfície não singular de grau d em \mathbb{P}^3 contendo exatamente $d^2 + d \cdot |\Gamma_C|$ retas. Veremos que a noção de ação de um grupo sobre um conjunto, o estudo das famílias de retas de certas superfícies quádricas não singular em \mathbb{P}^3 , e principalmente o *Teorema de classificação dos subgrupos finitos de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$* são elementos fundamentais para a determinação das cotas inferiores N_d em (12), sendo N_d o valor máximo para $d^2 + d \cdot |\Gamma_C|$.

Nas próximas três seções, distribuímos os assuntos da seguinte forma:

Na Seção 2 apresentaremos os sólidos Platônicos e uma descrição de seus grupos de simetrias. Além disso, veremos uma breve descrição da relação que existe entre os subgrupos finitos do grupo das rotações em \mathbb{R}^3 e os subgrupos finitos de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$. Encerramos a seção com o enunciado do *Teorema de Classificação dos subgrupos finitos de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$* estabelecido por Klein em [11].

Na Seção 3, em um primeiro momento, introduziremos as noções mínimas necessárias de geometria algébrica (tais como: espaço projetivo e superfície não singular) para tornar este texto compreensível para aqueles leitores que não tem conhecimentos prévios nessa área. A seguir, serão apresentadas a noção de ação de um grupo sobre um conjunto e o grupo dos automorfismos da reta projetiva complexa $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$. O foco desta seção é o estudo da ação de subgrupos finitos de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ sobre o conjunto formado pelos seus pontos fixos. Uma consequência muito importante desse estudo é a classificação dos subgrupos de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ que deixam invariantes d pontos distintos da reta projetiva, obtida no Teorema 3.1 (que é utilizado para obter as cotas inferiores N_d).

A Seção 4 começa com uma breve descrição dos resultados conhecidos sobre a contagem de retas em superfícies não singulares de grau d no espaço projetivo complexo \mathbb{P}^3 . Em seguida, para cada subconjunto C (da reta projetiva \mathbb{P}^1) formado por d pontos distintos, associaremos uma superfície não singular em \mathbb{P}^3 . Prosseguindo, descreveremos o esquema que será utilizado para contar as retas nessas superfícies e as linhas principais para demonstrar que tais superfícies contém $d^2 + d \cdot |\Gamma_C|$ retas. Concluimos com a estimativa do valor máximo:

$$N_d = \max \left\{ d^2 + d \cdot |\Gamma_C| \mid C \text{ consiste de } d \text{ pontos distintos} \right\}.$$

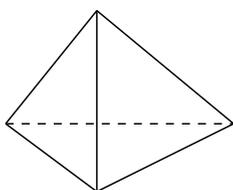
2. SÓLIDOS PLATÔNICOS

Um Sólido Platônico é um *poliedro convexo*¹, no qual:

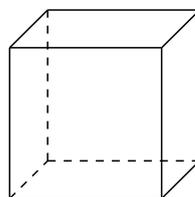
- todas as suas faces são polígonos regulares iguais;
- em todos os seus vértices encontram-se o mesmo número de arestas².

Estes sólidos também são denominados *poliedros regulares*.

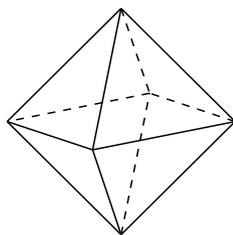
Um dos fatos que mais surpreende, como também o fez na Grécia antiga a mais de 2000 anos, é a existência de exatamente 5 desses poliedros regulares, apresentados na figura a seguir.



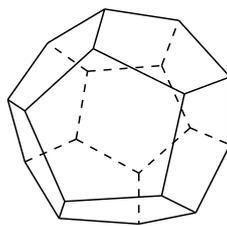
Tetraedro



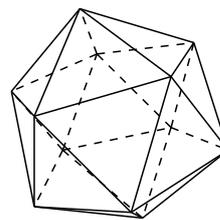
Cubo



Octaedro



Dodecaedro



Icosaedro

Por certo, a primeira demonstração conhecida de que existem exatamente cinco é atribuída a Theaetetus (c. 417-369 a.C.). Entretanto, foi o filósofo grego Platão (c. 427-347 a.C.) quem primeiro postulou a existência desses poliedros em seu diálogo *Timaeus*³, a posteriori nomeados *Sólidos Platônicos* em sua homenagem. Posteriormente, Euclides deu uma descrição matemática completa dos sólidos platônicos no livro XIII final dos Elementos de Euclides.

¹POLIEDRO é um sólido limitado por superfícies planas que chamamos polígonos. Um poliedro é CONVEXO quando qualquer reta secante possui exatamente dois pontos em comum com o poliedro.

²As ARESTAS são as linhas resultantes do encontro de duas faces (se a interseção for não vazia), e os VÉRTICES são os pontos de encontro das arestas.

³Nesse texto o narrador de Platão, o astrônomo Timeu de Locri, usa triângulos - como figuras fundamentais - para criar quatro dos cinco poliedros regulares (tetraedro, hexaedro, octaedro, icosaedro). Além disso, em Timeu, Platão associa cada um dos elementos clássicos (terra, ar, água e fogo) a um poliedro regular. A terra é associada ao cubo, o ar ao octaedro, a água ao icosaedro e o fogo ao tetraedro. Com relação ao quinto sólido platônico, o dodecaedro, Platão escreve: "Faltava ainda uma quinta construção que o deus utilizou para organizar todas as constelações do céu.". Aristóteles introduziu um quinto elemento, o éter, e postulou que os céus eram feitos deste elemento, mas ele não teve interesse em associá-lo com o quinto sólido de Platão.

Dualidade. Um olhar atencioso em cada sólido platônico nos permite determinar os seguintes números.

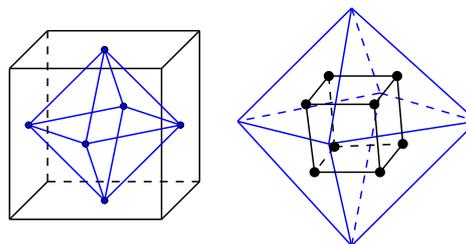
Sólido Platônico	Número de faces	Número de vértices	Número de arestas	Número de arestas por face
Tetraedro	4	4	6	3
Cubo	6	8	12	4
Octaedro	8	6	12	3
Dodecaedro	12	20	30	5
Icosaedro	20	12	30	3

Ao analisar a Tabela acima com atenção, percebemos uma dualidade entre o número de arestas, faces e vértices, para os dois pares cubo-octaedro e dodecaedro-icosaedro: em cada par, os dois sólidos têm o mesmo número de arestas e o número de faces de cada um deles é igual ao número de vértices do outro.

De fato, se S for um sólido platônico, o *dual* de S é o poliedro determinado da seguinte forma:

- 1º. considere o centro de cada face;
- 2º. conecte por segmentos os pontos que se encontram em faces vizinhas.

Note que, o dual do tetraedro é o próprio tetraedro. O dual do cubo é o octaedro. E o dual do octaedro é o cubo. Tal como, o icosaedro é o dual do dodecaedro e vice-versa.



Essa dualidade permite concluir que um dado sólido platônico e seu dual tem o mesmo grupo de simetria.

Grupos de simetria dos Sólidos Platônicos. Lembremos que uma *isometria* em \mathbb{R}^n é uma função bijetora $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que preserva distâncias, ou seja, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ (sendo “ $\| \cdot \|$ ” a norma Euclidiana). E o conjunto $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ constituído por tais aplicações é um grupo com a composição de funções.

Uma descrição mais precisa destas isometrias é a seguinte⁴:

$$f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n) \iff \begin{cases} \exists A \text{ matriz ortogonal de ordem } n \times n \text{ e} \\ v \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } f(x) = Ax + v. \end{cases}$$

⁴De fato, se $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ e $0 \in \mathbb{R}^n$ for a origem, então considere $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\varphi(x) = f(x) - f(0)$. A partir da identidade $2\langle x, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2$ e o fato de f ser uma isometria, segue-se que $2\langle \varphi(p), \varphi(q) \rangle = 2\langle p, q \rangle$ para quaisquer p, q em \mathbb{R}^n . Agora, considere a base canônica $\{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n e note que $\langle \varphi(p + q), \varphi(e_i) \rangle = \langle \varphi(p) + \varphi(q), \varphi(e_i) \rangle$ e $\langle \varphi(\lambda p), \varphi(e_i) \rangle = \langle \lambda \varphi(p), \varphi(e_i) \rangle$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $p, q \in \mathbb{R}^n$. Assim, $\varphi(p + q) = \varphi(p) + \varphi(q)$ e $\varphi(\lambda p) = \lambda \varphi(p)$, ou seja, φ é uma transformação linear ortogonal.

Por exemplo, para $n = 1$ tem-se

$$\text{Isom}(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b, a \in \{-1, 1\}, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Observe que subgrupos de $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ aparecem sob a condição de invariância para subconjuntos de \mathbb{R}^n .

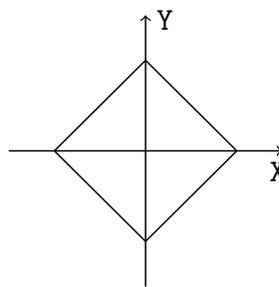
Concretamente, para cada subconjunto X de \mathbb{R}^n , considere

$$S(X) = \left\{ f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n) \mid f(X) = X \right\}$$

denominado de agora em diante, *grupo de simetrias* de X .

A título de exemplo, se $P_m \subset \mathbb{R}^2$ for um polígono regular de m -lados ($m \geq 3$) com seu centro na origem, o grupo de simetrias $S(P_m)$ é isomorfo ao grupo diedral⁵ D_m de ordem $2m$.

Observe que para $m = 4$, ao colocarmos o quadrado com seu centro na origem e seus vértices sobre os eixos coordenados, tem-se que $S(P_4)$ é gerado pela rotação em um ângulo $\frac{\pi}{2}$ (dada por $(x, y) \mapsto (-y, x)$, que por sua vez gera um grupo cíclico de ordem 4) e a reflexão em torno do eixo X (dada por $(x, y) \mapsto (x, -y)$ de ordem 2).



Antes de apresentar a descrição dos grupos de simetria dos sólidos platônicos, vamos colocar uma pergunta que possui o mesmo teor do Teorema de classificação de Klein, que apresentaremos em breve, a saber:

Quais são os subgrupos finitos de $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$, a menos de isomorfismo?

No caso $n = 1$, observe que a ordem dos elementos $x \mapsto -x + b$ é 2 para todo b e eles não comutam entre si, já a ordem dos elementos $x \mapsto x + b$ é infinita para $b \neq 0$. A partir disso podemos concluir que os subgrupos finitos de $\text{Isom}(\mathbb{R})$ são os cíclicos de ordem 1 e 2.

No caso $n = 2$, é atribuído a *Leonardo da Vinci* (1452-1519) ter mostrado que os únicos subgrupos finitos de $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ são o grupo cíclico C_m de ordem m e o grupo diedral D_m de ordem $2m$ (cf. p. 66 em [23]). E como já comentamos, esses grupos aparecem no estudo dos grupos de simetrias de um polígono regular de m lados.

O caso $n \geq 3$ deixamos como uma pesquisa para o leitor, por não ser o foco deste artigo.

