

PADRÕES ESPECIAIS DE DISTRIBUIÇÃO DOS NÚMEROS PRIMOS: O n -QUADRADO ZETA

JORGE A. J. AVILA, ELIELSON D. MOREIRA, BIANCA F. GUIMARÃES

RESUMO. A busca por padrões de números primos, isto é, saber como os números primos estão distribuídos entre os números naturais, sempre foi e será um dos desafios mais fascinantes da matemática. Este trabalho apresenta um novo arranjo dos números naturais, sobre um quadrado, para identificar padrões especiais de distribuição dos números primos. Por ter características específicas é chamado de n -quadrado Zeta. Nele, é possível encontrar sequências “longas” de números primos (caminhos). Foram estudados dois tipos de caminhos: diagonal e vertical, e modelados por polinômios de 2º grau. Uma atenção especial foi dada ao caminho vertical \mathcal{V}_{41} por possuir grande quantidade de números primos. Surpreendentemente, o polinômio v_{41} , o qual modela o caminho vertical \mathcal{V}_{41} , resultou ser uma translação do polinômio de Euler. Finalmente, fizemos uma comparação do perfil do polinômio de Euler, tanto na espiral de Ulam, quanto no n -quadrado Zeta.

1. INTRODUÇÃO

A seguir, apresentamos alguns resultados preliminares.

Definição 1.1 (Número Primo). Seja $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$. Dizemos que p é um número primo se ele tem como únicos divisores positivos o 1 e ele mesmo.

Conjunto dos Números Primos: $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots\}$

Teorema 1.1. *A série Harmônica generalizada*

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$$

é convergente se $x > 1$ e divergente se $x \leq 1$.

Data de aceitação: 2 de maio de 2022.

Palavras chave. Números Primos, n -quadrado Zeta, Espiral de Ulam, Polinômio de Euler, Polinômio v_{41} .

Definição 1.2 (Igualdade Assintótica). Sejam f e g funções reais de variável real.

$$(2) \quad f(x) \sim g(x) \iff \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 1$$

onde, $f(x) \sim g(x)$ lê-se: $f(x)$ é assintoticamente igual a $g(x)$.

Definição 1.3 (“grande O”). Sejam f e g funções reais de variável real. $f(x)$ é “grande O” de $h(x)$, denotamos por $f(x) = O(h(x))$, se $\exists C > 0$ e um $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x)| \leq C|h(x)|, \quad \forall x \geq x_0$$

Definição 1.4 (Função Geradora de Números Primos). Dizemos que $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ é uma função geradora de números primos se $f(n) \in \mathbb{P}$, para algum $n \in \mathbb{Z}$.

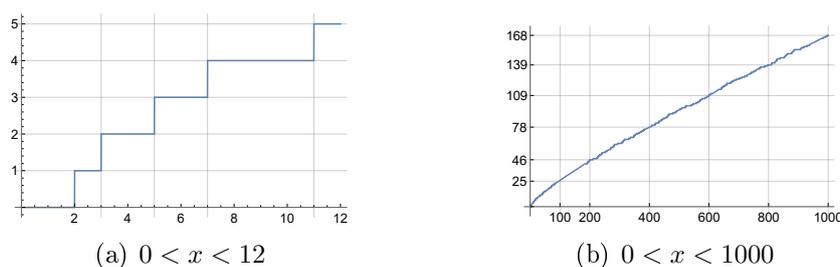
Definição 1.5 (Função Contagem de Primos).

$$\pi(x) = \#\{p \in \mathbb{P} : p \leq x\}, \quad x > 0$$

onde, $\#$ denota o cardinal de um conjunto.

Na Figura 1 apresentamos o gráfico de $\pi(x)$.

FIGURA 1. Gráfico da função $\pi(x)$.



Fonte: Os autores (2022).

Definição 1.6 (Quantidade de Números Primos de uma Função f até n).

$$(3) \quad \pi_f(n) = \#\{p \in \mathbb{P} : f(k) = p, 0 < k \leq n\}$$

Em Teoria dos números, um dos conceitos essenciais para alavancar a matemática são os números primos. Eles são os responsáveis por muitos problemas em aberto, ou não resolvidos, nas diferentes áreas da matemática.

1.1. Breve História dos Números Primos.

◦ *Euclides de Alexandria* (Alexandria, 330 - 277 a.C.).

Teorema 1.2 (Teorema de Euclides). *O conjunto dos números primos é infinito.*

Demonstração. Uma prova é encontrada nos Elementos (Livro IX, Proposição 20).

◦ *Eratóstenes de Cirene* (Cirene, 276 - Alexandria, 194 a.C.). Obteve os números primos até um valor de n usando tabelas que continham alguns números naturais. O processo consistia em eliminar múltiplos de números: primeiro do 2, depois do 3, e assim sucessivamente. Os primos eram aqueles números que restaram após a eliminação. Essa tabela ficou conhecida como “Crivo de Eratóstenes”.

◦ *Pierre de Fermat* (França, 1601 - 1665).

Definição 1.7 (Primos de Fermat).

$$F_n = 2^{2^n} + 1 \in \mathbb{P}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Observação 1.

(a) Os quatro primeiros primos de Fermat são:

$$F_0 = 3, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 17, \quad F_3 = 257, \quad F_4 = 65.537$$

(b) Em 1732, foi provado que F_5 é composto:

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297 = 641 \times 6.700.417$$

◦ *Marin Mersenne* (França, 1588 - 1648).

Definição 1.8 (Primos de Mersenne).

$$M_p = 2^p - 1 \in \mathbb{P}, \quad p \in \mathbb{P}$$

Observação 2.

(a) Os cinco primeiros primos de Mersenne são:

$$M_2 = 3, \quad M_3 = 7, \quad M_5 = 31, \quad M_7 = 127, \quad M_{13} = 8.191$$

(b) O maior primo de Mersenne até 03/03/2022 é: o 51º primo de Mersenne:

$$M_{82.589.933} = 2^{82.589.933} - 1$$

com 24.862.048 dígitos. (21 de dezembro de 2018, GIMPS).

(c) A Infinitude dos primos de Mersenne é um problema em aberto.

◦ *Leonhard Paul Euler* (Suíça, 1707 - Rússia, 1783). Em 1732, provou que F_5 é um número composto, e em 1737, apresentou uma fórmula que relaciona os números primos com a série Harmônica generalizada.

Teorema 1.3 (Fórmula do Produto de Euler).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-x}}, \quad (x > 1)$$

◦ *Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet* (Alemanha, 1805 - 1859). O teorema de Dirichlet, sobre Progressão Aritmética (PA), conjecturado por Adrien-Marie Legendre (França, 1752 - 1833), foi provado por Dirichlet em 1837.

Teorema 1.4 (Teorema de Dirichlet). *Sejam a, b inteiros positivos. Se a e b são coprimos, então existem infinitos números primos da forma $a + nb$, onde n é um inteiro positivo.*

O teorema de Dirichlet pode expressar-se, também, da seguinte forma:

- (a) Sejam a, b inteiros positivos. Se a e b são coprimos, então existem infinitos números primos p tal que $p \equiv a \pmod{b}$.
- (b) Sejam a, b inteiros positivos. Se a e b são coprimos, então a PA: $a + nb$ possui infinitos números primos.

- (c) Sejam a, b inteiros positivos. Se a e b são coprimos, então o conjunto dos números primos p , com $p \equiv a \pmod{b}$, tem densidade de Dirichlet $1/\varphi(b)$.

No item (c), φ é a função totiente de Euler, e essa formulação é as vezes conhecida como: “O teorema da densidade de Dirichlet”. A *densidade de Dirichlet ou analítica* de um conjunto S é definida pelo limite

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\sum_{p \in S} (1/p^x) / \sum_{p \in \mathbb{P}} (1/p^x) \right)$$

e a *densidade natural* de um conjunto S é definida pelo limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\#\{p \leq x : p \in \mathbb{P} \text{ e } p \in S\}}{\#\{p \leq x : p \in \mathbb{P}\}}$$

O seguinte resultado relaciona estas duas densidades: “Se S tem densidade natural k , então a densidade analítica existe e é igual a k ”, (veja [15], pg. 76). Segundo [17], o teorema da densidade de Dirichlet, apresenta um padrão bastante intuitivo. Por exemplo, ao classificarmos os números primos de 1 até 100 de acordo com seu último dígito, não par maior que 2, teremos os seguintes grupos de primos:

$$\begin{array}{l|l} 1 & 11, 21, 31, 41, 61, 71 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3, 13, 23, 43, 53, 73, 83 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 5 & 5 \\ 7 & 7, 17, 37, 47, 67, 97 \\ 9 & 19, 29, 59, 79, 89 \end{array}$$

Os grupos que terminam em 1, 3, 7 e 9 têm, aproximadamente, a mesma quantidade de primos. Nesse sentido, podemos pensar que a quantidade de primos, em cada grupo, poderia ser infinita, se considerarmos uma quantidade infinita de números. Na verdade, esses grupos de primos são subconjuntos das classes residuais [1], [3], [7] e [9] módulo 10, respectivamente. Por outro lado, os números naturais menores e coprimos de 10 são: 1, 3, 7 e 9, e a quantidade deles é determinada por $\varphi(10) = 4$. Agora, para $x = 100$, considere o seguinte quociente:

$$(4) \quad \frac{\#\{p \leq x : p \in \mathbb{P} \text{ e } p \in [1]\}}{\#\{p \leq x : p \in \mathbb{P}\}} = \frac{6}{25} = 0,24 \approx \frac{1}{4} = \frac{1}{\varphi(10)}$$

Procedendo de forma análoga, o quociente $1/\varphi(10)$ se repete nos outros três grupos de primos. Se x tende-se ao infinito, (4) seria a densidade natural do conjunto [1] com valor $1/\varphi(10)$. No limite, o denominador é infinito (Teorema 1.2). Assim, o numerador (a quantidade de primos do grupo que termina em 1) é infinito. Note que a densidade analítica de [1] também é $1/\varphi(10)$. Portanto, esse resultado representa o teorema da densidade de Dirichlet, para o caso $b = 10$.

