Revista Matemática Universitária, vol. 1, 2022
ISSN: 2675-5254 — DOI: 10.21711/26755254/rmu20225

AS MUITAS FACETAS DA TEORIA DOS JOGOS: DA ECONOMIA À BIOLOGIA EVOLUTIVA

THAÍS FERNANDA MENDES MONIS, BRUNO APARECIDO PIM

Resumo. Nesse artigo, pretendemos divulgar ideias introdutórias da Teoria dos Jogos tais como os conceitos de jogos não-cooperativos, de solução para um jogo não-cooperativo - o assim chamado equilíbrio de Nash - também o conceito de equilíbrio social, bem como modelos aplicados ao estudo de questões em economia e em biologia evolutiva. Recentemente, publicamos o artigo [15] - um texto igualmente de divulgação da área de Teoria dos Jogos - onde já abordamos as noções de jogos não-cooperativos e o equilíbrio de Nash. A novidade aqui é: o desenvolvimento da noção de equilíbrio social, também chamado de ponto ótimo-Pareto, e uma análise crítica, por meio de exemplos, onde pomos em contra-ponto essas duas noções de solução para um jogo; a apresentação de uma demonstração para o Teorema de existência de equilíbrio de Nash fazendo uso do Teorema de ponto fixo de Brouwer; e uma discussão sobre como o conceito de equilíbrio de Nash é utilizado em Biologia a fim de se lançarem novas luzes sobre a teoria de evolução de Darwin.

Apesar de não ser objeto habitual presente nos cursos de Matemática, acreditamos que a riqueza de ideias apresentada na Teoria dos Jogos, bem como a sua história e vocação natural de produzir diálogo entre a Matemática e outras áreas do saber tais como a Economia, as Ciências Sociais e a Biologia, podem contribuir para uma formação mais humanizada e plena do estudante.

1. Introdução

Os seres humanos não seríamos capazes de sobreviver se não interagíssemos uns com os outros. E esse mesmo mecanismo de sobrevivência nos leva muitas vezes a conflitos, motivados pela busca de algum ganho ou bem estar pessoal, mas condicionados a uma interdependência recíproca. O estudo de economia, ciências políticas e, de modo geral, das ciências sociais, aparece como uma tentativa de entender o modo como os seres humanos interagem entre si e tomam suas decisões, tanto individuais quanto em grupo. O objetivo, geralmente, é o de aplicar o conhecimento científico

Data de aceitação: 12 de julho de 2022.
Palavras chave. Jogos não-cooperativos, equilíbrio de Nash, pontos ótimo-Pareto, equilíbrio evolutivamente estável.

à análise das questões pertinentes ao funcionamento das sociedades e de suas instituições tais como mercados financeiros, governos, instituições legais, etc. Cientistas intentam desenvolver modelos rigorosos, abstraindo a realidade que observam, não apenas para explicitá-la de modo sistematizado, mas também para poder predizer resultados e obter critérios para tomadas de decisão. Nessa direção, a Teoria dos Jogos se encarrega da construção de modelos matemáticos que descrevem situações de conflito e de cooperação entre tomadores de decisão racionais. O axioma de racionalidade colocado aqui significa que cada envolvido toma suas decisões com o objetivo de maximizar algum tipo de ganho pessoal.

Observamos que a Teoria dos Jogos não é objeto habitual dos programas de disciplinas de cursos de Matemática. No entanto, acreditamos que a riqueza de ideias nela apresentada, bem como a sua história e vocação natural de produzir diálogo entre a Matemática e outras áreas do saber tais como a Economia, as Ciências Sociais e a Biologia, podem contribuir para uma formação mais humanizada e plena do estudante. E é com o espírito de divulgar essas ideias que escrevemos esse artigo. Observamos ainda que, recentemente, publicamos o artigo [15] - um texto igualmente de divulgação da área de Teoria dos Jogos - onde já abordamos as noções de jogos não-cooperativos e o equilíbrio de Nash. Algumas novidades trazidas no presente texto são as seguintes: o desenvolvimento da noção de equilíbrio social, também chamado de ponto ótimo-Pareto, e uma análise crítica, por meio de exemplos, onde pomos em contra-ponto essas duas noções de solução para um jogo; a apresentação de uma demonstração para o Teorema de existência de equilíbrio de Nash fazendo uso do Teorema de ponto fixo de Brouwer; e uma discussão sobre como o conceito de equilíbrio de Nash é utilizado em Biologia a fim de se lançarem novas luzes sobre a teoria de evolução de Darwin.