Notação: Seja Y um conjunto. De agora em diante usaremos a notação $|Y|$ para indicar a cardinalidade de Y .

⁵Se $I_m = \{1, \dots, m\}$ é o conjunto dos vértices de um polígono regular de m lados, então D_m é o subgrupo de $S_m = \{f : I_m \rightarrow I_m \mid f \text{ é uma bijeção}\}$ (S_m é um grupo com a composição de funções, usualmente denominado *grupo das permutações de m elementos*) gerado pelas funções $\theta, r \in S_m$ dadas por $\theta(i) = i + 1$ para $i \neq m$ e $\theta(m) = 1$; $r(i) = m + 2 - i$ para $i \neq 1$ e $r(1) = 1$. De fato, $D_m = \langle \theta, r \rangle$ é um grupo de ordem $2m$ tal que $\text{ord}(\theta) = m$, $\text{ord}(r) = 2$ e $\theta \circ r = r \circ \theta^{m-1}$ (cf. p. 196 em [10]).

O subgrupo das rotações $\text{Rot}(X)$ de $S(X)$. Seja X um subconjunto de \mathbb{R}^n contendo a origem. O grupo de *simetria por rotação* de X é o subgrupo $\text{Rot}(X)$ de $S(X)$ constituído pelas simetrias $f(x) = Ax$, com A ortogonal e determinante de A igual a um.

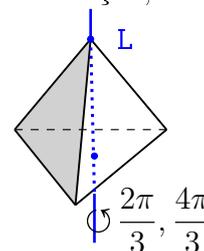
Doravante, S_n denota o grupo das permutações de n -elementos e A_n o subgrupo de S_n formado pelas permutações pares (também denominado grupo alternado)⁶.

A seguir faremos uma breve descrição do grupo de rotações $\text{Rot}(X)$, no caso do tetraedro e do cubo (este segundo também vale para seu dual, o octaedro).

Tetraedro. No caso deste sólido temos duas escolhas para eixo de rotação, a saber:

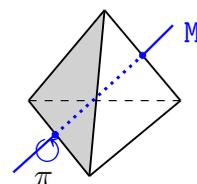
- Eixo de rotação L passando por um vértice e pelo centro da face oposta. Com ângulo de rotação $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$.

Levando em conta as quatro possíveis escolhas de vértice, obtemos 8 rotações.



- Eixo de rotação M passando pelo ponto médio de uma das arestas e pelo ponto médio da aresta oposta (aquela que resulta da interseção das faces, que não contém a aresta onde fixamos o primeiro ponto médio). Com ângulo de rotação π .

Considerando as três possíveis escolhas de pares de arestas, obtemos 3 rotações.



Ao incluirmos a identidade, obtemos exatamente 12 rotações. Assim, $|\text{Rot}(X)| = 12$. Observe que essas rotações permutam os vértices do tetraedro, e portanto, a cada uma dessas rotações podemos associar uma permutação em S_4 . Para isto, podemos enumerar os vértices do tetraedro de 1 a 4, e denotarmos por $p_{i,j}$ o ponto médio da aresta com extremos nos vértices i e j . Deste modo, podemos representar as rotações da seguinte forma:

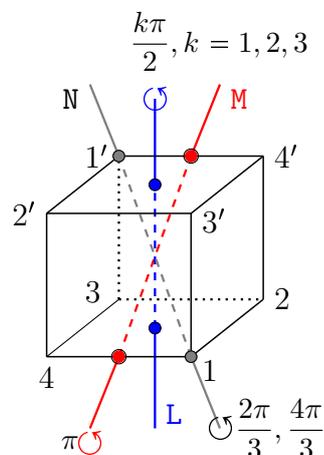
$$\begin{aligned} \text{Eixo L passando pelo vértice 1 e ângulo } \frac{2\pi}{3} &\longmapsto (2\ 3\ 4). \\ \text{Eixo L passando pelo vértice 1 e ângulo } \frac{4\pi}{3} &\longmapsto (2\ 4\ 3). \\ \text{Eixo M passando por } p_{2,3}, p_{1,4} \text{ e ângulo } \pi &\longmapsto (2\ 3)(1\ 4). \end{aligned}$$

A partir da descrição acima o leitor pode deduzir que $\text{Rot}(X) \cong A_4$

Cubo. Para este sólido temos três escolhas para eixo de rotação, a saber:

⁶Lembramos que $S_n = \{f : I_n \rightarrow I_n \mid f \text{ é uma bijeção}\}$, sendo $I_n = \{1, \dots, n\}$, é um grupo com a composição de funções. De fato, $|S_n| = n!$ e $|A_n| = \frac{n!}{2}$ se, $n \geq 2$ (cf. p. 218-224 em [10]).

- Eixo de rotação L passando pelo ponto médio de faces opostas, com ângulo de rotação $\frac{k\pi}{2}$, $k = 1, 2, 3$. Obtemos ao todo $3 \cdot 3 = 9$ rotações.
- Eixo de rotação N passando por vértices opostos (isto é, uma de suas diagonais), com ângulo de rotação $\frac{2k\pi}{3}$, $k = 1, 2$. Obtemos ao todo $2 \cdot 4 = 8$ rotações.
- Eixo de rotação M passando pelo ponto médio de uma aresta e da sua oposta superior (conforme ilustra a figura), com ângulo de rotação π . Neste caso obtemos, 6 rotações.



Ao incluirmos a identidade, obtemos exatamente 24 rotações. Logo, $|\text{Rot}(X)| = 24$. Note que essas rotações permutam as diagonais ($\overline{11'}$, $\overline{22'}$, $\overline{33'}$ e $\overline{44'}$). Podemos associar a cada uma dessas rotações uma permutação em S_4 , via sua ação nas diagonais (ao fazermos a identificação $1 \equiv \overline{11'}$, $2 \equiv \overline{22'}$, $3 \equiv \overline{33'}$ e $4 \equiv \overline{44'}$). De fato, conforme a figura acima, temos:

$$\begin{aligned} \text{Eixo L com ângulo } \frac{\pi}{2} &\longmapsto (1\ 2\ 3\ 4). \\ \text{Eixo N com ângulo } \frac{2\pi}{3} &\longmapsto (2\ 3\ 4). \\ \text{Eixo M (com ângulo } \pi) &\longmapsto (1\ 4). \end{aligned}$$

A descrição acima permite concluir que $\text{Rot}(X) \cong S_4$.

De fato, a classificação dos grupos de simetrias dos sólidos platônicos (cf. p. 52–56 em [15]) é dada por :

Grupos de simetria dos Sólidos Platônicos. Seja X um sólido platônico e C_2 um grupo cíclico de ordem 2, então

- $S(X) \cong S_4$ e $\text{Rot}(X) \cong A_4$, se X for um tetraedro.
- $S(X) \cong S_4 \times C_2$ e $\text{Rot}(X) \cong S_4$, se X for um cubo ou um octaedro.
- $S(X) \cong A_5 \times C_2$ e $\text{Rot}(X) \cong A_5$, se X for um dodecaedro ou um icosaedro.

Subgrupos finitos de $\text{Rot}(\mathbb{R}^3)$ e o Teorema de classificação de Klein. Na subseção anterior constatamos que os grupos A_4 e S_4 são obtidos a partir dos grupos de simetrias por rotações do tetraedro e cubo, respectivamente. Cabe assinalar que esses grupos reaparecem na classificação dos subgrupos finitos de $\text{Rot}(\mathbb{R}^3)$ (ou seja, das rotações no espaço 3-dimensional) e no *Teorema de classificação de Klein* (que será enunciado em breve). De fato, tem-se (cf. p. 105 [2], p. 149 [23]) que:

Subgrupos finitos de $\text{Rot}(\mathbb{R}^3)$. Um subgrupo finito de $\text{Rot}(\mathbb{R}^3)$ é isomorfo a exatamente um dos seguintes grupos:

- cíclico;
- diedral de ordem $2m$, $m \geq 2$;
- grupo de simetrias por rotações de um dos sólidos platônicos.

O leitor poderá apreciar em breve a similitude que existe entre o resultado acima (classificação dos subgrupos finitos de $\text{Rot}(\mathbb{R}^3)$) e o Teorema de classificação de

Klein. De fato, veremos que essa semelhança tem como base a conexão que existe entre o grupo $\text{Rot}(\mathbb{R}^3)$ e o grupo projetivo linear $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$ via o grupo unitário especial $\text{SU}_2(\mathbb{C})$, definidos a seguir.

Os grupos $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$, $\text{SU}(2)$ e rotações em \mathbb{R}^3

Seja $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ o grupo⁷ formado pelas matrizes 2×2 complexas invertíveis e $\text{E}_2(\mathbb{C})$ o subgrupo normal de $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ formado por todas as matrizes escalares. O grupo quociente $\text{GL}_2(\mathbb{C})/\text{E}_2(\mathbb{C})$ será denotado por $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$ e denominado *grupo projetivo linear* associado ao espaço vetorial complexo \mathbb{C}^2 . Considere o subgrupo (denominado *grupo unitário especial*)

$$\text{SU}_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C}) \mid |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\},$$

sendo $\bar{z} = a - bi$ o conjugado de $z = a + bi$ e $|z|^2 = \bar{z}z = a^2 + b^2$. De fato, se $A = \begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix} \in \text{SU}_2(\mathbb{C})$, com $z = a + bi$ e $w = c + di$, ao considerarmos o vetor $q = (b, c, d) \in \mathbb{R}^3$ de norma $\|q\| = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$, vamos definir a transformação linear $R_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$(1) \quad v \mapsto (a^2 - \|q\|^2)v + 2(q \cdot v)q + (2a)q \times v$$

sendo “ \cdot ” o produto interno usual e “ \times ” o produto vetorial em \mathbb{R}^3 .

Observe que, se q é o vetor nulo (logo $|z|^2 + |w|^2 = |a|^2 = 1$ e $A = \pm I$, sendo I a matriz identidade), então R_A é a função identidade. Entretanto, se q for não nulo e considerarmos o ângulo $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que $a = \cos \frac{\theta}{2}$ e o vetor unitário $u = \frac{q}{\|q\|}$, obtemos $q = \sin \frac{\theta}{2}u$ e após substituição em (1), segue que

$$R_A(v) = (\cos \theta)v + (\sin \theta)u \times v + (1 - \cos \theta)(u \cdot v)u$$

sendo o lado direito exatamente fórmula de *Euler-Rodrigues*⁸. Assim, R_A é uma rotação com eixo contendo a origem, determinado pelo vetor diretor u , no ângulo θ , e portanto, $R_A \in \text{Rot}(\mathbb{R}^3)$. Deixamos a cargo do leitor mostrar que $R : \text{SU}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Rot}(\mathbb{R}^3)$ dada por $A \mapsto R_A$ é um homomorfismo sobrejetivo de grupos tendo por núcleo $\{\pm I\}$ ⁹. Assim, o grupo quociente $\text{PSU}_2(\mathbb{C}) = \text{SU}_2(\mathbb{C})/\{\pm I\}$ é isomorfo ao grupo $\text{Rot}(\mathbb{R}^3)$.