A prova analítica do teorema de Dirichlet, utilizada pelo mesmo, baseou-se na sua própria teoria de caracteres e L -funções, [15].

Ainda que, os números primos possuam uma definição bem simples, o grande problema é sua distribuição dentre os números naturais.

1.2. Teorema do Número Primo (TNP). Com a finalidade de encontrar resultados que determinem o comportamento dos números primos dentre o conjunto dos números naturais, o comportamento assintótico da quantidade de números primos despertou interesse na comunidade matemática. Uma formulação assintótica para a quantidade dos números primos é conhecida como Teorema do Número Primo (TNP). A seguir descreveremos, brevemente, alguns fatos históricos do TNP.

◦ *Carl Friedrich Gauss* (Alemanha, 1777 - 1855). Entre os 15 e 16 anos de idade, Gauss conjecturou a primeira versão do TNP.

Conjetura 1.1 (TNP, 1792/1793).

$$(5) \quad \pi(x) \sim x / \ln x$$

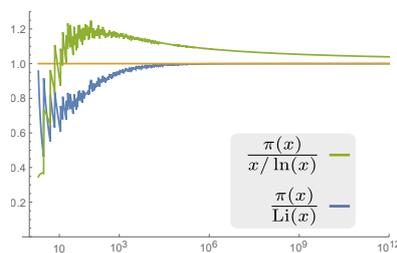
Em 1849, Gauss escreveu uma carta a seu amigo, o astrônomo Johann Encke, onde explica a segunda versão de seu TNP. Ele utiliza a função Integral Logarítmica, definida por $\text{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \text{li}(x) - \text{li}(2)$, onde $\text{li}(x) := \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$.

Conjetura 1.2 (TNP, 1849).

$$(6) \quad \pi(x) \sim \text{Li}(x)$$

Na Figura 2 apresentamos o gráfico das funções: $\frac{\pi(x)}{x/\ln(x)}$ e $\frac{\pi(x)}{\text{Li}(x)}$, $1 < x \leq 10^{12}$, com o domínio em escala logarítmica. Note que o limite, quando x tende ao infinito de ambas funções, é 1. Confirmando que, nesse intervalo, as conjecturas de Gauss são verdadeiras.

FIGURA 2. Confirmação computacional das conjecturas de Gauss.



Fonte: Os autores (2022).

◦ *Adrien-Marie Legendre* (França, 1752 - 1833).

Conjetura 1.3 (TNP, 1798).

$$(7) \quad \pi(x) \sim x / (A \ln x - B)$$

Em 1808, Legendre, apresentou os valores $A = 1$ e $B = 1,08366$ para sua conjectura.

◦ *Pafnuti Tchebychev* (Russia, 1821 - 1894). Tchebychev propôs $B = 1$ na conjectura de Legendre. Apresentou uma prova do seguinte teorema como uma tentativa de se aproximar à demonstração do TNP.

Teorema 1.5 (Tchebychev, 1852).

$$(8) \quad 0,92129 < \pi(x)/(x/\ln(x)) < 1,10555$$

◦ *Jacques Hadamard* (França, 1865 - 1963) e *Charles-Jean de La Vallée Poussin* (Bélgica, 1866 - 1962). Eles, independentemente, demonstraram o TNP em 1896.

Teorema 1.6 (TNP, 1896).

$$(9) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \pi(x)/(x/\ln(x)) = 1$$

Outra forma de se obter relações assintóticas para a quantidade de números primos é através da Função Riemann de Contagem de Primos.

Definição 1.9 (Função Riemann de Contagem de Primos). Seja μ a função de Möbius.

$$(10) \quad \text{Ri}(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \text{li}(x^{1/n})$$

Riemann, também, estudou a aproximação assintótica de $\pi(x)$. Conjeturou que

$$(11) \quad \pi(x) \sim \text{Ri}(x) - \sum_{\rho} \text{Ri}(x^{\rho})$$

onde, ρ são os zeros não triviais da função Zeta de Riemann. Por outro lado, existe uma fórmula mais tratável, em questão de cálculos numéricos, para trabalhar no lugar da função de Riemann. Em 1893, Jørgen Gram, apresentou a série:

$$(12) \quad G(x) := 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k k! \zeta(k+1)} (\ln x)^k \approx \text{Ri}(x)$$

Encontrar padrões, nos números primos, que descrevam seu comportamento tem sido tema de pesquisa e assunto de problemas em aberto.

1.3. Problemas em Aberto em Teoria dos Números. Descreveremos três problemas em aberto da Teoria dos Números: A Hipótese de Riemann, a Conjetura de Erdős sobre PA e a Conjetura de Goldbach.

1.3.1. *A Hipótese de Riemann (HR)*. Foi proposta pelo matemático alemão Bernhard Riemann (1826 - 1866) em 1859. No 2º Congresso Internacional de Matemáticos (Paris, 1900) David Hilbert propôs 23 problemas de matemática. Sendo o 8º, “A hipótese de Riemann e a Conjetura de Goldbach”. O Instituto Clay de Matemática fundado em Oxford (Reino Unido, 1998) promove o programa: “Problemas do Prémio Millennium”, que no ano 2000 lançou os 7 problemas do milênio. Sendo o 4º, “A hipótese de Riemann”. Quem resolva qualquer um desses problemas recebe o

prêmio de um milhão de dólares.

A convergência da série Harmônica generalizada, (1), é a base para a definição da função Zeta de Riemann.

Definição 1.10 (Função Zeta de Riemann). A função $\zeta : \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ é definida por

$$(13) \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Observação 3. A função Zeta, definida no semiplano $\operatorname{Re}(s) > 1$, estende-se por Continuação Analítica para todo o plano complexo e, cuja única singularidade é o polo simples $s = 1$. De aqui em diante, consideraremos a função Zeta de Riemann definida em todo o plano complexo, exceto em $s = 1$.

Conjetura 1.4 (Hipótese de Riemann, 1859). *Todos os zeros não-triviais da função Zeta de Riemann estão na linha crítica $\operatorname{Re}(s) = 1/2$.*

Na Figura 3 apresentamos o domínio da função Zeta de Riemann.

FIGURA 3. Domínio da função Zeta de Riemann: $\mathbb{C} - \{1\}$.



Fonte: Os autores (2022).

o **SE A HR FOSSE VERDADEIRA.** Existem muitos resultados supondo que a HR fosse verdadeira. Consideraremos duas aplicações:

- (a) *Estimativas de erro.* No TNP, a melhor estimativa do erro foi sob a HR: Se a HR é verdadeira, então

$$(14) \quad \pi(x) - \operatorname{Li}(x) = O(\sqrt{x} \ln x)$$

- (b) *Distância entre primos.* Em 1919, Harald Cramér, provou o seguinte resultado: Seja p_n o n -ésimo primo. Se a HR é verdadeira, então

$$p_{n+1} - p_n = O(\sqrt{p_n} \ln p_n)$$

o **A HIPÓTESE DE RIEMANN GENERALIZADA (HRG).** A generalização da HR envolve as L -funções de Dirichlet $L(s, \chi)$, associados com o caráter de Dirichlet primitivo χ , módulo $q > 1$, [2].

Conjetura 1.5 (Hipótese de Riemann Generalizada). *Todos os zeros não-triviais da função $L(s, \chi)$ estão na linha crítica $\operatorname{Re}(s) = 1/2$.*

Observação 4. Da mesma forma que se obtêm resultados assumindo que a HR é verdadeira, também ocorre com a HRG, obtendo-se resultados importantes na Teoria analítica dos números.

o **VERIFICAÇÃO COMPUTACIONAL DA HR.** Na Tabela 1, mostramos a quantidade de zeros da função Zeta de Riemann que se encontram na linha crítica.

TABELA 1. Os n -primeiros zeros não triviais da função Zeta de Riemann.

Ano	n - primeiros zeros	Autor
1903	15	J. P. Gram
1956	25×10^3	D. H. Lehmer
2003	25×10^{10}	S. Wedeniwski
2004	10^{13}	Xavier Gourdon

Fonte: [5].

1.3.2. *A Conjetura de Erdős sobre PA.* Esta conjetura foi enunciada entre os anos 1940 e próximo aos anos 1955, [16]. O matemático húngaro Paul Erdős (1913 - 1996) escreveu em 1996 (publicado postumamente em 1997) que aumentou o prêmio de \$3.000 para \$5.000 pela prova ou refutação dessa conjetura.