2. O que é um jogo?

Na Teoria dos Jogos, uma linha de interesse é o estudo do comportamento estratégico dos envolvidos em uma situação de conflito ou de competição, situações que podem ir desde uma ingênua brincadeira de "pedra-papel-tesoura" até modelos de leilão, disputas eleitorais, conflitos entre nações para diminuição de emissão de CO_2 na atmosfera, etc. Tais situações podem ser modeladas pelo que chamamos de **jogo na forma normal**: explicita-se um conjunto finito de jogadores, $\{1, 2, \ldots, n\}$; para cada jogador $i \in \{1, \ldots, n\}$, explicita-se o seu conjunto de estratégias (ou movimentos possíveis), que denotaremos por S_i; e, dado que cada jogador escolheu o seu movimento, cada um terá um retorno, o qual não só dependerá da sua escolha de estratégia mas também das estratégias adotadas pelos demais jogadores. Esse retorno é modelado por uma função pagamento (*"payoff"*), que denotaremos por p_i, que quantifica quão vantajoso foi o resultado final para o jogador i. Como esse retorno p_i do jogador i depende das estratégias assumidas por todos os jogadores, p_i é uma função definida no produto cartesiano dos espaços de estratégias, $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$, e com valores reais. Esse conceito pode ser visto como um modelo para qualquer situação de competição na qual o resultado de cada competidor não depende apenas de suas escolhas mas também das escolhas dos demais envolvidos. O axioma de racionalidade que se coloca é que cada jogador i busca fazer uma escolha s_i de modo a maximizar sua payoff $p_i(s_1, \dots, s_n)$, entendido que, para cada $j \neq i$, o j-ésimo jogador está simultaneamente escolhendo s_j, também com o objetivo de maximizar o valor da sua payoff p_j.

Assim, sempre que um conjunto de indivíduos, empresas, partidos políticos etc., estiver em uma situação de interdependência recíproca, em que as decisões tomadas por cada agente influenciam não somente o seu próprio resultado como também os resultados dos demais envolvidos, diremos que esses agentes encontram-se em um **JOGO**.

Explicitamente, define-se um jogo não-cooperativo na forma normal por:

Definição 2.1. *Um **jogo não-cooperativo na forma normal** é constituído de três elementos:*

- *um conjunto finito de **jogadores,** $N = \{1, 2, ..., n\}$;*
- *a cada jogador $i \in N$ associa-se um conjunto S_i, chamado de seu **espaço de estratégias**;*
- *e cada jogador $i \in N$ possui uma função $p_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$, chamada de sua função **payoff** (função de retorno ou de pagamento).*

Assim, um jogo na forma normal será representado por uma terna $(N, (S_i)_{i\in N}, (p_i)_{i\in N})$.

O produto cartesiano dos espaços de estratégias, $S_1 \times \cdots \times S_n$, será denotado por S. Os elementos de S são chamados de **perfis de estratégias puras**.

Como ilustração da Definição 2.1, apresentamos o jogo *pedra-papel-tesoura* nessa linguagem. Nesse jogo, há sempre dois competidores, os quais nomearemos Jogador 1 e Jogador 2. O conjunto de estratégias do Jogador 1 é $S_1 = \{\text{pedra, papel, tesoura}\}$, três possíveis movimentos. O mesmo para o Jogador 2, $S_2 = \{\text{pedra, papel, tesoura}\}$. Como a regra do jogo é pedra ganha de tesoura, tesoura ganha de papel e papel ganha de pedra, podemos quantificar o retorno desses jogadores com a seguinte tabela:

Tabela 1. Jogo pedra-papel-tesoura

J.1 \ J.2	pedra	papel	tesoura
pedra	(0,0)	(0,1)	(1, 0)
papel	(1,0)	(0,0)	(0,1)
tesoura	(0,1)	(1,0)	(0,0)

Nessa tabela, a primeira coluna está representando as estratégias do Jogador 1, a primeira linha, as estratégias do Jogador 2 e, para as entradas com pares ordenados de números, a primeira coordenada do par representa o retorno do Jogador 1 e a segunda coordenada representa o retorno do Jogador 2 no respectivo perfil de estratégias, sendo que o valor 1 está sendo associado à situação de vitória e o valor 0 à situação de derrota do jogador.