Além disso, observe que $\text{PSU}_2(\mathbb{C})$ é um subgrupo de $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$ (visto que $\text{SU}_2(\mathbb{C})$ é um subgrupo de $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ e tem-se que $\{\pm I\} \leq \text{E}_2(\mathbb{C})$). Pode-se mostrar que todo subgrupo finito de $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$ é conjugado¹⁰ a um subgrupo de $\text{PSU}_2(\mathbb{C})$ (cf. p. 9 [21], p. 84 de [13]). Assim, subgrupos finitos de $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$ irão se identificar com conjugados de subgrupos de $\text{Rot}(\mathbb{R}^3)$ (uma vez que $\text{Rot}(\mathbb{R}^3)$ é isomorfo ao grupo $\text{PSU}_2(\mathbb{C})$).

⁷Com o produto usual de matrizes.

⁸Tal fórmula foi descoberta inicialmente por *Leonhard Paul Euler* (1707-1783) em torno de 1770 (cf. [9]) e posteriormente de forma independente por *Benjamin Olinde Rodrigues* (1795-1851) por volta de 1840 (cf. [17]).

⁹Uma abordagem via quatérnios unitários encontra-se na p. 2 das notas de *Dolgachev* [8].

¹⁰Os subgrupos H_1 e H_2 do grupo $(G, *)$ são ditos *conjugados*, se existe $g \in G$ tal que $H_2 = gH_1g^{-1}$ sendo $gH_1g^{-1} = \{g * h * g^{-1} \in G \mid h \in H_1\}$.

O leitor poderá apreciar a importância do Teorema de classificação de Klein, para o desenvolvimento deste texto, no momento que formos estudar os conjuntos invariantes de pontos na reta projetiva¹¹.

Teorema de classificação de Klein (TCK). *Um subgrupo finito de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ é isomorfo a exatamente um dos seguintes grupos:*

- (i) C_m o grupo cíclico de ordem m ;
- (ii) D_m o grupo diedral de ordem $2m$, $m \geq 2$;
- (iii) A_4 o grupo alternado de ordem 12;
- (iv) S_4 o grupo das permutações de ordem 24;
- (v) A_5 o grupo alternado de ordem 60.

Se dois subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ são isomorfos, então eles são conjugados.

3. SOBRE GEOMETRIA ALGÉBRICA E AÇÕES DE GRUPOS

Iniciamos esta seção revisando algumas noções de geometria algébrica (em consideração aos leitores que não tem conhecimentos prévios dessa área).

3.1. Preliminares de Geometria Algébrica. O n -espaço projetivo complexo \mathbb{P}^n é constituído de todos os subespaços de dimensão 1 de \mathbb{C}^{n+1} (considere \mathbb{C}^{n+1} como espaço vetorial complexo). Ou seja, \mathbb{P}^n é formado pelas retas que passam pela origem em \mathbb{C}^{n+1} . Assim, cada elemento em \mathbb{P}^n é da forma $[v]$, com v vetor não nulo em \mathbb{C}^{n+1} . Se $v = (v_0, \dots, v_n)$, usaremos a notação $[v] = [v_0 : \dots : v_n]$ na qual v_0, \dots, v_n são denominadas de coordenadas homogêneas do ponto $[v]$. Observe que, os subespaços $[a_0 : \dots : a_n]$ e $[b_0 : \dots : b_n]$ são iguais (ou seja, definem o mesmo ponto em \mathbb{P}^n) se, e somente se, $(a_0, \dots, a_n) = \lambda(b_0, \dots, b_n)$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$ não nulo. Logo, pontos distintos são determinados por vetores linearmente independentes.

Neste contexto, \mathbb{P}^1 , \mathbb{P}^2 e \mathbb{P}^3 são usualmente denominados de *reta projetiva*, *plano projetivo* e *espaço projetivo*, respectivamente.

Assim como $x+y=0$ define uma reta no plano cartesiano \mathbb{R}^2 e $x^2+2y^2+4z^2-4=0$ define um elipsoide em \mathbb{R}^3 , retas e superfícies em \mathbb{P}^n também são definidos a partir dos zeros de polinômios, só que tais polinômios precisam ser homogêneos.

Polinômios homogêneos e seu conjunto de zeros. Considere $f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ não nulo e $d \geq 0$ inteiro. Dizemos que f é *homogêneo de grau d* se, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \dots, x_n).$$

Se $f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ for homogêneo e não constante¹², definimos o *conjunto dos zeros*¹³ de f por:

$$\mathcal{Z}(f) = \{[v] \in \mathbb{P}^n \mid f(v) = 0\}.$$

Usualmente, $\mathcal{Z}(f)$ é denominada *hipersuperfície* definida por f em \mathbb{P}^n .

¹¹Visto que o grupo $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ é isomorfo ao grupo dos automorfismos da reta projetiva (veja Proposição 3.2).

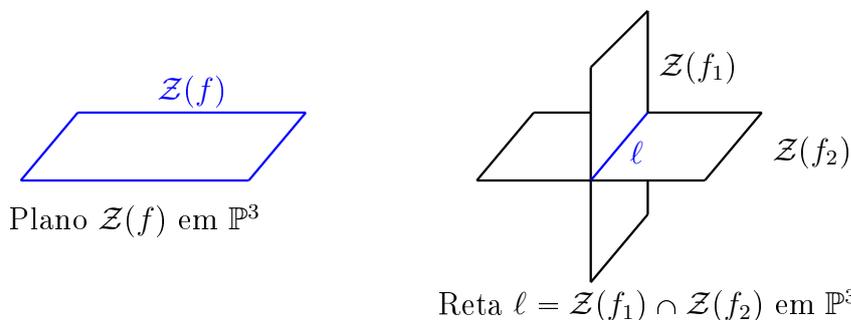
¹²No caso dos polinômios constantes, definimos $\mathcal{Z}(0) = \mathbb{P}^n$ e $\mathcal{Z}(a) = \emptyset$, se $a \in \mathbb{C}$ não nulo.

¹³Ressaltamos que a homogeneidade de f nos garante a boa definição de $\mathcal{Z}(f)$, uma vez que $f(\lambda v) = \lambda^d f(v)$, $f(v) = 0$ implica em $f(\lambda v) = 0$.

Notação: Se f_1, f_2, \dots, f_k forem polinômios homogêneos não constantes (não necessariamente do mesmo grau) em $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$, então $\mathcal{Z}(f_1, f_2, \dots, f_k)$ denotará a interseção $\bigcap_{i=1}^k \mathcal{Z}(f_i)$.

Por exemplo, para

- $n = 1$: $\mathcal{Z}(f)$ é um conjunto finito de pontos na reta projetiva¹⁴.
- $n = 2$: $\mathcal{Z}(f)$ é denominada *curva projetiva plana*. Se o grau de f for 1, então $\mathcal{Z}(f)$ é uma *reta* no plano projetivo \mathbb{P}^2 .
- $n = 3$: $\mathcal{Z}(f)$ é denominada *superfície projetiva*. $\mathcal{Z}(f)$ é um *plano* em \mathbb{P}^3 se f for homogêneo de grau 1. Uma *reta* em \mathbb{P}^3 é determinada pela interseção de planos distintos¹⁵, conforme ilustra a próxima figura.



Outra descrição de retas e planos em \mathbb{P}^3 .

- (i) H é um plano em $\mathbb{P}^3 \iff$ Existe W subespaço vetorial de dimensão 3 de \mathbb{C}^4 tal que $H = \{[w] \in \mathbb{P}^3 \mid w \in W, \text{ não nulo}\}$.

De forma análoga,

- (ii) ℓ é uma reta em $\mathbb{P}^3 \iff$ Existe U subespaço vetorial de dimensão 2 de \mathbb{C}^4 tal que $\ell = \{[u] \in \mathbb{P}^3 \mid u \in U, \text{ não nulo}\}$.

Neste caso, usamos a notação $H = \mathbb{P}(W)$ e $\ell = \mathbb{P}(U)$. Ao trocarmos 3 por n , nesta abordagem obtemos uma definição para reta e plano em \mathbb{P}^n .

- (iii) Se $p = [u_1]$ e $q = [u_2]$ são pontos distintos em \mathbb{P}^n , então existe uma única reta passando por p e q . De fato, tal reta é determinada pelo subespaço $U = [u_1, u_2]$ e

$$\mathbb{P}(U) = \{[a_0 u_1 + a_1 u_2] \in \mathbb{P}^n \mid [a_0 : a_1] \in \mathbb{P}^1\}.$$

A noção de ponto singular, apresentada a seguir, nos permitirá introduzir o conceito de superfície não singular.

Ponto singular de $\mathcal{Z}(f)$. Considere $f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ homogêneo de grau $d \geq 1$.

¹⁴Se $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$ é homogêneo de grau d então verifica-se que $f = (b_0 x_0 - a_0 x_1)^{n_0} \cdots (b_k x_0 - a_k x_1)^{n_k}$, com $n_i \in \mathbb{N}$ e $d = n_0 + \cdots + n_k$, $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ não ambos nulos. Logo, $\mathcal{Z}(f) = \{[a_0 : b_0], \dots, [a_k : b_k]\}$.

¹⁵ $\mathcal{Z}(f_1)$ e $\mathcal{Z}(f_2)$ são planos distintos em \mathbb{P}^3 se, e somente se, f_1 e f_2 são linearmente independentes. Um fato interessante da geometria em \mathbb{P}^3 é que dois planos sempre se intersectam.

Um ponto $[v] \in \mathbb{P}^n$ é dito *ponto singular de $\mathcal{Z}(f)$* se, $\partial_i f(v) = 0$ com $i \in \{0, \dots, n\}$, onde ∂_i denota a derivada parcial de f em relação à variável x_i .

Os pontos singulares são zeros de f . Ao derivarmos $f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \dots, x_n)$ em relação a λ , obtemos

$$\sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial(\lambda x_i)} \cdot x_i = d\lambda^{d-1} f(x_0, \dots, x_n).$$

Fazendo $\lambda = 1$ nessa última igualdade chegamos na *Identidade de Euler*:

$$\partial_0 f \cdot x_0 + \dots + \partial_n f \cdot x_n = d \cdot f.$$

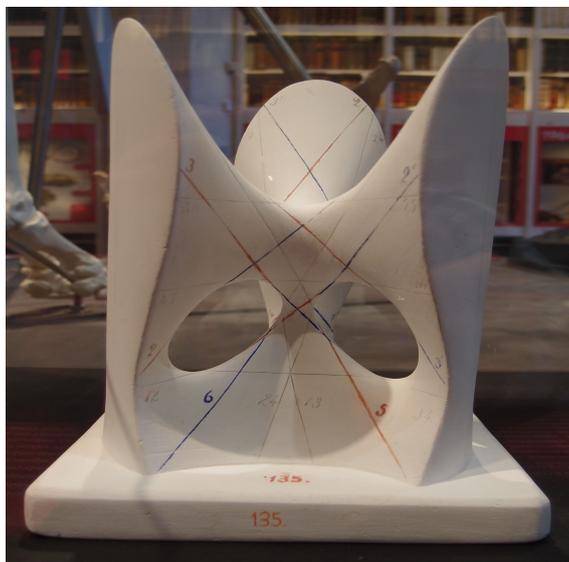
De onde concluímos que, se $[v]$ é ponto singular de $\mathcal{Z}(f)$, então $[v] \in \mathcal{Z}(f)$.