Conjetura 1.6 (Erdős sobre PA). *Seja $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} \subset \mathbb{Z}^+$, $a_i < a_{i+1}$, $\forall i$. Se $\sum_{n \in A} 1/a_n = \infty$, então A contém PA arbitrariamente longas.*

A conjetura de Erdős ([6], [7] e [16]) implica dois grandes teoremas: de Szemerédi, [16], e de Green-Tao, [7].

Teorema 1.7 (Szemerédi, 1972). *Qualquer subconjunto dos números naturais de densidade superior positiva contém PA arbitrariamente longas.*

Endre Szemerédi recebeu \$1.000, de Paul Erdős, pela prova desse teorema.

Teorema 1.8 (Green-Tao, 2008). *O conjunto dos números primos contém infinitas PA de comprimento k para todo k .*

O teorema de Green-Tao pode, também, expressar-se do seguintes modo:

$$\forall k \in \mathbb{Z}^+, \exists a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0; \{a + nb\}_{n=0}^{k-1} \subset \mathbb{P}$$

Por exemplo, para $k = 3$: $\{3 + 2n\}_{n=0}^2 = \{3, 5, 7\}$ é uma PA de 3 números primos. Por outro lado, para alguns valores de k podem existir várias PA de tamanho k (denotadas por k -PA). Na Tabela 2, apresentamos algumas das k -PA Minimal.

TABELA 2. Algumas k -PA Minimal (sendo minimizado o último termo).

k	Primos para $n = 0$ até $k - 1$	k	Primos para $n = 0$ até $k - 1$
3	$3 + 2n$	15	$115453391 + 4144140n$
5	$5 + 6n$	20	$214861583621 + 18846497670n$
10	$199 + 210n$	21	$5749146449311 + 26004868890n$

Fonte: [13].

Observação 5. Pelo TNP, temos que $\lim_{x \rightarrow \infty} \pi(x)/x = 0$, ou seja, os números primos tem densidade natural nula. Desse modo o teorema de Szemerédi não poderia implicar o teorema de Green-Tao.

1.3.3. *A Conjetura de Goldbach.* Em 1742, o matemático alemão Christian Goldbach (1690 - 1764) escreveu uma carta para Euler, onde explicava suas duas conjeturas: a “forte ou binária” e a “fraca ou ternária”. A conjectura de Goldbach, a forte, é, sem dúvida, um dos problemas mais antigos que tem fascinado e inspirado a muitos matemáticos. No 2º Congresso Internacional de Matemáticos (Paris, 1990), Hilbert propôs 23 problemas, sendo a conjectura de Goldbach parte do 8º problema, [18].

Conjetura 1.7 (Forte ou binária, Goldbach, 1742). *Todo número par maior que 2 pode ser expressado como a soma de dois números primos*

Exemplos desta conjectura: $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 5 + 3$ e $10 = 7 + 3 = 5 + 5$.

Observação 6.

- (a) Olivier Ramaré (França, 1965) provou em 1995 que: “Todo número par $n > 2$ é a soma de no máximo seis primos”.
- (b) Tomás Oliveira e Silva (Portugal) verificou em 2012 que a conjectura é válida para: $2 < n \leq 4 \times 10^{18}$.
- (c) O matemático australo-americano Terence Tao (Austrália, 1975) provou em 2012 que: “Todo número ímpar $n > 1$ é a soma de no máximo cinco primos”.

Maiores informações da conjectura forte pode ser encontrada em [8].

Conjetura 1.8 (Fraca ou ternária, 1742). *Todo número ímpar maior que 5 pode ser expressado como a soma de três números primos*

Exemplos: $7 = 3 + 2 + 2$, $9 = 3 + 3 + 3 = 5 + 2 + 2$ e $11 = 7 + 2 + 2 = 5 + 3 + 3$.

Observação 7.

- (a) Em 2013, o matemático Harald Andrés Helfgott (Peru, 1977) submeteu o artigo: “The ternary Goldbach conjecture is true”. Até o momento é o único artigo que prova que a conjectura fraca de Goldbach é verdadeira, [9].
- (b) Em 2013, H. Helfgott e D. Platt verificaram que a conjectura é válida para: $5 < n \leq 8.875 \times 10^{30}$.
- (c) Algumas Teorias abordadas para esta conjectura são: Método do círculo (Series de Fourier, Transformada de Fourier, Transformada de Laplace).

Sabe-se até o presente momento que não existe nenhuma fórmula que descreva todos os números primos, para todo n natural. O Teorema de Wilson (atribuído a Jhon Wilson em 1770, onde, ainda, era uma conjectura) nos fornece as condições necessária e suficiente para que um número seja primo. A condição suficiente: “Seja $n > 1$ um inteiro. Se $(n - 1)! \equiv -1 \pmod{n}$, então n é primo” nos propicia um Teste de Primalidade, mas infelizmente não é eficiente a medida que n cresce. Porém, indo em uma direção menos abrangente é possível encontrar certos “Padrões especiais de distribuição dos números primos”. É importante para a teoria matemática saber se esses padrões especiais descrevem, ou não, infinitos números primos, e qual é sua densidade. Encontramos, pelo menos, duas formas de padrões especiais: (a) *Forma Analítica*: consiste em encontrar diretamente funções geradoras de números primos (pode ser explicitamente ou através de problemas de existência). (b) *Forma Geométrica*: consiste em usar arranjos dos números naturais sobre geometrias planas,

com a finalidade de identificar padrões especiais de distribuição dos números primos; identificado o padrão, procede-se à obtenção da função geradora de números primos.

1.4. Padrões Especiais de Números Primos.

1.4.1. *Com relação à forma analítica.* Citaremos alguns exemplos:

◦ FUNÇÃO EXPONENCIAL. Os primos de Mersenne $M_p = 2^p - 1$, onde p é primo, representam uma função exponencial, na variável p , geradora de número primos.

◦ FUNÇÃO POLINOMIAL DE 1º GRAU. A PA $a + nb$, onde $\text{mdc}(a, b) = 1$, é uma função polinomial, na variável n , geradora de números primos. Devido ao Teorema de Dirichlet, essa função possui infinitos números primos.

◦ FUNÇÃO POLINOMIAL DE 2º GRAU. O polinômio de Euler $n^2 - n + 41$, onde $n = 1, 2, 3, \dots$ é uma função geradora de números primos, [11].

Observação 8.

(a) Polinômios não geram, totalmente, números primos.

Teorema 1.9 (Goldbach, 1752). *Seja $f(x)$ um polinômio de n -ésimo grau com coeficientes inteiros. Se $f(k) \in \mathbb{P}, \forall k \in \mathbb{Z}_0^+$, então $f(x)$ é constante.*

Prova. Para $k = 0$, é evidente. Seja $k_0 > 0$ e $f(k_0) = p, p \in \mathbb{P}$.

$$\begin{aligned} a_0 &\equiv a_0 \pmod{p} \\ a_1 k_0 &\equiv a_1(k_0 + tp) \pmod{p} \\ &\vdots \\ a_n k_0^n &\equiv a_n(k_0 + tp)^n \pmod{p} \\ \hline f(k_0) &\equiv f(k_0 + tp) \pmod{p} \end{aligned} \tag{15}$$

De (15), temos que $p \mid f(k_0 + tp) - f(k_0), \forall t \in \mathbb{Z}$. Como $p \mid f(k_0)$, então $p \mid f(k_0 + tp)$. Logo, $f(k_0 + tp) = 1$ ou $f(k_0 + tp) = p$. Assim, $\forall t \in \mathbb{Z}, f(k_0 + tp) = p$, pois $f(k_0 + tp)$ é primo por hipótese. Agora, definamos a função: $g(k) = f(k) - p, \forall k \in \mathbb{Z}^+$. Note que, $\forall t \in \mathbb{Z}, k_0 + tp$ são zeros da função $g(k)$. Logo, $g(k) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}^+$. Portanto, $f(k) = p, \forall k \in \mathbb{Z}^+$.

(b) Infinitude dos Números Primos.

◦ *Função polinomial de 2º grau.* A infinitude dos números primos gerados por polinômios de 2º grau é um problema em aberto.

Conjetura 1.9 (Conjetura F de Hardy-Littlewood, 1922). *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}, a > 0, \text{mdc}(a, b, c) = 1, \Delta = b^2 - 4ac$ não é um quadrado e, $a + b$ e c não são ambos pares. Então, existem infinitos números primos da forma $f(n) = an^2 + bn + c$. Além disso,*

$$\pi_f(n) \sim C \varepsilon \sqrt{n} / (\sqrt{a} \ln n) \tag{16}$$

onde,

$$C = \prod_{\substack{p>2 \\ p|a \wedge p|b}} \left(\frac{p}{p-1} \right) \prod_{\substack{p>2 \\ p \nmid a}} \left(1 - \frac{1}{p-1} \left(\frac{\Delta}{p} \right) \right) \tag{17}$$

$\left(\frac{\Delta}{p} \right) : \text{denota o símbolo de Legendre}$

$$\varepsilon = \begin{cases} 1/2 & \text{se } 2 \nmid a + b \\ 1 & \text{de outro modo} \end{cases}$$

◦ *Função polinomial de n -ésimo grau.* Não existe uma prova sobre a infinitude de números primos gerados por polinômios de n -ésimo grau de uma variável. Veja a Conjetura de Buniakovsky, ([12], p. 145).