Dada a definição de jogo na forma normal, informamos que a Teoria dos Jogos se encarrega da construção de modelos que descrevem situações de interação estratégica entre tomadores de decisão racionais. Para cada uma dessas situações, é preciso explicitar os agentes envolvidos, os conjuntos de estratégias e as funções de retorno. A força motriz da Teoria dos Jogos é a busca por uma abordagem unificada no tratamento de qualquer situação de interação estratégica, por meio de um princípio universal que nos leve a prever os possíveis desdobramentos em cada uma dessas situações. A resposta para esse busca por um princípio fundamental foi dada pelo brilhante matemático John Forbes Nash Jr. em sua tese de doutorado, com o seu conceito de equilíbrio para jogos não-cooperativos. No artigo [12], John Forbes Nash Jr. apresenta os principais resultados de sua tese de doutorado. Dentre eles, o seu reconhecido conceito de soluçao para jogos não cooperativos - o chamado **equilíbrio de Nash** - e um teorema de existência de equilíbrio cuja demonstração envolve o Teorema de ponto fixo de Brouwer. Abaixo, apresentamos a definição.

Definição 2.2 (Equilíbrio de Nash). *Seja $(N, (S_i)_{i\in N}, (p_i)_{i\in N})$ um jogo na forma normal, $N = \{1, \dots, n\}$. O perfil de estratégia pura $s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_n^*) \in S$ é um **equilíbrio de Nash** para esse jogo se*

$$p_i(s^*) = p_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) \geq p_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$$

para todo $s_i \in S_i$, $i = 1, \dots, n$, ou seja, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, se cada jogador $j \neq i$ assumir a estratégia s_j^*, o jogador i não consegue um resultado melhor do que aquele obtido assumindo a estratégia s_i^*.

A interpretação para o equilíbrio de Nash é que, em um tal perfil de estratégias, não há motivação para mudanças unilaterais por parte dos jogadores, ou seja, nenhum jogador possui incentivo para mudar a sua estratégia se os demais não o fizerem.

Note que o jogo *pedra-papel-tesoura* apresentado acima não possui equilíbrio de Nash. Apesar de nem todo jogo na forma normal possuir equilíbrio de Nash, John Nash demonstrou que, considerando cada jogador com um conjunto finito de estratégias, se considerarmos distribuições de probabilidade sobre as estratégias, então o jogo resultante **sempre** possui equilíbrio de Nash (2.5), o qual é chamado de **equilíbrio de Nash em estratégias mistas**. No jogo *pedra-papel-tesoura*, por exemplo, uma estratégia mista para o Jogador 1 é uma função $\sigma : \{\text{pedra, papel, tesoura}\} \to [0, 1]$ com $\sigma(\text{pedra}) + \sigma(\text{papel}) + \sigma(\text{tesoura}) = 1$, sendo que a interpretação é que σ representa a estratégia mista onde o jogador assume a probabilidade $\sigma(\text{pedra})$ de jogar pedra, $\sigma(\text{papel})$ de jogar papel e $\sigma(\text{tesoura})$ de jogar tesoura. Outro exemplo onde podemos trabalhar com estratégias mistas é em uma disputa de penaltis, onde jogador e goleiro escolhem os lados com probabilidades de acordo com as suas facilidades e características do oponente.

Dado um conjunto finito A, denotamos por $\Delta(A)$ o conjunto de todas as distribuições de probabilidade sobre A. Ou seja,

$$\Delta(A) := \left\{ \sigma : A \to [0, 1] \mid \sum_{a\in A} \sigma(a) = 1 \right\}.$$

Definição 2.3 **(Estratégias mistas).** *Seja $G = (N, (S_i)_{i\in N}, (p_i)_{i\in N})$ um jogo no qual cada conjunto de estratégias S_i é não-vazio e finito. Uma* ***estratégia mista*** *do jogador i é uma distribuição de probabilidade sobre o seu conjunto de estratégias S_i. Assim,*

$$\Delta(S_i) = \{\sigma_i : S_i \to [0,1] \mid \sum_{s_i\in S_i} \sigma_i(s_i) = 1\}$$

é o conjunto das estratégias mistas do jogador i.

Note que cada estratégia pura do jogador i, $s_i \in S_i$, pode ser vista como uma estratégia mista identificando s_i com a distribuição de probabilidade $\sigma_i : S_i \to [0,1]$ sobre S_i dada por: $\sigma_i(s_i) = 1$ e $\sigma_i(t) = 0$ para todo $t \neq s_i$.

Definição 2.4. *Seja $G = (N, (S_i)_{i\in N}, (p_i)_{i\in N})$ um jogo no qual cada conjunto de estratégias S_i é não-vazio e finito, $N = \{1, \ldots, n\}$. A extensão de G para um jogo de estratégias mistas é o jogo*

$$\Gamma = (N, (\Delta(S_i))_{i\in N}, (P_i)_{i\in N}),$$

onde a função payoff $P_i : \Delta = \Delta(S_1) \times \cdots \times \Delta(S_n) \to \mathbb{R}$ é dada pela extensão multilinear da payoff p_i. Isso significa que, dado $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \Delta(S_1) \times \cdots \times \Delta(S_n)$,

$$P_i(\sigma) = \sum_{(s_1,\ldots,s_n)\in S} \sigma_1(s_1)\sigma_2(s_2)\cdots\sigma_n(s_n)\, p_i(s_1, s_2, \ldots, s_n),$$

o qual é o retorno estimado do jogador i quando os jogadores assumem o perfil de estratégias $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \Delta$.