Dizemos que $\mathcal{Z}(f)$ é *não singular* se $\mathcal{Z}(f)$ não possui pontos singulares. Por exemplo, todo plano em \mathbb{P}^3 é não singular.

Superfícies não singulares de grau d em \mathbb{P}^3 . Se $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ for homogêneo de grau $d \geq 1$ com $\mathcal{Z}(f) \subset \mathbb{P}^3$ não singular, então $\mathcal{Z}(f)$ será denominada *superfície não singular de grau d* . Também são usados os epítetos superfície quádrlica, cúbica, quártica para $d = 2, 3, 4$, respectivamente.

Na Georg-August Universität Göttingen encontra-se um modelo local, da assim denominada cúbica de Clebsch definida por

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)^3.$$



Observe que a superfície cúbica definida acima é não singular¹⁶. Vale ressaltar que as “linhas” destacadas nessa figura representam retas contidas nessa superfície.

¹⁶De fato, ao fazer $L = x_0 + x_1 + x_2 + x_3$ e $f = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - L^3$ tem-se que $\partial_i f = 3x_i^2 - 3L^2 = 3(x_i - L)(x_i + L)$ para todo i . Assim, se $[v] \in \mathbb{P}^3$ com $v = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ for um ponto singular de $\mathcal{Z}(f)$, segue que $L(v) = \pm v_i$ para todo i (o que é absurdo). Portanto, $\mathcal{Z}(f)$ é uma superfície não singular em \mathbb{P}^3 .

3.2. Ação de um grupo sobre um conjunto. Se $(G, *)$ for um grupo com elemento neutro e , considere $G^* = G - \{e\}$.

Lembremos que o grupo G age pela esquerda num conjunto C , se existe uma função de $G \times C$ em C que associa a cada par (g, x) um único elemento em C , que denotaremos por $g \cdot x$, satisfazendo às condições:

- (i) $e \cdot x = x$, para todo $x \in C$,
- (ii) $h \cdot (g \cdot x) = (h * g) \cdot x$ para todo $x \in C, h, g \in G$.

Para cada $x \in C$, $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ é denominado de *estabilizador* de x em G e $O_x = \{g \cdot x \in C \mid g \in G\}$ é denominado de *órbita* de x (relativa a ação definida por “.”).

Um resultado importante neste contexto é a seguinte Proposição.

Proposição 3.1. *Com as notações acima, verifica-se que:*

- (i) $O_x = O_y$ se, e somente se, existe $g \in G$, tal que $y = g \cdot x$.
- (ii) $O_x \cap O_y = \emptyset$ ou $O_x = O_y$.
- (iii) Para todo $y \in O_x$ tem-se que G_y e G_x são grupos conjugados (logo isomorfos).
- (iv) $|O_x| = (G : G_x)$. Portanto, se G for um grupo finito, o número de elementos de cada órbita, é um divisor da ordem do grupo G .

Se C for um conjunto finito, a Proposição 3.1 nos garante que podemos escolher uma quantidade finita de elementos em C , digamos x_1, x_2, \dots, x_k , tais que:

$$(2) \quad C = O_{x_1} \cup O_{x_2} \cup \dots \cup O_{x_k} \text{ sendo que } O_{x_i} \cap O_{x_j} = \emptyset, \quad \forall i \neq j.$$

Neste caso, x_1, x_2, \dots, x_k denomina-se *sistema de representantes* determinado pela ação de G em C . A partição em (2) é chamada de *decomposição de C em órbitas* (valendo a unicidade a menos de uma permutação dos índices).

A seguir, iniciamos o estudo dos automorfismos de \mathbb{P}^1 e seus subgrupos finitos, visto que desempenham um papel muito importante na contagem de retas que faremos mais adiante.

Automorfismos da reta projetiva. Seja $\text{Aut}(\mathbb{C}^2)$ o grupo constituído pelos isomorfismos lineares de \mathbb{C}^2 em \mathbb{C}^2 sob a operação de composição de funções. Como cada aplicação $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^2)$ leva retas pela origem em retas pela origem, T induz a função

$$\mathbf{T} : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1, \text{ dada por } \mathbf{T}([v]) = [T(v)].$$

O conjunto formado por tais funções será denotado por $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ e seus elementos denominados *automorfismos* de \mathbb{P}^1 .

Lembre que a função de $\text{Aut}(\mathbb{C}^2)$ em $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ dada por $T \longmapsto [T]$, sendo $[T] \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ a matriz associada a T da base canônica na base canônica, é um isomorfismo de grupos. Por exemplo, se $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^2)$ é tal que $[T] \in \text{E}_2(\mathbb{C})$, então $\mathbf{T} = \text{id}_{\mathbb{P}^1} \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$.

Listamos a seguir algumas das propriedades essenciais dos elementos de $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ que usaremos neste texto.

Proposição 3.2. *Sejam $\mathbf{T}, \mathbf{S} \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ determinadas por $T, S \in \text{Aut}(\mathbb{C}^2)$, respectivamente. Então verifica-se que:*

- (i) $\mathbf{T} = \mathbf{S}$ se, e somente se, $T = \lambda S$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$ não nulo.
- (ii) Dados os pontos p_1, p_2, p_3, q_1, q_2 e q_3 em \mathbb{P}^1 tais que $p_i \neq p_j$ e $q_i \neq q_j$ para todo $i \neq j$, existe um único $\mathbf{T} \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$, tal que $\mathbf{T}(p_i) = q_i$ para $i = 1, 2, 3$.
- (iii) $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ com a composição de funções é um grupo, tendo $\text{id}_{\mathbb{P}^1}$ por elemento neutro.
- (iv) A função $\Psi : \text{Aut}(\mathbb{P}^1) \longrightarrow \text{PGL}_2(\mathbb{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{GL}_2(\mathbb{C})/\text{E}_2(\mathbb{C})$ dada por $\mathbf{T} \mapsto [T] \cdot \text{E}_2(\mathbb{C})$ é um isomorfismo de grupos.

Salientamos que a próxima subseção começa com a noção de ponto fixo, além de introduzir notações para certos automorfismos da reta projetiva complexa (que poderão ser utilizados pelo leitor na determinação do valor de $|\Gamma_C|$ para um dado subconjunto C de \mathbb{P}^1 na Seção 4). A Proposição 3.4 é o resultado que nos permitirá classificar os subgrupos finitos de $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ a partir da decomposição em órbitas de seus pontos fixos.

Ação de subgrupos de $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ sobre pontos fixos. Lembremos que $p \in \mathbb{P}^1$ é um ponto fixo de $\mathbf{T} \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ se $\mathbf{T}(p) = p$.

Notações: No que segue considere $\mathbf{e}_1 = [1 : 0]$ e $\mathbf{e}_2 = [0 : 1]$. Se $\kappa \in \mathbb{C}$ for não nulo, então \mathbf{C}_κ , \mathbf{P}_κ e \mathbf{R}_κ denotarão os automorfismos de \mathbb{P}^1 dados por: $\mathbf{C}_\kappa([x : y]) = [x + \kappa y : y]$, $\mathbf{P}_\kappa([x : y]) = [\kappa y : x]$ e $\mathbf{R}_\kappa([x : y]) = [\kappa x : y]$. Em particular, temos que $\mathbf{R}_1 = \text{id}_{\mathbb{P}^1}$ (o qual possui infinitos pontos fixos). Observe que:

Automorfismo	Pontos fixos	Valor em \mathbf{e}_1	Valor em \mathbf{e}_2	Ordem
\mathbf{C}_κ	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_1	$[\kappa : 1]$	infinita
\mathbf{P}_κ	$[\sqrt{\kappa} : 1], [-\sqrt{\kappa} : 1]$	\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_1	2
$\mathbf{R}_\kappa, \kappa \neq 1$	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_2	$\text{ord}(\kappa)$ em (\mathbb{C}^*, \cdot)

A seguir para cada subgrupo G de $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$, considere

$$\text{Fix}(G) = \left\{ p \in \mathbb{P}^1 \mid p \text{ é ponto fixo de algum elemento em } G^* \right\}.$$

Observe que:

- (i) Se $x \in \text{Fix}(G)$ então $\mathbf{T}(x) \in \text{Fix}(G)$ para todo $\mathbf{T} \in G$.¹⁷
- (ii) $(\mathbf{T}, x) \longmapsto \mathbf{T}(x)$ define uma ação pela esquerda de G em $\text{Fix}(G)$.

Na próxima proposição considere a ação pela esquerda $(\mathbf{T}, x) \longmapsto \mathbf{T}(x)$, tanto para G quanto para H .

Proposição 3.3. *Seja G um subgrupo finito de $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ com $|G| > 1$ tal que $\text{Fix}(G) = O_1 \cup \dots \cup O_k$ é a decomposição em órbitas de $\text{Fix}(G)$. Se H for um subgrupo de $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ isomorfo ao grupo G , então existe $\mathbf{L} \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ tal que $\text{Fix}(H) = \mathbf{L}(O_1) \cup \dots \cup \mathbf{L}(O_k)$ é a decomposição em órbitas de $\text{Fix}(H)$.*

Demonstração. Como $\text{Fix}(G)$ (resp. $\text{Fix}(H)$) é finito, podemos considerar o sistema finito de representantes x_1, \dots, x_k em $\text{Fix}(G)$ (resp. y_1, \dots, y_l em $\text{Fix}(H)$). Por

¹⁷De fato, se $x \in \text{Fix}(G)$, então existe $\mathbf{S} \in G^*$ tal que $\mathbf{S}(x) = x$. Agora, basta observar que $\mathbf{T} \circ \mathbf{S} \circ \mathbf{T}^{-1} \in G^*$ e fixa $\mathbf{T}(x)$ se $\mathbf{T} \in G$.

simplicidade, seja $O_i = O_{x_i}$ e $O_j = O_{y_j}$. Assim temos:

$$\begin{aligned}\text{Fix}(G) &= O_1 \cup \cdots \cup O_k \text{ com } O_i \cap O_j = \emptyset, & \forall i \neq j. \\ \text{Fix}(H) &= O_1 \cup \cdots \cup O_l \text{ com } O_i \cap O_j = \emptyset, & \forall i \neq j.\end{aligned}$$

Como G e H são isomorfos e finitos, o Teorema de classificação de Klein (**TCK**) nos garante que eles são conjugados, logo existe $\mathbf{L} \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$, tal que o automorfismo interno $I_{\mathbf{L}}$ (note que $I_{\mathbf{L}}(\mathbf{T}) = \mathbf{T} \circ \mathbf{L} \circ \mathbf{T}^{-1} \in H$, para $\mathbf{T} \in G$) induz um isomorfismo de G em H . Deixamos a cargo do leitor verificar que:

Afirmção 1: $\text{Fix}(H) = \mathbf{L}(\text{Fix}(G))$.

Afirmção 2: $\mathbf{L}(O_x) = O_{\mathbf{L}(x)}$, para todo $x \in \text{Fix}(G)$.

Portanto,

$$\text{Fix}(H) = O_1 \cup \cdots \cup O_l = \mathbf{L}(O_1) \cup \cdots \cup \mathbf{L}(O_k) = O_{\mathbf{L}(x_1)} \cup \cdots \cup O_{\mathbf{L}(x_k)}.$$

Segue do item (ii) na Proposição 3.1 que para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, existe um único $j \in \{1, \dots, l\}$, tal que $O_j = O_{\mathbf{L}(x_i)} = \mathbf{L}(O_i)$ e necessariamente $k = l$. ■

A demonstração da Proposição 3.4, que enunciaremos a seguir, encontra-se na seção 6.12 do texto de Artin [3] (também na p. 3 de [8]).