Conjetura 1.10 (Conjetura de Buniakovsky, 1857). *Se $f(x)$ é um polinômio de n -ésimo grau com coeficientes inteiros, irreduzível e $N = \text{mdc}(f(m) : m \in \mathbb{N})$, então existem infinitos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N}|f(m)|$ é primo.*

1.4.2. *Com relação à forma geométrica.* Consideraremos três exemplos:

◦ **A ESPIRAL DE ULAM.** Em 1963, Stanislaw Ulam elaborou um arranjo dos números naturais, sobre um quadrado, em uma ordem que segue o formato de uma espiral “quadrada”, conhecida como a Espiral de Ulam. Ulam observou, nesse arranjo, que existem certos padrões de números primos determinados por polinômios quadráticos da forma: $4n^2 + bn + c$, [1].

◦ **ORLOWSKI E CHMIELEWSKY**, [14] usaram processamento de imagens na espiral de Ulam para detectar linhas com muitos números primos. Eles registraram que o polinômio $4n^2 - 1260n + 98827$ gera 613 primos, para $n = 0, 1, \dots, 1000$, resultando ser mais denso que o polinômio de Euler.

◦ **JARA-VERA E SÁNCHEZ-ÁVILA**, [10] estudaram padrões da adjacência de números primos em linhas da espiral de Ulam. Eles mostraram que as adjacências diminuem rapidamente, mas não desaparecem, conforme a espiral cresce.

O presente trabalho utiliza a forma geométrica para encontrar padrões especiais de distribuição de números primos. Criamos um novo arranjo dos números naturais, sobre um quadrado, o qual chamamos de n -quadrado Zeta. Da infinitude de “caminhos” que este quadrado pode fornecer-nos, temos considerado apenas dois. Eles são modelados por funções geradoras de números primos que são polinômios de 2º grau da forma: $k^2 + ak + b$, sendo a ímpar e b um quadrado perfeito.

2. O n -QUADRADO

Nessa Seção, definiremos um n -quadrado e os conceitos que se relacionam com a geometria desse quadrado. Assim, como também, seu arranjo de formação.

Definição 2.1 (Casa de um Quadrado). Seja Q um quadrado. Uma casa de Q é um quadrado contido em Q , cujo valor é um número inteiro positivo.

Definição 2.2 (O n -quadrado). Dado $n \in \mathbb{Z}^+$. Um n -quadrado é um quadrado formado por n^2 casas que se interceptam em um lado. Cada casa c_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$, segue uma ordem, como descrita na Figura 4(a), e seu valor não se repete.

Notação 1. O n -quadrado é denotado por

$$\{c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}; c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2n}; \dots; c_{n1}, c_{n2}, \dots, c_{nn}\}$$

Exemplo 1. Na Figura 4(b) temos o 3-quadrado definido por $\{2, 5, 6; 1, 9, 4; 3, 7, 8\}$.

FIGURA 4. (a) O n -quadrado. (b) Um 3-quadrado.

c_{11}	c_{12}	\dots	c_{1n}
c_{21}	c_{22}	\dots	c_{2n}
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
c_{n1}	c_{n2}	\dots	c_{nn}

(a)

2	5	6
1	9	4
3	7	8

(b)

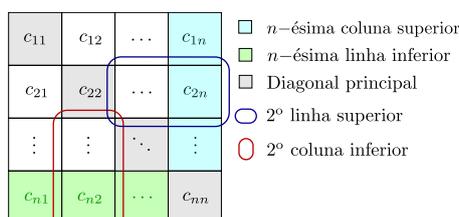
Fonte: Os autores (2022).

2.1. Geometria de um n -quadrado. Alguns elementos geométricos são:

- i -ésima linha: $(c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in})$
- Diagonal principal: $(c_{11}, c_{22}, \dots, c_{nn})$
- i -ésima linha superior: $(c_{i(i+1)}, c_{i(i+2)}, \dots, c_{in})$
- j -ésima coluna inferior: $(c_{(j+1)j}, c_{(j+2)j}, \dots, c_{nj})$
- j -ésima coluna: $(c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj})$
- i -ésima linha inferior: $(c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{i(i-1)})$
- j -ésima coluna superior: $(c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{(j-1)j})$

Na Figura 5 esboçamos no n -quadrado alguns desses elementos.

FIGURA 5. Geometria de um n -quadrado.



Fonte: Os autores (2022).

2.2. Arranjo de Formação.

Definição 2.3 (Arranjo de Formação). Chama-se um arranjo de formação de um n -quadrado a qualquer preenchimento não-aleatório dos valores de suas casas.

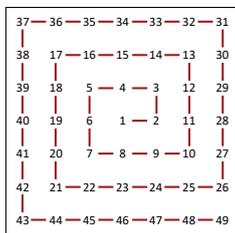
Observação 9. O arranjo de formação de um n -quadrado pode vir acompanhado de linhas cuja única finalidade é expressar de forma clara sua formação.

2.2.1. *A Espiral de Ulam e o n -quadrado Zeta.* A espiral de Ulam e o n -qZeta são dois arranjos diferentes dos números naturais que servem para identificar padrões de distribuição de números primos sobre n -quadrados.

Definição 2.4 (A Espiral de Ulam). A espiral de Ulam é um arranjo dos números naturais sobre um n -quadrado, cujo arranjo de formação consiste em distribuir os números naturais a partir do 1, sendo ele colocado no centro do quadrado e os outros números seguem segundo a forma de uma “espiral quadrada”.

Exemplo 2. A Figura 6 apresenta a Espiral de Ulam em um 7-quadrado com arranjo de formação através de linhas.

FIGURA 6. A espiral de Ulam, em um 7–quadrado.



Fonte: Os autores (2022).

Definição 2.5 (O n –quadrado Zeta). O n –quadrado Zeta, denotado por n –qZeta, é um n –quadrado, cujo arranjo de formação segue os 3 passos seguintes:

- (1^o) **Casas da diagonal principal.** São preenchidas, nessa ordem, pelos quadrados perfeitos: $1, 4, 9, \dots, n^2$.
- (2^o) **Casas da j –ésima coluna superior.** Para cada j , $2 \leq j \leq n$, temos a sequência:

$$(18) \quad \left((j-1)^2 + 1, \quad (j-1)^2 + 2, \quad (j-1)^2 + 3, \quad \dots, \quad j(j-1) \right)$$

que possui $(j-1)$ casas. As casas com números primos são pintadas de cor verde.

- (3^o) **Casas da i –ésima linha inferior.** Para cada i , $2 \leq i \leq n$, temos a sequência:

$$(19) \quad \left(i(i-1) + 1, \quad i(i-1) + 2, \quad i(i-1) + 3, \quad \dots, \quad (i-1)(i+1) \right)$$

que possui $(i-1)$ casas. As casas com números primos são pintadas de cor amarela.

Exemplo 3. Na Figura 7(a) apresentamos o 7–quadrado Zeta que mostra seu arranjo de formação através de linhas (note que os quatro primeiros números formam a letra Z, que no alfabeto grego seria o Zeta, por isso o nome Zeta no arranjo). Já, a Figura 7(b) representa o 7–quadrado Zeta obtido pela Definição 2.5, que a seguir explicamos:

- (i) *Diagonal principal.* A diagonal principal $(c_{11}, c_{22}, \dots, c_{77})$ é preenchida pela sequência $(1, 4, 9, 16, 25, 36, 49)$.
- (ii) *Colunas superiores e linhas inferiores.* Na Tabela 3 observamos que há uma ordem de preenchimento, conforme indicamos nas colunas 1 e 4. Nas colunas 2 e 5, indicamos a j –ésima coluna superior e a i –ésima linha inferior do 7–qZeta, respectivamente. Já, nas colunas 3 e 6 expressamos as sequências que resultam ao utilizar-se as fórmulas (18) e (19), respectivamente.

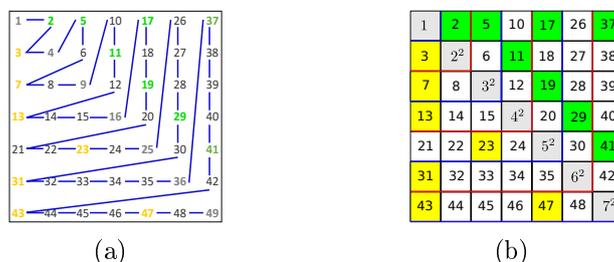
Exemplo 4. Na Figura 8 apresentamos quatro n –quadrados Zeta: (a) O 10–qZeta. (b) O 20–qZeta. (c) O 50–qZeta. (d) O 100–qZeta, e na Figura 15 (em ANEXO): (e) O 200–qZeta. (f) O 300–qZeta. Para a elaboração de um n –qZeta foi escrito um código em Linguagem Visual Basic do Excel.

TABELA 3. Preenchimento das casas do 7-quadrado Zeta.

Ord.	Coluna superior	Sequências	Ord.	Linha inferior	Sequências
1 ^o	2	(2)	2 ^o	2	(3)
3 ^o	3	(5, 6)	4 ^o	3	(7, 8)
5 ^o	4	(10, 11, 12)	6 ^o	4	(13, 14, 15)
7 ^o	5	(17, 18, 19, 20)	8 ^o	5	(21, 22, 23, 24)
9 ^o	6	(26, 27, 28, 29, 30)	10 ^o	6	(31, 32, 33, 34, 35)
11 ^o	7	(37, 38, 39, 40, 41, 42)	12 ^o	7	(43, 44, 45, 46, 47, 48)

Fonte: Os autores (2022).

FIGURA 7. (a) O 7-qZeta mostrando o arranjo de formação através de linhas. (b) O 7-qZeta, obtido pela Definição 2.5.



(a)

(b)

Fonte: Os autores (2022).

3. CAMINHOS EM UM n -QUADRADO

Nessa Seção, definiremos os conceitos relacionados com caminhos no n -quadrado.

Definição 3.1 (Sequência de casas). Uma sequência de casas no n -quadrado, denotado por (c_{ij}) , $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$, é qualquer agrupamento “contínuo” de casas.

Definição 3.2 (Caminho). Um caminho no n -quadrado, denotado por $\mathbf{C}(n) = (c_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$, é qualquer sequência de casas com pelo menos um primo.

Definição 3.3 (Caminho Retilíneo). Um caminho retilíneo é um caminho no n -quadrado que, geometricamente, descreve uma linha reta.

Exemplo 5.

Considere o 3-quadrado $\{1, 4, 5; 7, 2, 6; 8, 9, 3\}$ (veja Figura 9):

- (a) O caminho $\mathbf{C}_1(3) = (c_{22}, c_{23}, c_{32}, c_{21}, c_{11}) = (2, 6, 9, 7, 1)$.
- (b) O caminho retilíneo $\mathbf{C}_2(3) = (c_{21}, c_{32}) = (7, 9)$.

Considere o 7-qZeta (veja Figura 9):

- (c) $\mathbf{C}_1(7) = (8, 15, 23, 34, 45)$. $\mathbf{C}_2(7) = (11, 17)$.
 - $\mathbf{C}_3(7) = (5, 11, 19, 29, 41)$. $\mathbf{C}_4(7) = (3, 7, 13, 21, 31, 43)$.
- O único caminho que não é retilíneo é o $\mathbf{C}_1(7)$.

Considere o 41-qZeta (veja Figura 9):

- (d) Temos o seguinte caminho retilíneo:

$$\mathbf{C}(41) = (c_{20\ 22}, c_{19\ 23}, c_{18\ 24}, \dots, c_{3\ 39}, c_{2\ 40}, c_{1\ 41}) = (461, 503, 547, \dots, 1447, 1523, 1601)$$

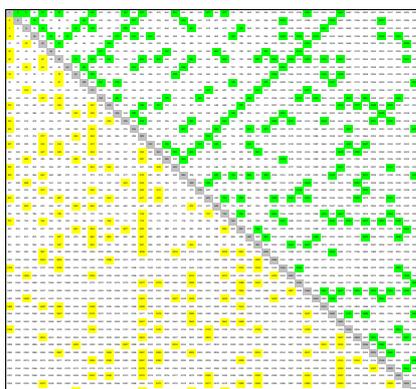
FIGURA 8. O n -quadrado Zeta.

1	2	5	10	17	26	37	50	65	82
3	4	6	11	18	27	38	51	66	83
7	8	9	12	19	28	39	52	67	84
13	14	15	16	20	29	40	53	68	85
21	22	23	24	25	30	41	54	69	86
31	32	33	34	35	36	42	55	70	87
43	44	45	46	47	48	49	56	71	88
57	58	59	60	61	62	63	64	72	89
73	74	75	76	77	78	79	80	81	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

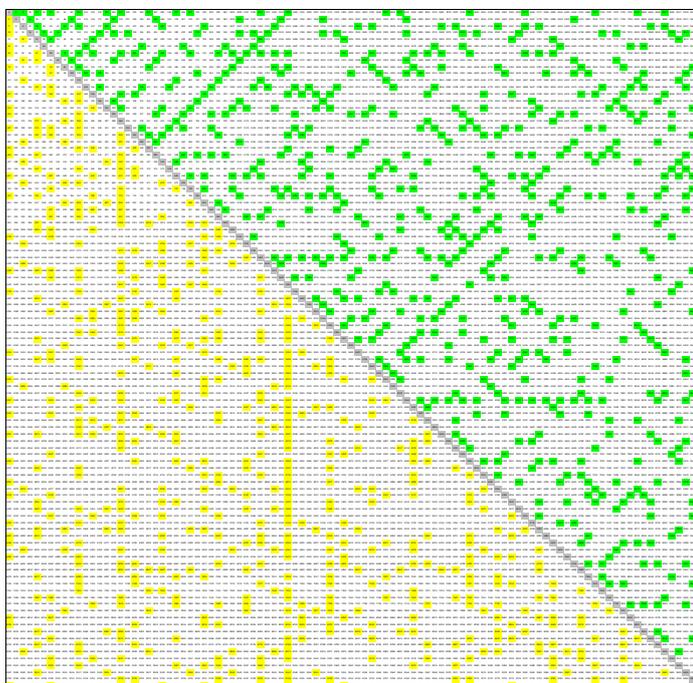
1	2	5	10	17	26	37	50	65	82	101	122	145	170	197	226	257	290	325	362
3	4	6	11	18	27	38	51	66	83	102	123	146	171	198	227	258	291	326	363
7	8	9	12	19	28	39	52	67	84	103	124	147	172	199	228	259	292	327	364
13	14	15	16	20	29	40	53	68	85	104	125	148	173	200	229	260	293	328	365
21	22	23	24	25	30	41	54	69	86	105	126	149	174	201	230	261	294	329	366
31	32	33	34	35	36	42	55	70	87	106	127	150	175	202	231	262	295	330	367
43	44	45	46	47	48	49	56	71	88	107	128	151	176	203	232	263	296	331	368
57	58	59	60	61	62	63	64	72	89	108	129	152	177	204	233	264	297	332	369
73	74	75	76	77	78	79	80	81	90	109	130	153	178	205	234	265	298	333	370
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	110	131	154	179	206	235	266	299	334	371
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	132	155	180	207	236	267	300	335	372
133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	156	181	208	237	268	301	336	373
157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	182	209	238	269	302	337	374
183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	210	239	270	303	338	375
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	240	271	304	339	376
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	272	305	340	377
273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	306	341	378
307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324	342	379
343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	380
381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	400

(a) O 10-quadrado Zeta.

(b) O 20-quadrado Zeta.



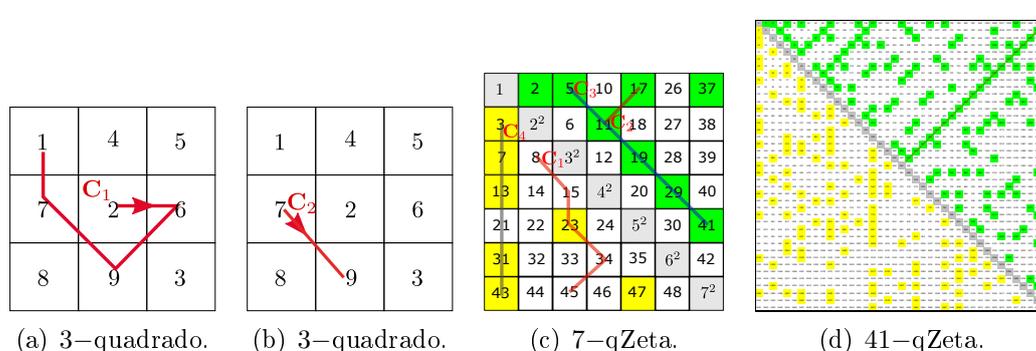
(c) O 50-quadrado Zeta.



(d) O 100-quadrado Zeta.

Fonte: Os autores (2021).

FIGURA 9. Caminhos e caminhos retilíneos.



Fonte: Os autores (2022).

Definição 3.4 (Comprimento de um Caminho). No n -quadrado, o comprimento de um caminho $\mathbf{C}(n)$, denotado por $|\mathbf{C}(n)|$, é o número total de casas que ele possui.

Definição 3.5 (Densidade de um Caminho). No n -quadrado, a densidade de um caminho $\mathbf{C}(n)$, denotado por $\rho(n)$, define-se por

$$(20) \quad \rho(n) = |p| / |\mathbf{C}(n)|$$

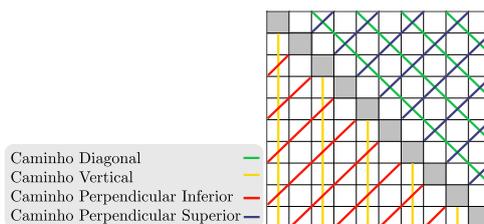
onde, $|p|$ denota a quantidade de números primos que contem o caminho $\mathbf{C}(n)$.

Exemplo 6. Considere alguns caminhos do Exemplo 5. Então,

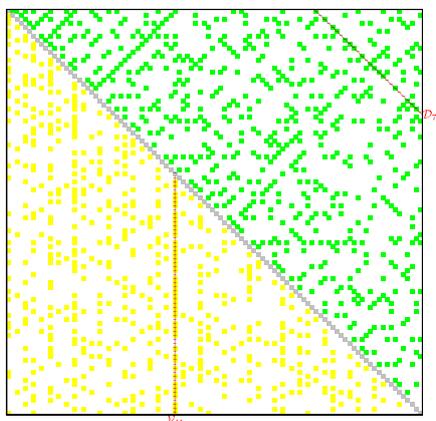
- (a) $|\mathbf{C}_1(3)| = 5$, $|p| = 2$ e $\rho(3) = \frac{2}{5} = 0,4$. Logo, $\mathbf{C}_1(3)$ é um caminho 40%.
- (b) $|\mathbf{C}(41)| = 20$, $|p| = 20$ e $\rho(41) = 1$. Assim, $\mathbf{C}(41)$ é um caminho 100%.