Proposição 3.4. *Seja G é um subgrupo finito de $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ de ordem $N \geq 2$ tal que*

$$\text{Fix}(G) = O_1 \cup \cdots \cup O_k, \text{ na qual } O_i = O_{x_i}$$

é a decomposição de $\text{Fix}(G)$ em órbitas induzida pela ação $(\mathbf{T}, x) \mapsto \mathbf{T}(x)$ (da Proposição 3.3). Então

(i) *Se $x \in O_i$ então $|G_x| = |G_{x_i}| := E_i \geq 2$, para cada i .*

(ii) *$k \in \{2, 3\}$. Além disso,*

- *$k = 2$ se, e somente se, G é cíclico.*
- *Se $k = 3$ e $E_1 \leq E_2 \leq E_3$, então só uma das seguintes possibilidades ocorre:*

E_1	E_2	E_3	G é isomorfo ao grupo
2	2	$m \geq 2$	D_m
2	3	3	A_4
2	3	4	S_4
2	3	5	A_5

E conseqüentemente, se $n_i = \frac{|G|}{E_i}$ (é a cardinalidade das órbitas) para $i = 1, 2, 3$, temos:

(4)

n_1	n_2	n_3	G é isomorfo ao grupo
m	m	2	D_m
6	4	4	A_4
12	8	6	S_4
30	20	12	A_5

Na próxima subseção será utilizada a proposição acima (junto com o Teorema de Classificação de Klein) para classificar os subgrupos finitos de $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ que deixam invariantes subconjuntos finitos da reta projetiva (cf. Teorema 3.1). Sendo esse Teorema um dos resultados que nos permitirão determinar a cota N_d em (12).

Classificando subgrupos de $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ que fixam um conjunto. Para cada subconjunto C de \mathbb{P}^1 , considere

$$\Gamma_C = \{\mathbf{T} \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1) \mid \mathbf{T}(C) = C\}.$$

Proposição 3.5. Γ_C é um subgrupo de $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$, cuja ordem é finita se $|C| \geq 3$.

Demonstração. A seguir mostraremos que $|\Gamma_C| < \infty$ se $|C| \geq 3$.

Se $|C| \geq 3$ então considere $\{p_1, p_2, p_3\} \subseteq C$. Segue do item (ii) da Proposição 3.2 que cada elemento $\mathbf{T} \in \Gamma_C$ é determinado pela escolha de

$$\{\mathbf{T}(p_1), \mathbf{T}(p_2), \mathbf{T}(p_3)\} \subseteq C,$$

que é finita e dada pelo binômio $\binom{d}{3}$, sendo $d = |C|$. Agora, levando em conta as permutações (6 ao todo), concluímos que $|\Gamma_C| \leq \binom{d}{3}$. ■

Exemplo 3.1. Se $C = \{p_1, p_2, p_3\}$, então cada $\sigma \in D_3$ determina $\mathbf{T}_\sigma \in \Gamma_C$ dado por $\mathbf{T}_\sigma(p_i) = p_{\sigma(i)}$ ((ii) na Proposição 3.2). Deixamos a cargo do leitor a verificação de que $\Psi : D_3 \rightarrow \Gamma_C$ dada por $\sigma \mapsto \mathbf{T}_\sigma$ é um isomorfismo de grupos.

A seguir, assuma que O_x denota a órbita de x relativa à ação $(\mathbf{T}, p) \mapsto \mathbf{T}(p)$ de Γ_C em C , e que $C = O_1 \cup \dots \cup O_k$ é a decomposição em órbitas relativa a essa ação. Lembre que $\text{Fix}(\Gamma_C)$ é o conjunto formado pelos pontos fixos dos elementos de $(\Gamma_C)^*$.

Proposição 3.6. Se $x \in C$ e $|C| = d \geq 3$, temos:

- (i) $O_x \subseteq \text{Fix}(\Gamma_C) \cap C$ se $x \in \text{Fix}(\Gamma_C)$, caso contrário $O_x \cap \text{Fix}(\Gamma_C) \cap C = \emptyset$ e $|O_x| = |\Gamma_C|$.
- (ii) Se Γ_C não for cíclico e $\text{Fix}(\Gamma_C) = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \cup \mathcal{O}_3$ for a decomposição em órbitas de $\text{Fix}(\Gamma_C)$ sob a ação de Γ_C (dada por $(\mathbf{T}, p) \mapsto \mathbf{T}(p)$), então:

$$(5) \quad d = \alpha n_1 + \beta n_2 + \gamma n_3 + \delta |\Gamma_C|,$$

na qual $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\}$, $\delta \geq 0$ e $n_i = |\mathcal{O}_i|$.

Demonstração. (i) Deixamos a cargo do leitor.

(ii) Sabemos que $O_i \cap \text{Fix}(C) \cap C = O_i$ ou $O_i \cap \text{Fix}(\Gamma_C) \cap C = \emptyset$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Se acontecer que $O_i \cap \text{Fix}(\Gamma_C) \cap C = O_i$ então $O_i = \mathcal{O}_j$ para algum $j \in \{1, 2, 3\}$. Assim, no máximo as três órbitas em $\text{Fix}(\Gamma_C) = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \cup \mathcal{O}_3$ podem aparecer na decomposição em órbitas de C (isto, vai depender da quantidade de pontos em $\text{Fix}(\Gamma_C) \cap C$). Seja $\delta = |\{i \mid O_i \cap \text{Fix}(\Gamma_C) \cap C = \emptyset\}|$, note que para cada um desses índices $|O_i| = |\Gamma_C|$. Agora, como $|C| = d = |O_1| + \dots + |O_k|$, segue que:

$$d = \alpha |O_1| + \beta |O_2| + \gamma |O_3| + \delta |\Gamma_C| \quad \text{com} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\} \quad \text{e} \quad \delta \geq 0. \quad \blacksquare$$

O próximo Teorema contém os resultados mais importantes para a determinação de Γ_C (a menos de isomorfismo). Sua demonstração tem como base o Teorema de classificação de Klein (**TCK**), a Proposição 3.4 e a equação (5) acima.

Teorema 3.1. Seja C um subconjunto de \mathbb{P}^1 com d pontos ($d \geq 3$). Verifica-se que:

- (i) Se Γ_C for cíclico então $|\Gamma_C| \leq d$.

- (ii) Se $\Gamma_C \cong D_k$ o grupo diedral, sendo $k \geq 2$, então $k \mid d$ ou $k \mid (d - 2)$. Em particular, $k \leq d$.
- (iii) Se $C = \{[1 : \xi^j]\}_{j=1}^d$, sendo ξ uma raiz primitiva d -ésima da unidade, então $\Gamma_C \cong D_d$.
- (iv) Se d é ímpar e Γ_C não é cíclico, então $\Gamma_C \cong D_k$ para algum k , $3 \leq k \leq d$.

Demonstração. De acordo com a tabela (3), considere:

$$[u : v] \xrightarrow{\mathbf{R}_a} [au : v] \quad \text{e} \quad [u : v] \xrightarrow{\mathbf{P}_a} [av : u]$$

com $a \in \mathbb{C}$ não nulo. Por simplicidade, vamos escrever \mathbf{P} em lugar de \mathbf{P}_1 (ou seja, $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1$).

(i) A menos de conjugação podemos assumir que $\Gamma_C = \langle \mathbf{R}_\kappa \rangle$ (sendo κ uma raiz primitiva da unidade). Como $d \geq 3$ existe $x \in C$ que não é ponto fixo de \mathbf{R}_κ (logo de nenhum elemento de $(\Gamma_C)^*$), assim $|O_x| = |\Gamma_C|$. Como $O_x \subseteq C$, concluímos que $|\Gamma_C| \leq d = |C|$.

(ii) Se $\Gamma_C \cong D_k$, então segue de (4) e (5) que: $d = \alpha \cdot k + \beta \cdot k + \gamma \cdot 2 + \delta \cdot 2k$ com $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\}$ e $\delta \geq 0$ inteiro. Assim, se $\gamma = 0$ então k divide d , caso contrário ($\gamma = 1$), concluímos que k divide $d - 2$.

(iii) Se $d = 3$ então $\Gamma_C \cong D_3$ (veja exemplo 3.1). A seguir assuma que $d \geq 4$. Temos $C = \{[1 : \xi^j]\}_{j=0}^{d-1}$, sendo ξ uma raiz primitiva d -ésima da unidade. Observe que $\mathbf{R}_\xi, \mathbf{P} \in \Gamma_C$ e $\langle \mathbf{R}_\xi, \mathbf{P} \rangle$ é isomorfo a D_d (desde que $\text{ord}(\mathbf{R}_\xi) = d$, $\text{ord}(\mathbf{P}) = 2$ e $\mathbf{P} \circ \mathbf{R}_\xi \circ \mathbf{P} = \mathbf{R}_\xi^{d-1}$).

Assim, Γ_C não é cíclico e $|\Gamma_C| = 2dm$ para algum m natural.

Caso 1: $d \in \{4, 5\}$. Neste caso, segue do Teorema de Classificação de Klein (**TCK**) e do item (ii) (nesta Proposição) que:

d	Γ_C é isomorfo ao grupo	$ \Gamma_C $
4	S_4 ou D_4	24 ou 8
5	A_5 ou D_5	60 ou 10

Se $\Gamma_C \cong A_4$ ou $\Gamma_C \cong S_5$ então a partir de (4) e (5), concluímos que $4 = \alpha 6 + \beta 8 + \gamma 12 + \delta 24$ ou $5 = \alpha 12 + \beta 20 + \gamma 30 + \delta 60$, sendo que essas equações não admitem soluções com $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\}$ e $\delta \geq 0$ inteiro. Portanto, $\Gamma_C \cong D_d$ para $d = 4, 5$.

Caso 2: $d \geq 6$. Observe que $\mathbf{R}_\xi \in \Gamma_C$ é um elemento de ordem $d \geq 6$ (e Γ_C não é cíclico). Assim, segue do Teorema de classificação de Klein (**TCK**) que $\Gamma_C \cong D_k$, com $k \leq d$. Portanto, $\Gamma_C \cong D_d$ (pois $|\Gamma_C| = 2dm = 2k \leq 2d$).

(iv) Se Γ_C não for cíclico, segue do Teorema de classificação de Klein (**TCK**) que $\Gamma_C \cong G$ com $G \in \{D_k, A_4, S_4, A_5\}$ e $k \geq 3$. Assim a ordem de Γ_C é par e caso $\Gamma_C \cong G$ com $G \in \{A_4, S_4, A_5\}$ segue de (4) que n_i é par para todo i . Agora, como $d = \alpha n_1 + \beta n_2 + \gamma n_3 + \delta |\Gamma_C|$ com $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\}$ e $\delta \geq 0$ inteiro (veja (5)), concluímos que d teria que ser par. Assim $\Gamma_C \cong D_k$ para algum $k \geq 3$. De fato, segue do item (ii) desta Proposição que $k \leq d$. ■

Finalmente temos a base para determinar a ordem dos grupos Γ_C , se C for um subconjunto finito da reta projetiva. Assim, na próxima e última seção retornamos ao mundo geométrico (revisando inicialmente a contagem de retas em superfícies

projetivas não singulares no espaço projetivo \mathbb{P}^3 , para logo associar a cada subconjunto C de \mathbb{P}^1 constituído por d pontos, uma superfície não singular de grau d em \mathbb{P}^3 , continuando com a contagem das retas contidas nessas superfícies). Concluimos com a estimativa de N_d em (12), referente à quantidade máxima de retas que tais superfícies podem conter.