3.1. Tipos de Caminhos Retilíneos. Existem vários tipos de caminhos retilíneos em um n -quadrado. Escolheremos quatro caminhos retilíneos que partem da diagonal principal: Diagonal, vertical, perpendicular inferior e perpendicular superior. É importante destacar que a primeira casa desses quatro caminhos retilíneos podem ou não iniciar-se na casa da diagonal principal. Veja na Figura 10 cada um deles.

FIGURA 10. Quatro tipos de caminhos retilíneos em um n -quadrado.



Fonte: Os autores (2022).

FIGURA 11. Os caminhos $\mathcal{D}_{75}(100)$ e $\mathcal{V}_{41}(100)$, no 100-qZeta.

Fonte: Os autores (2022).

4. CAMINHOS DIAGONAIS E VERTICAIS NO n -qZETA

Nessa Seção, definiremos, no n -qZeta, os caminhos retilíneos: diagonal e vertical que foram escolhidos dentre uma infinidade de caminhos retilíneos.

Definição 4.1 (Caminho Diagonal). Seja o n -qZeta. Um caminho diagonal, denotado por $\mathcal{D}_j(n)$, $3 \leq j \leq r$, é definido por

$$(21) \quad \mathcal{D}_j(n) = (c_{1j}, c_{2(j+1)}, \dots, c_{(n-j+1)n})$$

onde j é ímpar, e $r = n$ se n é ímpar e $r = n - 1$ se n é par.

O subíndice j indica que o caminho diagonal se inicia na coluna j .

Definição 4.2 (Comprimento de um Caminho Diagonal).

$$|\mathcal{D}_j(n)| = n - (j - 1)$$

Observação 10. Os caminhos diagonais são “paralelos” à diagonal principal, e possuem um comprimento “infinito”, pois crescem a medida que n aumenta.

Exemplo 7. No 100-qZeta (veja Figura 11) temos o caminho diagonal 61, 54%:

$$\mathcal{D}_{75}(100) = (c_{175}, c_{276}, \dots, c_{2599}, c_{26100}) = (5.477, 5.627, \dots, 9.629, 9.827)$$

Definição 4.3 (Caminho Vertical). Seja o n -qZeta. Um caminho vertical, denotado por $\mathcal{V}_j(n)$, $1 \leq j \leq r$, é definido por

$$(22) \quad \mathcal{V}_j(n) = (c_{(j+1)j}, c_{(j+2)j}, \dots, c_{nj})$$

onde j é ímpar, e $r = n - 2$ se n é ímpar e $r = n - 1$ se n é par.

O subíndice j indica que o caminho se encontra na coluna j .

Definição 4.4 (Comprimento de um Caminho Vertical).

$$|\mathcal{V}_j(n)| = n - j$$

Observação 11. Os caminhos verticais estão formados por casas da coluna inferior, e possuem um comprimento “infinito”, pois crescem conforme n aumenta.

Exemplo 8 (Caminho vertical $\mathcal{V}_{41}(100)$). No 100-qZeta (veja a Figura 11),

$$(23) \quad \begin{aligned} \mathcal{V}_{41}(100) &= (c_{42\ 41}, c_{43\ 41}, c_{44\ 41}, \dots, c_{98\ 41}, c_{99\ 41}, c_{100\ 41}) \\ &= (1.763, 1.847, 1.933, \dots, 9.547, 9.743, 9.941) \end{aligned}$$

é um caminho vertical 77,97%.

5. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DE CAMINHOS RETILÍNEOS NO n -qZETA

Nessa Seção, vamos determinar uma formulação matemática para os caminhos retilíneos: diagonal e vertical, que se encontram no n -qZeta. Veremos que dado um caminho retilíneo existe um polinômio quadrático associado a ele.

Proposição 5.1 (Polinômio associado a um Caminho Diagonal). *Seja o n -qZeta. O polinômio que descreve os valores das casas do caminho diagonal $\mathcal{D}_j(n)$, $3 \leq j \leq r$, e comprimento s é dado por*

$$(24) \quad d_j(k) = k^2 + (2j - 3)k + (j - 2)^2, \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots, s$$

Prova. De (21), temos a seguinte sequência:

$$\begin{aligned} a_1 &= c_{1j} = j^2 - 2j + 2, & a_2 &= c_{2(j+1)} = a_1 + 2j, \\ a_3 &= c_{3(j+2)} = a_2 + 2j + 1 \cdot 2, & a_4 &= c_{4(j+3)} = a_3 + 2j + 2 \cdot 2, \quad \dots \\ a_k &= c_{k(j+k-1)} = a_{k-1} + 2j + (k-2) \cdot 2 \end{aligned}$$

Observamos que a sequência é, na verdade, uma recorrência linear não-homogênea:

$$(25) \quad a_1 = j^2 - 2j + 2 \quad \text{e} \quad a_k = a_{k-1} + 2k + 2(j-2), \quad k \geq 2$$

A solução de (25) é dada por

$$a_k = a_1 + \sum_{l=2}^k (2l + 2(j-2)) = k^2 + (2j-3)k + (j-2)^2, \quad \forall k \geq 1$$

Essa recorrência define o seguinte polinômio:

$$d_j(k) = k^2 + (2j-3)k + (j-2)^2, \quad 1 \leq k \leq s$$

Exemplo 9. O polinômio associado a $\mathcal{D}_{75}(100)$, comprimento $26 = 100 - 75 + 1$, é

$$d_{75}(k) = k^2 + 147k + 5329, \quad \forall k = 1, 2, \dots, 26$$

Proposição 5.2 (Polinômio associado a um Caminho Vertical). *Seja o n -qZeta. O polinômio que descreve os valores das casas do caminho vertical $\mathcal{V}_j(n)$, $1 \leq j \leq r$, e comprimento s é dado por*

$$(26) \quad v_j(k) = k^2 + (2j-1)k + j^2, \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots, s$$

Prova. A prova é análoga à Proposição 5.1, considerando a seguinte recorrência:

$$(27) \quad a_1 = j(j+2) \quad \text{e} \quad a_k = a_{k-1} + 2k + 2(j-1), \quad k \geq 2$$

Definição 5.1 (O Polinômio v_{41}). *Seja o n -qZeta, $n \geq 42$. O polinômio associado ao caminho vertical $\mathcal{V}_{41}(n)$ é chamado Polinômio v_{41} , e é dado por*

$$(28) \quad v_{41}(k) = k^2 + 81k + 1681, \quad \forall k = 1, 2, \dots, (n-41)$$

Exemplo 10. O polinômio, associado a $\mathcal{V}_{41}(100)$, comprimento $59 = 100 - 41$, é

$$(29) \quad v_{41}(k) = k^2 + 81k + 1681, \quad \forall k = 1, 2, \dots, 59$$

6. FUNÇÃO GERADORA DE NÚMEROS PRIMOS: O POLINÔMIO v_{41}

Nessa Seção, estudaremos o polinômio v_{41} , que é um polinômio de 2º grau, gerador de números primos.

No n -qZeta, os polinômios quadráticos (24) e (26) associados aos caminhos diagonais e verticais, respectivamente, são funções geradoras de números primos. Outras funções geradoras de números primos foram estudadas na Subseção 1.4.1. Também, podemos considerar [19] para o caso de funções polinomiais. No entanto, o mais admirável é o Polinômio de Euler, o qual é definido por:

$$(30) \quad p_E(k) = k^2 - k + 41, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Este polinômio gera quarenta números primos para todo $k = 1, 2, 3, \dots, 40$, eles são:

$$\{41, 43, 47, 53, 61, \dots, 1.447, 1.523, 1.601\}$$

A sequência não possui números primos consecutivos, pois o 59 não está presente. Mas, ele continua fornecendo mais primos para outros valores de k . Por outro lado, o Polinômio v_{41} , definido em (28), é, também, uma função geradora de números primos. Infelizmente ele está limitado a $(n - 41)$ valores para k , por causa do caminho vertical $\mathcal{V}_{41}(n)$ possui $(n - 41)$ casas no n -qZeta. Devido a essa restrição consideramos necessário extrair o caminho vertical $\mathcal{V}_{41}(n)$ do n -qZeta para que o polinômio v_{41} possa fornecer-nos mais números primos para outros valores de k .

6.1. O Caminho Vertical $\mathcal{V}_{41}(n)$ fora do n -qZeta. Para cada $n \geq 42$, existe um único caminho vertical $\mathcal{V}_{41}(n)$ de comprimento $(n - 41)$, no n -qZeta. Se pensarmos, por um momento, em um ∞ -qZeta teremos um único caminho vertical \mathcal{V}_{41} independente de n e de comprimento “infinito”. Assim, o caminho vertical \mathcal{V}_{41} seria:

$$(31) \quad \mathcal{V}_{41} = (c_{42}, c_{43}, c_{44}, \dots) = (1.763, 1.847, 1.933, \dots)$$

Sendo assim, o polinômio v_{41} , associado ao caminho vertical \mathcal{V}_{41} , é dado por

$$(32) \quad v_{41}(k) = k^2 + 81k + 1681, \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots$$

Este polinômio de 2º grau é uma função geradora de números primos.

6.2. O Polinômio de Euler como Translação do Polinômio v_{41} . Por inspeção, $v_{41}(1) = p_E(42) = 1763$, $v_{41}(2) = p_E(43) = 1847$, \dots , $v_{41}(k) = p_E(k + 41)$, $k \geq 1$. Assim, o polinômio v_{41} resulta ser uma translação de 41 unidades, para trás, do polinômio de Euler. Ou, ainda,

$$(33) \quad p_E(k) = v_{41}(k - 41)$$

Nesse caso o polinômio v_{41} pode, também, ser avaliado nos inteiros não positivos.

7. O PERFIL DO POLINÔMIO DE EULER NO n -QUADRADO

Nessa Seção, estudaremos o perfil do polinômio de Euler nos n -quadrados: Espiral de Ulam e o n -qZeta.

Definição 7.1 (Perfil de um Polinômio). O perfil de um polinômio $p(x)$ em um n -quadrado está formado por sequências de casas, cujos valores das casas coincidem com os valores do polinômio $p(k)$ para todo $k = 1, 2, 3, \dots$

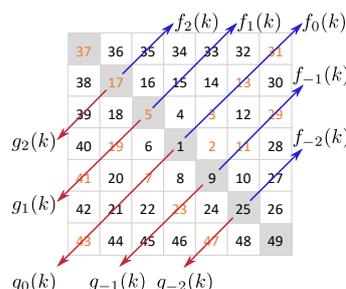
Exemplo 11. Seja o polinômio $p(x) = x^2 + x + 1$. Na Figura 12 mostramos o perfil do polinômio $p(x)$ no 5-quadrado $\{2, 3, 5, \dots\}$. Esse perfil está formado pelo caminho $C(5) = (3, 7, 13)$ e pela sequência de casa única: (21).

FIGURA 12. Perfil de $p(x) = x^2 + x + 1$, no 5-quadrado.

2	3	5	6	1
7	8	10	4	11
12	13	9	14	15
17	16	18	19	20
25	21	22	23	24

Fonte: Os autores (2022).

FIGURA 13. Funções Diagonais na Espiral de Ulam, no 7-quadrado.



Fonte: Os autores (2022).

7.0.1. *Perfil do Polinômio de Euler.* Estudaremos o perfil do polinômio de Euler $p_E(x) = x^2 - x + 41$, tanto na espiral de Ulam, quanto no n -quadrado Zeta. Estes perfis foram obtidos com um código escrito em Linguagem Visual Basic do Excel.

Na Espiral de Ulam. Na Figura 14(a) mostramos o perfil do polinômio de Euler na Espiral de Ulam (com o número 1 no centro) em um 99-quadrado. A 1ª casa está pintada de cor azul escuro. É importante salientar que só aparecem impressos os números primos que compõem o perfil. Este perfil apresenta, geometricamente, as seguintes características: (a) As 12 primeiras casas são primos e não seguem nenhum padrão específico. (b) A partir da 13ª casa, encontramos 6 caminhos retilíneos:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= (197, 251, 313, 383) & S_2 &= (223, 281, 347, 421) \\
 S_3 &= (461, 547, 641, \dots, 1523) & S_4 &= (503, 593, 691, \dots, 1447) \\
 S_5 &= (1601, 1763, 1933, \dots, 9547, \dots) & S_6 &= (1681, 1847, 2021, \dots, 9743, \dots)
 \end{aligned}$$

onde, $S_1 \parallel S_2$, $S_3 \parallel S_4$, e $S_5 \parallel S_6$ e $|S_1| = |S_2| = 4$, $|S_3| = 10$, $|S_4| = 9$. Observamos que os dois primeiros pares de paralelas: $\{S_1, S_2\}$ e $\{S_3, S_4\}$ seguem uma relação de “reflexão” considerando como espelho o centro da espiral, ou seja, um primo aparece em uma paralela e, o seguinte, na outra. Os caminhos S_1, S_2, S_3 e S_4 têm densidade 1. O último par de paralelas $\{S_5, S_6\}$ correspondem a valores de $k \geq 40$ no polinômio de Euler, sendo 1601 o valor da 1ª casa de S_5 um número primo para $k = 40$, e o número composto 1681 o valor da 1ª casa de S_6 para $k = 41$. Estas paralelas apresentam, também, uma relação de reflexão, porém “descontínua”, ou seja, as vezes ocorrem dois ou mais primos seguidos em uma mesma paralela e, o seguinte, na outra paralela.

Os caminhos retilíneos S_5 e S_6 .

Como descrito acima, os caminhos perpendiculares, superior S_5 e inferior S_6 , pertencem à espiral de Ulam. Steven Bolde,[3], apresentou as **funções diagonais**: $f_\alpha(n)$ e $g_\alpha(n)$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, que caracterizam todos os caminhos perpendiculares da espiral de Ulam, veja a Figura 13. Observamos que o caminho perpendicular que passa pela

casa central da diagonal principal da espiral de Ulam é descrita pela função $f_0(k)$, no caso do caminho perpendicular superior, e pela função $g_0(k)$, no caso do caminho perpendicular inferior. O autor define cada um dessas funções diagonais, por

$$f_\alpha(k) = \begin{cases} 4k^2 + (8\alpha - 10)k + (4\alpha^2 - 8\alpha + 7) & \text{se } \alpha \geq 0 \\ 4k^2 - (8\alpha + 10)k + (4\alpha^2 + 12\alpha + 7) & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

e

$$g_\alpha(k) = \begin{cases} 4k^2 + (8\alpha - 6)k + (4\alpha^2 - 8\alpha + 3) & \text{se } \alpha \geq 0 \\ 4k^2 - (8\alpha + 6)k + (4\alpha^2 + 4\alpha + 3) & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

E, verifica-se, computacionalmente, que as funções diagonais $f_{20}(k)$ e $g_{-20}(k)$ são as “maiores” funções geradores de números primos, na espiral de Ulam. Isto é condicente com os resultados obtidos, neste trabalho, pois os caminhos S_5 e S_6 tem associados os polinômios $p_1(k) = 4k^2 + 150k + 1447 = f_{20}(k)$ e $p_2(k) = 4k^2 + 154k + 1523 = g_{-20}(k)$, para todo $k = 1, 2, 3, \dots$, respectivamente.

No n -quadrado Zeta. Na Figura 14(b) mostramos o perfil do polinômio de Euler em um 100 -qZeta. A 1^a casa do perfil está pintada de cor verde escuro. É importante salientar que somente foram impressos números primos das casas do perfil. Geometricamente, o perfil do polinômio de Euler apresenta as seguintes características: (a) As 9 primeiras casas só contem números primos e estão distribuídos aleatoriamente. (b) A partir da décima casa, seguem 4 caminhos retilíneos:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= (131, 151, 173, 197) & \mathbf{C}_2 &= (223, 251, 281, 313, 347, 383, 421) \\ \mathbf{C}_3 &= (461, 503, 547, \dots, 1523, 1601) & \mathcal{V}_{41} &= (1763, 1847, 1933, \dots, 9941, \dots) \end{aligned}$$

Os três primeiros caminhos: $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ e \mathbf{C}_3 possuem 31 números primos, e somando com os 9 primeiros primos aleatórios, nos dão os 40 primeiros números primos do polinômio de Euler. Note que, a primeira casa do caminho vertical \mathcal{V}_{41} é um número composto.

Foi observado, também, que as casas dos caminhos S_3 e S_4 coincidem com as casas do caminho \mathbf{C}_3 , e as casas dos caminhos S_5 e S_6 são as mesmas que as do caminho vertical \mathcal{V}_{41} , exceto pela primeira casa de S_5 , pois corresponde a uma casa da diagonal principal do n -qZeta, que é um quadrado perfeito.

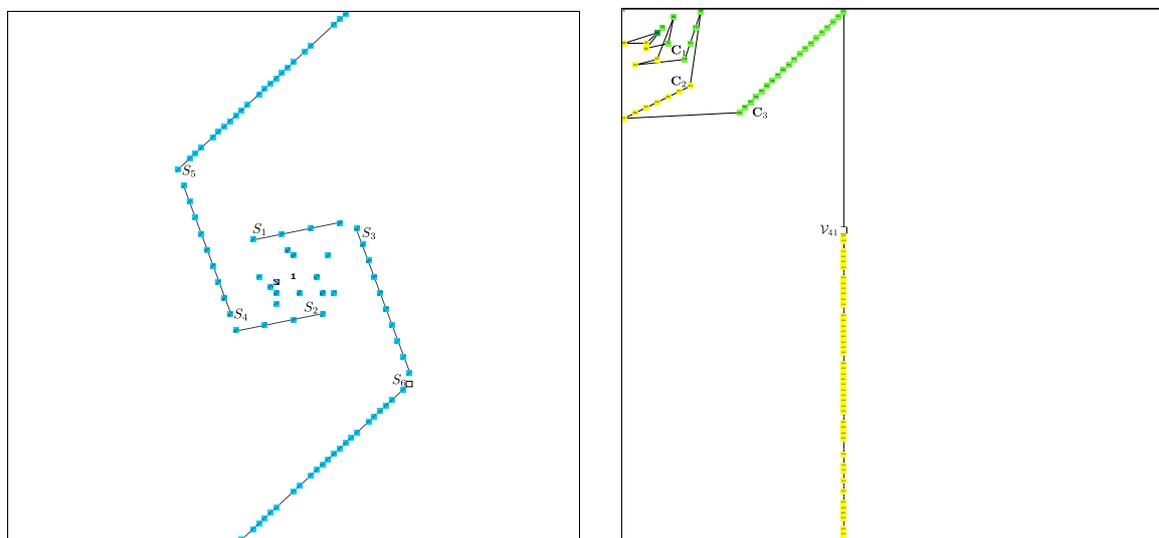
8. CONCLUSÕES

Com a elaboração do n -quadrado Zeta conseguiu-se: (a) Um novo arranjo dos números naturais para a identificação de padrões especiais de distribuição dos números primos. (b) Caminhos diagonais e verticais para encontrar sequências “longas” de números primos. (c) Polinômios geradores de números primos: $d_j(k)$ e $v_j(k)$. (d) O polinômio gerador de números primos, $v_{41}(k)$, $k = 1, 2, 3, \dots$ que resultou ser uma Translação do polinômio de Euler. (e) Informações detalhadas do perfil do polinômio de Euler, tanto na espiral de Ulam, quanto no n -quadrado Zeta.