4. CONTAGEM DE RETAS EM SUPERFÍCIES PROJETIVAS

Como já comentamos na introdução, uma pergunta clássica em Geometria Algébrica é:

Qual é a quantidade máxima de retas que uma superfície projetiva não singular de grau d em \mathbb{P}^3 contém?

Agora, já estamos prontos para saber a resposta.

Como vai essa contagem?

- $d \in \{1, 2\}$: Planos e superfícies quádricas contêm infinitas retas.
- $d = 3$: As superfícies cúbicas não singulares contêm exatamente 27 retas. A solução neste caso foi encontrada por *Cayley & Salmon* em 1849 ([6], [18]). O cálculo de tal número (de forma bastante elementar, para quem deseja se aventurar pelas trilhas da geometria enumerativa) pode ser encontrado nos textos [16] e [4].
- $d = 4$: Tais superfícies contêm no máximo 64 retas. Neste caso, é importante destacar que em 1882 *Friedrich Schur* exibiu (em [19]) uma superfície não singular de grau 4 que contém exatamente 64 retas, hoje denominada *Quártica de Schur* em sua homenagem. E somente em 1943, *Beniamino Segre*, mostrou que tais superfícies contêm no máximo 64 retas ([20]). Recentemente (2015), foi constatado um erro na abordagem utilizada por *Segre* em [20], por *Rams & Schütt*, segundo os quais, após fazer a correção nas premissas usadas por *Segre*, ele só poderia concluir que tais superfícies contêm no máximo 72 retas ([14]). De fato (em [14]), os autores corrigem o erro de *Segre* e além disso, mostram que uma superfície não singular de grau 4, definida por um polinômio com coeficientes num corpo \mathbb{K} , com característica diferente de 2 e 3, ainda contém no máximo 64 retas.
- $d \geq 5$: Ainda é um problema em aberto.

Uma das formas de abordar essa questão (no caso $d \geq 5$) é através do cálculo de cotas inferiores, ou seja, explicitar superfícies não singulares de grau d e contar as retas que tais superfícies contêm.

Por exemplo, a superfície de Fermat $x_0^d + x_1^d + x_2^d + x_3^d = 0$ contém exatamente $3d^2$ retas para todo $d \geq 3$. Logo o número procurado é maior ou igual a $3d^2$.

As superfícies de Fermat fazem parte de uma família de superfícies que podem ser construídas a partir d pontos distintos na reta projetiva, e as descrevemos a seguir.

Superfícies definidas a partir de d pontos distintos em \mathbb{P}^1 . O leitor deve ter percebido que ao considerarmos um polinômio homogêneo f no qual, por exemplo, só comparecem duas variáveis, ao escrevermos $\mathcal{Z}(f)$ podemos de fato querer determinar os zeros de f em \mathbb{P}^1 ; ou em algum outro \mathbb{P}^n para $n \geq 2$. Por este motivo, no que

segue do texto usaremos a notação $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(f)$ para indicar o cálculo dos zeros de um polinômio homogêneo f , no qual aparecem duas variáveis (não necessariamente, x_0 e x_1). E deixamos a notação $\mathcal{Z}(f)$ para indicar os zeros em \mathbb{P}^3 de polinômios homogêneos em $\mathbb{C}[x, y, z, t]$.

Construção de uma superfície a partir d pontos distintos em \mathbb{P}^1 .

A essência desta construção repousa no seguinte fato: se C for um subconjunto da reta projetiva que consiste de d pontos distintos, então existe $\phi \in \mathbb{C}[u, v]$ polinômio homogêneo¹⁸ de grau d , cujo conjunto de zeros (ou raízes) em \mathbb{P}^1 é igual ao conjunto C , ou seja, $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = C$. Por exemplo, se $C = \{[1 : \xi^j]\}_{j=1}^d$ sendo ξ uma raiz primitiva d -ésima da unidade, então $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(u^d - v^d) = C$.

A tais $\phi \in \mathbb{C}[u, v]$ faremos corresponder a superfície de grau d em \mathbb{P}^3

$$\mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t)).$$

\mathcal{S}_ϕ é não singular. Se $d = 1$, então \mathcal{S}_ϕ é um plano em \mathbb{P}^3 , logo não singular¹⁹.

Assuma que $d \geq 2$ e, suponha (por absurdo) que $p = [\alpha_0 : \alpha_1 : \beta_0 : \beta_1]$ é um ponto singular da superfície \mathcal{S}_ϕ . Assim, ao considerar $f = \phi(x, y) - \phi(z, t) \in \mathbb{C}[x, y, z, t]$ tem-se que

$$\begin{aligned} \partial_x f(p) = \partial_u \phi(\alpha_0, \alpha_1) &= 0, & \partial_y f(p) = \partial_v \phi(\alpha_0, \alpha_1) &= 0, \\ \partial_z f(p) = \partial_u \phi(\beta_0, \beta_1) &= 0, & \partial_t f(p) = \partial_v \phi(\beta_0, \beta_1) &= 0. \end{aligned}$$

Agora, segue da identidade de Euler $\partial_u \phi \cdot u + \partial_v \phi \cdot v = d \cdot \phi$ que $\phi(\alpha_0, \alpha_1) = 0$ e $\phi(\beta_0, \beta_1) = 0$. Portanto, como estamos assumindo que $p = [\alpha_0 : \alpha_1 : \beta_0 : \beta_1]$ é um ponto singular da superfície \mathcal{S}_ϕ então alguma das coordenadas de p é não nula, ou seja, $[\alpha_0 : \alpha_1] \in C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ ou $[\beta_0 : \beta_1] \in C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$.

Suponha que $[\alpha_0 : \alpha_1] \in C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$. Assim, a menos de uma reordenação no conjunto dos pontos em C , podemos escrever $\phi = L_1 \cdot L_2 \cdots L_d$ sendo $L_1 = \alpha_1 u - \alpha_0 v$ e $L_i = b_i u - a_i v$ para $i = 2, \dots, d$. Assim, tendo em consideração que $L_1(\alpha_0, \alpha_1) = 0$, concluímos que

$$(6) \quad \begin{aligned} \partial_u \phi(\alpha_0, \alpha_1) &= 0 = \alpha_1 L_2 \cdots L_d(\alpha_0, \alpha_1), \\ \partial_v \phi(\alpha_0, \alpha_1) &= 0 = -\alpha_0 L_2 \cdots L_d(\alpha_0, \alpha_1). \end{aligned}$$

Como os pontos do conjunto C são distintos e $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(L_i) = \{p_i\}$, com $p_i \neq p_j$ para todo $i \neq j$, segue que $L_2 \cdots L_d(\alpha_0, \alpha_1) \neq 0$ (visto que $p_1 = [\alpha_0 : \alpha_1]$). Assim, segue de (6) que $\alpha_0 = 0 = \alpha_1$ (o que é um absurdo). Analogamente, chegamos num absurdo ao supor que $[\beta_0 : \beta_1] \in C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$. Portanto, \mathcal{S}_ϕ não possui pontos singulares.

Esquema da contagem das retas na superfície \mathcal{S}_ϕ . Para calcularmos

$$n_\phi = \left| \left\{ \text{retas contidas em } \mathcal{S}_\phi \right\} \right|,$$

¹⁸Note que tais polinômios são unicamente determinados a menos de um múltiplo escalar não nulo. Ou seja, $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi_1) \iff \phi = \lambda \phi_1$, com $\lambda \in \mathbb{C}$ não nulo.

¹⁹Se $d = 1$ então $\phi = b_1 u - a_1 v \in \mathbb{C}[u, v]$ com $p_1 = [a_1 : b_1] \in \mathbb{P}^1$ e $\mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(b_1 x - a_1 y - b_1 z + a_1 t)$.

considere a seguinte partição do conjunto das retas contidas na superfície \mathcal{S}_ϕ .

$$(7) \quad \left\{ \ell \mid \ell \stackrel{\text{reta}}{\subset} \mathcal{S}_\phi \right\} = \underbrace{\left\{ \ell \mid \ell \cap L \neq \emptyset \right\}}_{\mathcal{L}_\phi} \cup \underbrace{\left\{ \ell \mid \ell \cap L = \emptyset \right\}}_{\mathcal{L}'_\phi}$$

sendo $L = \mathcal{Z}(z, t) \subset \mathbb{P}^3$.

A seguir, assumamos que $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \left\{ [a_i : b_i] \right\}_{i=1}^d$ e considere os pontos p_1, \dots, p_d e q_1, \dots, q_d em \mathbb{P}^3 dados por $p_i = [a_i : b_i : 0 : 0]$ e $q_i = [0 : 0 : a_i : b_i]$.

Pontos chave para determinar n_ϕ .

Denotemos por $\ell_{i,j}$ a reta que passa pelos pontos p_i e q_j .

(i) A reta $\ell_{i,j}$ está contida na superfície \mathcal{S}_ϕ para todo i, j .

(ii) $\mathcal{L}_\phi = \left\{ \ell_{i,j} \mid i, j \in \{1, \dots, d\} \right\}$. Logo, $|\mathcal{L}_\phi| = d^2$.

(iii) $|\mathcal{L}'_\phi| = d|\Gamma_C|$, sendo $C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ e $\Gamma_C = \left\{ \mathbf{T} \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1) \mid \mathbf{T}(C) = C \right\}$.

Portanto,

$$n_\phi = d^2 + d|\Gamma_C|.$$

Linhas para demonstrar que $n_\phi = d^2 + d|\Gamma_C|$. A seguir demonstraremos as afirmações (i) e (ii) que fazem parte do esquema de contagem das retas na superfície \mathcal{S}_ϕ . Entretanto, para o item (iii) só faremos um esboço com as principais ideias que são usadas para chegar nesse resultado. Para mais detalhes, consultar a dissertação [22].

Considere $\mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(\phi(x, y) - \phi(z, t))$ não singular de grau d tal que $\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \left\{ [a_i : b_i] \right\}_{i=1}^d$. Seja $\ell_{i,j} \subset \mathbb{P}^3$ a reta determinada por $p_i = [a_i : b_i : 0 : 0]$ e $q_j = [0 : 0 : a_j : b_j]$, com $i, j \in \{1, \dots, d\}$.

Afirmção 1: $\ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi$.

Se $p \in \ell_{i,j}$, então $p = [u_0 a_i : u_0 b_i : u_1 a_j : u_1 b_j]$ com $u_0, u_1 \in \mathbb{C}$ não ambos nulos. Assim, se $f = \phi(x, y) - \phi(z, t)$, tem-se que

$$f(p) = u_0^d \phi(a_i, b_i) - u_1^d \phi(a_j, b_j) = 0, \text{ pois } \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi) = \left\{ [a_i : b_i] \right\}_{i=1}^d \implies p \in \mathcal{S}_\phi.$$

Afirmção 2: $\mathcal{L}_\phi := \left\{ \ell \subset \mathcal{S}_\phi \mid \ell \cap L \neq \emptyset \right\} = \left\{ \ell_{i,j} \mid i, j \in \{1, \dots, d\} \right\}$. Logo, $|\mathcal{L}_\phi| = d^2$.