Agradecimento

À FAPEMIG por ter financiado o Projeto que deu origem a esse artigo.

FIGURA 14. O perfil do polinômio de Euler.



(a) Espiral de Ulam (em um 99-quadrado).

(b) O 100-quadrado Zeta.

Fonte: Os autores (2022).

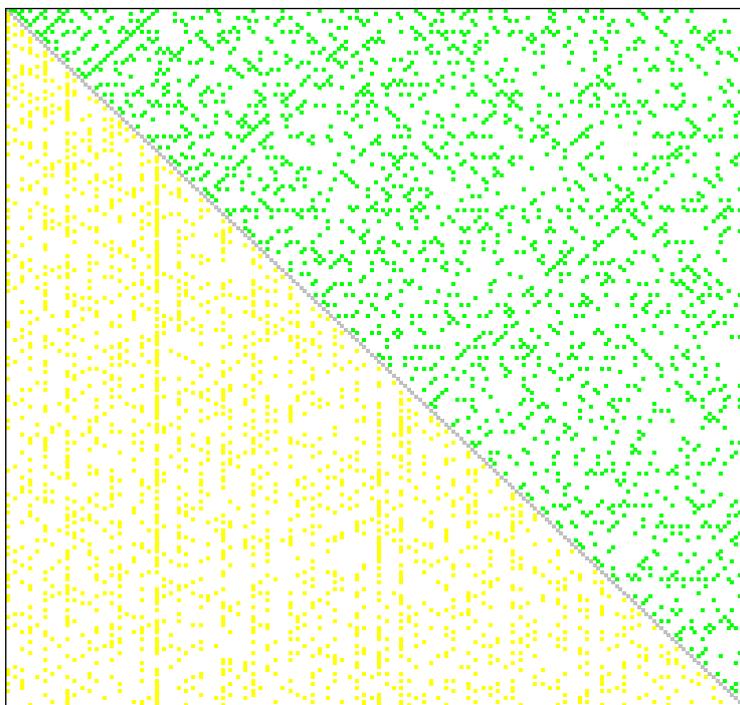
REFERÊNCIAS

- [1] Aletheia-Zomlefer, S. L.; Fukshansky, L.; Garcia, S. R. The Bateman-Horn conjecture: Heuristics, history, and applications. **arXiv:1807.08899v4**, 1-47. 2019. <https://arxiv.org/pdf/1807.08899.pdf>
- [2] Borwein, P. et al. **The Riemann Hypothesis: A Resource for the Afficionado and Virtuoso Alike**. 1. ed. Springer-Verlag, NY, 2008. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-72126-2>
- [3] Bode, S. Quadratic Polynomials With High Asymptotic Prime Density in The Ulam Spiral. **Research Gate**. Thesis, December 2018. <https://www.researchgate.net/publication/341540065>
- [4] Clay Mathematics Institute. **Millennium Problems: Riemann Hypothesis**. 2021. Disponível em: <https://www.claymath.org/millennium-problems/riemann-hypothesis>. Acesso em: 03 set. 2021.
- [5] Gourdon, X. The 10^{13} first zeros of the Riemann Zeta function, and zeros computation at very large height, October, 2004. <http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/zetazeros1e13-1e24.pdf>
- [6] Gowers, W. T. Erdős and Arithmetic Progressions. **ArXiv:1509.03421v1 [math.CO]**, 1-21. 2015. <https://arxiv.org/pdf/1509.03421v1.pdf>
- [7] Green, B.; Tao, T. The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions. **Annals of mathematics**, v. 167, p. 481-547, 2008. <https://doi.org/10.4007/annals.2008.167.481>
- [8] Guy, R. K. **Unsolved Problems in Number Theory**. 3. ed. Springer-Verlag New York, LLC, 2004. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-26677-0>
- [9] Helfgott, H. A. The ternary Goldbach conjecture is true. **arXiv:1312.7748v2[math.NT]**, p. 1-79, 2014. <https://arxiv.org/abs/1312.7748>
- [10] Jara-Vera, V.; Sánchez-Ávila, C. Distribution of adjacent prime numbers in the Ulam spiral. **Engineering Computations**, 1633-1651. 2020. <https://doi.org/10.1108/EC-09-2019-0402>

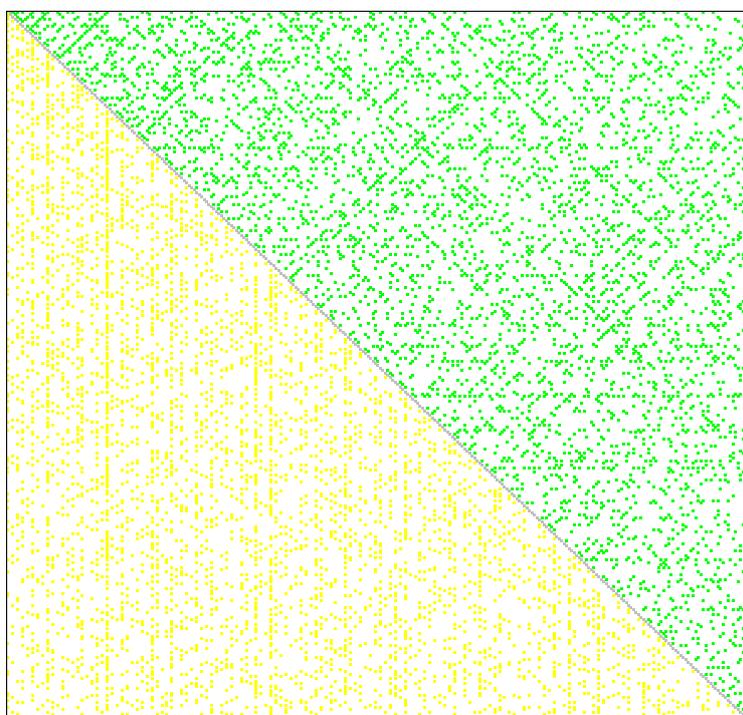
- [11] Mollin, R. A. Prime-Producing Quadratics. **The American Mathematical Monthly**, 529-544. 1997. <https://doi.org/10.2307/2975080>
- [12] Murty, M. R.; Srinivas, K.; Subramani, M. Admissible primes and Euclidean quadratic fields. **J. Ramanujan Math. Soc.**, v. 33, n. 2, p. 135-147. 2018. <http://www.mathjournals.org/jrms/2018-033-002/2018-033-002-003.html>
- [13] OEIS. **Primes in arithmetic progression**. 2022. Disponível em: https://oeis.org/wiki/Primes_in_arithmetic_progression. Acesso em: 23 fev. 2022.
- [14] Orłowski, A; Chmielewsky, L. J. Ulam Spiral and Prime-Rich Polynomials. **Computer Vision and Graphics. ICCVG 2018. Lecture Notes in Computer Science**, v. 10114. 2018. https://doi.org/10.1007/978-3-030-00692-1_45
- [15] Serre, J-P. **A Course in Arithmetic**. 1 ed. Springer-Verlag New York, p 119, 1973. <https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9884-4>
- [16] Soifer, A. **The Mathematical Coloring Book**. 1. ed. Springer ggScience+Business Media, p 637, 2009. <https://doi.org/10.1365/s13291-014-0101-y>
- [17] Stevenhagen, P.; Lenstra, H. W. Chebotarëv and his density theorem. **The Mathematical Intelligencer**, 18, 26-37. 1996. <https://doi.org/10.1007/BF03027290>
- [18] Wang, Y. **The Goldbach Conjecture**. 2nd ed. World Scientific Co. Pte. Ltd, p 344, 2002. <https://doi.org/10.1142/5096>
- [19] Weisstein, E. W. **Prime-Generating Polynomial**. Fonte: MathWorld - A Wolfram Web Resource. 2021. Disponível em: <https://mathworld.wolfram.com/Prime-GeneratingPolynomial.html>. Acesso em: 03 set. 2021.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA, UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI, MG, BRASIL.

Email address: avila_jaj@ufsj.edu.br

FIGURA 15. O n -quadrado Zeta.

(a) O 200-quadrado Zeta.



(b) O 300-quadrado Zeta.

Fonte: Os autores (2022).