Observe que $p_i \in \ell_{i,j} \cap L$, logo $\ell_{i,j} \in \mathcal{L}_\phi$ (visto que $\ell_{i,j} \subset \mathcal{S}_\phi$). A outra inclusão é consequência da Proposição que mostraremos a seguir.

Proposição 4.1. *Sejam $L = \mathcal{Z}(z, t)$ e $M = \mathcal{Z}(x, y)$ retas em \mathbb{P}^3 . Se ℓ é uma reta contida na superfície \mathcal{S}_ϕ com $d \geq 2$, então*

$$\ell \cap M \neq \emptyset \iff \ell \cap L \neq \emptyset.$$

Demonstração. Considere $f = \phi(x, y) - \phi(z, t)$ de grau $d \geq 2$ tal que $\mathcal{S}_\phi = \mathcal{Z}(f) \subset \mathbb{P}^3$. A seguir mostraremos a implicação direta, sendo a recíproca análoga.

Assuma que $\ell = \mathbb{P}(W)$. Como M não está contida em \mathcal{S}_ϕ e $\ell \cap M \neq \emptyset$, então $\ell \cap M = \{[w_M]\}$ para algum $w_M \in W$. A seguir, escolha $v \in \mathbb{C}^4$ tal que $\{w_M, v\}$ seja uma base de W . Note que podemos escrever de forma única $v = v_L + v_M$, com $[v_M] \in M$ e $[v_L] \in L$.

Suponha que $\{w_M, v_M\}$ é L.I. Assim, $w_M = (0, 0, \alpha, \beta)$ e $v_M = (0, 0, \gamma, \delta)$ com $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$. A seguir, considere $T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^2)$ dada por $T(x, y) = (\alpha x + \gamma y, \beta x + \delta y)$. Agora, como $\ell \subset \mathcal{S}_\phi$ e todo ponto da reta ℓ é da forma $[u_0 w_M + u_1 (v_L + v_M)]$ com $u = [u_0 : u_1] \in \mathbb{P}^1$, temos que:

$$\begin{aligned} f(u_0 w_M + u_1 (v_L + v_M)) = 0 &\iff u_1^d \phi(v_L) = \phi(u_0 w_M + u_1 v_M) \\ &\iff u_1^d \phi(v_L) = \phi(T(u_0, u_1)) \\ &\iff \lambda(\alpha y - \beta x)^d \phi(v_L) = \phi(x, y) \\ &\quad \text{com } \lambda = (\alpha\delta - \gamma\beta)^{-d} \text{ e } (x, y) = T(u_0, u_1). \end{aligned}$$

Analisando a última igualdade chegamos a um absurdo. De fato, se $\phi(v_L) = 0$ então $\phi = 0$, do contrário temos que ϕ não é livre de quadrados (o que não ocorre pois \mathcal{S}_ϕ é não singular de grau $d \geq 2$).

Portanto, $\{w_M, v_M\}$ é L.D., logo $v_M = \lambda w_M$, para algum $\lambda \neq 0$. Agora, tendo em consideração que $\{w_M, v = v_L + v_M\}$ é base de W , concluímos que v_L é não nulo. Note que $v_L = v - \lambda w_M \in W$ é não nulo, logo determina o ponto $[v_L] \in \ell \cap L$. ■

Corolário 4.1. *Se ℓ for uma reta contida na superfície \mathcal{S}_ϕ tal que $\ell \cap L \neq \emptyset$, então $\ell = \ell_{i,j}$ para algum $i, j \in \{1, \dots, d\}$.*

Demonstração. Como a reta L não está contida na superfície \mathcal{S}_ϕ , então $L \neq \ell$. Assim, $\ell \cap L$ consiste de um único ponto $p = [a : b : 0 : 0]$ com a e b complexos não ambos nulos. Entretanto, a condição $\ell \subset \mathcal{S}_\phi$ nos leva à conclusão $\phi(a, b) = 0$. Assim, $p = p_i$ para algum i .

Por outro lado, a Proposição 4.1 implica em $\ell \cap M \neq \emptyset$. Como a reta M também não está contida em \mathcal{S}_ϕ , o raciocínio anterior nos permite concluir que $\ell \cap M = \{q_j\}$ para algum j . Portanto, $\ell = \ell_{i,j}$ (ou seja, ℓ é determinada pelos pontos p_i e q_j). ■

Corolário 4.2. *Com as notações em (7). Tem-se que $|\mathcal{L}_\phi| = d^2$ e $n_\phi = d^2 + |\mathcal{L}'_\phi|$.*

Afirmção 3: $|\mathcal{L}'_\phi| = d|\Gamma_C|$, sendo $C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ e

$$\Gamma_C = \left\{ \mathbf{T} \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1) \mid \mathbf{T}(C) = C \right\}.$$

A ideia chave para demonstrar a Afirmção 3 é associar a cada reta $\ell \in \mathcal{L}'_\phi$ a um automorfismo em Γ_C , como faremos a seguir.

Proposição 4.2. *Se $\ell \in \mathcal{L}'_\phi$, então ℓ induz um automorfismo $\mathbf{T}_\ell \in \Gamma_C$, no qual $C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$.*

Demonstração. Sendo ℓ uma reta em \mathbb{P}^3 , existem f_1 e f_2 homogêneos de grau 1 e L.I. tais que $\ell = \mathcal{Z}(f_1, f_2)$. Se $f_i = a_i x + b_i y + c_i z + d_i t$, então $\ell \cap L = \mathcal{Z}(f_1, f_2, z, t) = \mathcal{Z}(a_1 x + b_1 y, a_2 x + b_2 y, z, t)$. Agora, a condição $\ell \cap L = \emptyset$ assegura que o sistema $a_1 x + b_1 y = 0, a_2 x + b_2 y = 0$, possui solução única $x = y = 0$, e portanto $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$. Assim, podemos escolher para ℓ equações da forma:

$x = \alpha z + \beta t$ e $y = \gamma z + \delta t$, com α, β, γ e δ em \mathbb{C} . Além disso, a condição $\ell \cap M = \emptyset$ (Proposição 4.1) nos garante que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Assim, obtemos $\mathbf{T}_\ell \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ dada por $[z : t] \mapsto [\alpha z + \beta t : \gamma z + \delta t]$. Observe que $[\alpha c + \beta d : \gamma c + \delta d : c : d] \in \ell$ para todo $[c : d] \in \mathbb{P}^1$. Entretanto, se considerarmos $[c : d] \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$ (neste caso $\phi(c, d) = 0$) concluímos que $\phi(\alpha c + \beta d, \gamma c + \delta d) = 0$, pois $\ell \subset \mathcal{S}_\phi$. Portanto, $\mathbf{T}_\ell([c : d]) \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$. Finalmente, como \mathbf{T}_ℓ é uma bijeção e $|\mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)| = d$, o resultado segue. ■

Proposição 4.3. *Notações como na Proposição 4.2. A função $\Omega : \mathcal{L}'_\phi \rightarrow \Gamma_C$ dada por $\ell \mapsto \mathbf{T}_\ell$ é sobrejetora e $|\Omega^{-1}(\mathbf{T})| = d$ para todo $\mathbf{T} \in \Gamma_C$.*

Demonstração. Considere $\mathbf{T} \in \Gamma_C$ dado por $\mathbf{T}([z : t]) = [\alpha z + \beta t : \gamma z + \delta t]$.

O primeiro passo é associar ao automorfismo \mathbf{T} a superfície quádrlica

$$Q_{\mathbf{T}} = \mathcal{Z}(x(\gamma z + \delta t) - y(\alpha z + \beta t)) \subset \mathbb{P}^3.$$

A seguir, citamos (sem demonstrar) os fatos essenciais que relacionam a superfície quádrlica $Q_{\mathbf{T}}$ com a contagem das retas na superfície \mathcal{S}_ϕ .

Fato 1: $Q_{\mathbf{T}}$ é uma superfície quádrlica não singular.²⁰

Sabe-se que toda superfície quádrlica não singular em \mathbb{P}^3 possui exatamente duas famílias de retas (p. 66 e 67 em [1], p. 406 em [7]). No caso da superfície quádrlica $Q_{\mathbf{T}}$ essas famílias são dadas por:

Família \mathcal{L} : Para cada $y = [c : d] \in \mathbb{P}^1$, \mathcal{L}_y é definida pelas equações:

$$(8) \quad (\gamma c + \delta d)x - (\alpha c + \beta d)y = 0 \quad \text{e} \quad dz - ct = 0.$$

Família \mathcal{M} : Para cada $x = [a : b] \in \mathbb{P}^1$, \mathcal{M}_x é definida pelas equações:

$$(9) \quad ax = b(\alpha z + \beta t) \quad \text{e} \quad ay = b(\gamma z + \delta t).$$

Note que $\mathcal{M}_{[0:1]} = L = \mathcal{Z}(z, t)$ e $\mathcal{M}_{[1:0]} = M = \mathcal{Z}(x, y)$.

Fato 2: *Seja \mathcal{L} a família de retas em (8). Temos que:*

(i) $\mathcal{L}_y \cap M \neq \emptyset$ para todo $y \in \mathbb{P}^1$.

(ii) $\mathcal{L}_y \subset \mathcal{S}_\phi$ se, e somente se, $y \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$. Assim, existem d retas (distintas) da família \mathcal{L} contidas em $Q_{\mathbf{T}} \cap \mathcal{S}_\phi$ (visto que $\mathcal{L}_y \in \mathcal{L}_\phi$).

Fato 3: *Existem exatamente d retas da família \mathcal{M} (em (9)) contidas em $Q_{\mathbf{T}} \cap \mathcal{S}_\phi$ e tais retas pertencem a $\Omega^{-1}(\mathbf{T})$.*

Fato 4: *Sejam L_0, \dots, L_{d-1} e M_0, \dots, M_{d-1} as únicas retas da família \mathcal{L} e \mathcal{M} , respectivamente, contidas em $\mathcal{S}_\phi \cap Q_{\mathbf{T}}$. Então*

$$\mathcal{S}_\phi \cap Q_{\mathbf{T}} = L_0 \cup \dots \cup L_{d-1} \cup M_0 \cup \dots \cup M_{d-1}.$$

Observe que o Fato 3 nos garante que Ω é sobrejetora e $|\Omega^{-1}(\mathbf{T})| \geq d$.

²⁰Note que o sistema $\partial_x Q_{\mathbf{T}} = \gamma z + \delta t = 0$, $\partial_y Q_{\mathbf{T}} = -(\alpha z + \beta t) = 0$, $\partial_z Q_{\mathbf{T}} = \gamma x - \alpha y = 0$, $\partial_t Q_{\mathbf{T}} = \delta x - \beta y = 0$, só admite a solução trivial $x = y = z = t = 0$, pois $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Se $\ell \in \Omega^{-1}(\mathbf{T})$ então $\mathbf{T}_\ell = \mathbf{T}$, e a partir de (i) na Proposição 3.2 concluímos que $Q_{\mathbf{T}_\ell} = Q_{\mathbf{T}}$, que implica em $\ell \subset Q_{\mathbf{T}} \cap \mathcal{S}_\phi$ com $\ell \in \mathcal{L}'_\phi$. Como $\{M_0, \dots, M_{d-1}\}$ são as únicas retas que pertencem a \mathcal{L}'_ϕ e estão contidas em $Q_{\mathbf{T}} \cap \mathcal{S}_\phi$, a partir do Fato 4 concluímos que $\ell \in \{M_0, \dots, M_{d-1}\}$. ■

Corolário 4.3. *Verifica-se que $|\mathcal{L}'_\phi| = d|\Gamma_C|$ com $C = \mathcal{Z}_{\mathbb{P}^1}(\phi)$.*

Demonstração. A sobrejetividade de Ω nos garante que $\mathcal{L}'_\phi = \bigcup_{\mathbf{T} \in \Gamma_C} \Omega^{-1}(\mathbf{T})$, sendo esta união disjunta (e finita), conclui-se que $|\mathcal{L}'_\phi| = \sum_{\mathbf{T} \in \Gamma_C} |\Omega^{-1}(\mathbf{T})| = d|\Gamma_C|$. ■

Sobre a estimativa do valor máximo de n_ϕ . Tendo em consideração que $n_\phi = d^2 + d|\Gamma_C|$, segue-se que o valor máximo de n_ϕ depende da ordem do subgrupo Γ_C , ou de forma mais explícita, das escolhas de d pontos distintos em \mathbb{P}^1 .

Sobre o valor máximo de $|\Gamma_C|$. Lembre que $|C| = d \geq 3$. De acordo com a paridade de d , temos:

- d ímpar: A Proposição 3.1 nos garante que: $|\Gamma_C| \leq d$ se Γ_C for cíclico, caso contrário $\Gamma_C \cong D_k$ com $k \leq d$. Portanto, para d ímpar o valor máximo de $|\Gamma_C|$ é $2d$ (basta escolher $C = \{[1 : \xi^j]\}_{j=1}^d$, sendo ξ uma raiz primitiva d -ésima da unidade).
- d par: Segue da Proposição 3.1 e do Teorema de Classificação de Klein que o valor máximo de $|\Gamma_C|$ pertence ao conjunto $\{2d, 12, 24, 60\}$. Assim, para $d \geq 30$ o valor máximo de $|\Gamma_C|$ é $2d$. Agora, vamos analisar o caso d par, para $4 \leq d \leq 28$. Note que, o Teorema de Classificação de Klein (**TCK**) nos garante que $\Gamma_C \cong G$ com $G \in \{D_k, A_4, S_4, A_5\}$ ²¹. Neste caso, segue de (4) e (5) que:

$$(10) \quad \begin{array}{|c|c|} \hline G & d = \alpha n_1 + \beta n_2 + \gamma n_3 + \delta |G| \\ \hline D_k & d = \alpha k + \beta k + \gamma 2 + \delta 2k \\ \hline A_4 & d = \alpha 6 + \beta 4 + \gamma 4 + \delta 12 \\ \hline S_4 & d = \alpha 12 + \beta 8 + \gamma 6 + \delta 24 \\ \hline A_5 & d = \alpha 30 + \beta 20 + \gamma 12 + \delta 60 \\ \hline \end{array}$$

com $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\}$ e $\delta \geq 0$ inteiro.

Se considerarmos somente o grupo diedral de ordem máxima, ao qual Γ_C pode ser isomorfo, segue do item (ii) na Proposição 3.1 e da tabela em (10) que:

$$(11) \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 \leq d \leq 28 \text{ par} & \Gamma_C \text{ pode ser isomorfo a} & \text{ordem máxima de } \Gamma_C \\ \hline d = 4 & A_4, D_4 & 12 \\ \hline d \in \{6, 8\} & D_d, A_4, S_4 & 24 \\ \hline d = 10 & D_{10}, A_4 & 20 \\ \hline d = 12 & D_{12}, A_4, S_4, A_5 & 60 \\ \hline d \neq 20, 14 \leq d \leq 28 & D_d, A_4, S_4 & 2d \\ \hline d = 20 & D_{20}, A_5 & 60 \\ \hline \end{array}$$

²¹Ao procurarmos o valor máximo de $|\Gamma_C|$, descartamos o caso em que Γ_C é cíclico.

Por simplicidade, no que segue do texto usaremos a notação: $\infty = [0 : 1]$ e $a = [1 : a]$ com $a \in \mathbb{C}$.

$d = 4$ A partir de (11) temos que $\Gamma_C \cong D_4$ ou $\Gamma_C \cong A_4$. Se escolhermos $C = \{0, 1, \omega, \omega^2\}$, sendo ω raiz cúbica primitiva da unidade. Tem-se que $[u : v] \mapsto [\omega u : v]$ é um elemento de ordem 3 de Γ_C , logo $\Gamma_C \cong A_4$ e a ordem máxima é 12.

Para os outros valores de d , nos remetemos a citar a escolha do conjunto C tal que $|\Gamma_C|$ atinge o valor máximo listado em (11).

$d = 6$ Considere $C = \{\infty, 0, 1, i, -1, -i\}$ sendo $i \in \mathbb{C}$ raiz quarta primitiva da unidade.

$d = 8$ Considere $C = \{\kappa, i\kappa, -\kappa, -i\kappa, \kappa^{-1}, i\kappa^{-1}, -\kappa^{-1}, -i\kappa^{-1}\}$, sendo $\kappa \in \mathbb{C}$ uma raiz da equação $x^2 - (i+1)x - i = 0$.

$d = 10$ Considere C sendo o conjunto das raízes 10-ésimas da unidade.

$d = 12$ Seja ω raiz quinta primitiva da unidade, $\theta = \omega^3 + \omega^2$ e considere $C = \{\infty, 0, \theta, \theta\omega, \theta\omega^2, \theta\omega^3, \theta\omega^4, -\theta^{-1}, -\theta^{-1}\omega, -\theta^{-1}\omega^2, -\theta^{-1}\omega^3, -\theta^{-1}\omega^4\}$.

$d \neq 20, 14 \leq d \leq 28$ par. Considere C sendo o conjunto das raízes d -ésimas da unidade.

$d = 20$ Veja [22].

Assim, se $N_d = n_\phi$ com ϕ de grau d escolhido de modo que $|\Gamma_C|$ tenha a maior ordem possível, então tem-se que:

$$(12) \quad \begin{cases} N_d = 3d^2, & \text{se } d \notin \{4, 6, 8, 12, 20\}, \\ N_4 = 64, N_6 = 180, N_8 = 256, N_{12} = 864 \text{ e } N_{20} = 1600. \end{cases}$$

Agradecimentos. Agradecemos a *Samuel Boissière* (Laboratoire de Mathématiques et Applications - Université de Poitiers) e a *Alessandra Sarti* (LMA - Université de Poitiers) pela disponibilidade em nos ajudar na compreensão deste belo assunto. E ao professor *Marivaldo Pereira Matos* (DM-UFPB), pela leitura do texto original. E de forma muito especial ao revisor pelas sugestões e comentários que foram de fundamental importância para o aprimoramento desse texto.

REFERÊNCIAS

- [1] Ramón Orestes Mendoza Ahumada e Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia, *Álgebra Linear e o Problema das quatro retas do Cálculo de Schubert*, Revista Matemática Universitária, **45**, pp. 55–69, 2009.
- [2] Mark Anthony Armstrong, *Groups and symmetry*, Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [3] Michael Artin, *Algebra*, Pearson, 2010.
- [4] Cibelle de Fátima Castro de Assis, *As 27 Retas Sobre uma Superfície Cúbica não Singular*, Dissertação de Mestrado, DM-UFPB, 2004.
- [5] Samuel Boissière e Alessandra Sarti, *Counting lines on surfaces*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 5, pp. 39–52, 2007.
- [6] Arthur Cayley, *On the triple tangent planes of surfaces of the third order*, Cambridge and Dublin Math. J., **4**, pp. 118–138, 1849.

- [7] David Vassall Cox, John Little e Donal O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [8] Igor V. Dolgachev, *McKay correspondence*, <http://www.math.lsa.umich.edu/~idolga/McKaybook.pdf>, 2009. Acessado em 03/08/2020.
- [9] Leonhard Paul Euler, *Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile*, Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Volume 15, pp. 75–106, 1771, reimpresso em L. Euleri Opera Omnia, 1st series, Vol. 6, pp. 287–315.
- [10] Arnaldo Garcia e Yves Lequain, *Elementos de Álgebra*, Projeto Euclides, IMPA, 2003.
- [11] Christian Felix Klein, *Lectures on the Icosahedron and the Solution of Equations of Fifth Degree*, Dover, New York, 1956.
- [12] Eugene Klotz, *Os Sólidos Platônicos*, <https://youtu.be/bZvVwXb0Ejw>. Acessado em 29/03/2021.
- [13] Graham J. Leuschke e Roger Wiegand, *Cohen-Macaulay representations* Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 181. American Mathematical Society. Providence, RI, 2012.
- [14] Sławomir Rams e Matthias Schütt, *64 Lines on smooth quartic surfaces*, Math. Ann. 362, no. 1-2, pp. 679–698, 2015.
- [15] Eduardo Francisco Rêgo, *Tópicos de Geometria*, <http://cmup.fc.up.pt/cmup/eerego/TG.pdf>, 2004. Acessado em 29/03/2021.
- [16] Miles Anthony Reid, *Undergraduate Algebraic Geometry*, Cambridge University Press, London Mathematical Society Student Texts 12, 1988.
- [17] Benjamin Olinde Rodrigues, *Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire*, Journal de Mathématiques 5, pp. 380–440, 1840.
- [18] George Salmon, *On the triple tangent planes of surfaces of the third order*, Cambridge and Dublin Math. J., 4, pp. 252–260, 1849.
- [19] Friedrich Heinrich Schur, *Ueber eine besondere Classe von Flächen vierter Ordnung*, Math. Ann. 20, pp. 254–296, 1882.
- [20] Beniamino Segre, *The maximum number of lines lying on a quartic surface*, Quart. J. Math. Soc. (2) 49, pp. 86–96, 1943.
- [21] Javier Carrasco Serrano, *Finite Subgroups of $SL(2, \mathbb{C})$ and $SL(3, \mathbb{C})$* , http://homepages.warwick.ac.uk/~masda/McKay/Carrasco_Project.pdf, Warwick, 2014. Acessado em 29/03/2021.
- [22] Sally Andria Vieira da Silva, *Sobre o número máximo de retas em superfícies no espaço projetivo \mathbb{P}^3* , Dissertação de Mestrado, DM–UFPB, 2016. <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/9272/2/arquivototal.pdf> Acessado em 29/03/2021.
- [23] Hermann Klaus Hugo Weyl, *Symmetry*, Princeton University Press, 1952.

CCEN - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - UFPB
CIDADE UNIVERSITÁRIA - JOÃO PESSOA - PB
58051-900
Email address: jfra@academico.ufpb.br

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA -UFF
SÃO DOMINGOS - NITERÓI - RJ
24210-200
Email address: sally_andria@id.uff.br