Nesse caso, um perfil de estratégias mistas $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ é um ***equilíbrio de Nash em estratégias mistas*** *quando*

$$P_i(\sigma^*) = P_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i^*, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*) \geq P_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*),$$

para todo $\sigma_i \in \Delta(S_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

Note que se o jogo $G = (N, (S_i)_{i\in N}, (p_i)_{i\in N})$ admitir um equilíbrio de Nash em estratégias puras, digamos $s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_n^*) \in S$, então $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$, onde

$$\sigma_i^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \neq s_i^* \\ 1, & \text{se } t = s_i^* \end{cases},$$

é um equilíbrio de Nash em estratégias mistas. De fato, nesse caso, por um lado,

$$\begin{aligned} P_i(\sigma^*) &= \sum_{(s_1,\ldots,s_n)\in S} \sigma_1^*(s_1)\cdots\sigma_n^*(s_n)\, p_i(s_1, \ldots, s_n) \\ &= p_i(s_1^*, \ldots, s_n^*) = p_i(s^*). \end{aligned}$$

Por outro,

$$\begin{aligned} P_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*) &= \sum_{(s_1,\ldots,s_n)\in S} \sigma_1^*(s_1) \cdots \sigma_i(s_i) \cdots \sigma_n^*(s_n)\, p_i(s_1, \ldots, s_n) \\ &= \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i)\, p_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \\ &\leq \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i)\, p_i(s^*) = p_i(s^*). \end{aligned}$$

Portanto,

$$P_i(\sigma^*) = P_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i^*, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*) \geq P_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*),$$

para todo $\sigma_i \in \Delta(S_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

A recíproca desse fato não é verdadeira, ou seja, um jogo pode admitir equilíbrio de Nash em estratégias mistas sem que haja um equilíbrio em estratégias puras, como é o caso do jogo *pedra-papel-tesoura* comentado anteriormente.

Teorema 2.5 (Teorema de Nash)**.** *Qualquer jogo de n jogadores na forma normal com conjuntos finitos de estratégias S_i para todos os jogadores possui um **equilíbrio de Nash** em estratégias mistas.*

Como veremos, a demonstração do teorema de equilíbrio de Nash é uma aplicação do Teorema de ponto fixo de Brouwer. Na verdade, esses dois resultados são equivalentes, como é demonstrado em [19] e em [21].

Finalizamos essa seção com um conceito de solução de natureza distinta do conceito de equilíbrio de Nash. Trata-se do conceito de ponto **ótimo-Pareto** de um jogo, também conhecido por **equilíbrio social**.

Definição 2.6 (**Ótimo-Pareto**)**.** *Um ponto $s \in S$ é dito ótimo-Pareto (ou eficiente no sentido de Pareto) para $p_1, \ldots, p_n$ quando satisfaz a seguinte condição:*

Se $p_i(s') \geq p_i(s)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ então $p_i(s') = p_i(s)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Essa definição traduz a ideia de Pareto de que uma situação é eficiente quando não for possível aumentar o lucro de um agente sem diminuir o lucro de outro.

Veja que $s \in S$ não ser ótimo-Pareto para $p_1, \ldots, p_n$ significa que existe $s' \in S$ tal que $p_i(s') \geq p_i(s)$ para todo i e $p_j(s') > p_j(s)$ para algum j. Assim, quando $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ e $p_1, \ldots, p_n : S \to \mathbb{R}$ são as funções payoff de uma competição em n jogadores, com espaços de estratégia $S_1, \ldots, S_n$, se $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$ não é ótimo-Pareto, significa que existe uma solução $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*) \in S$ tão boa quanto s para todos os jogadores e mais lucrativa para pelo menos um dos jogadores.

Como dissemos, a interpretação de um ponto de equilíbrio de Nash é que, nele, nenhum jogador possui motivação para mudar sua estratégia se os demais não o fizerem. Isso não significa que um equilíbrio de Nash seja um resultado particularmente desejável para um jogo. Na verdade, devemos pensar num ponto de equilíbrio de Nash simplesmente como uma descrição do que é provável que aconteça em uma situação na qual os jogadores perseguem seus objetivos individuais sem qualquer tipo de cooperação, quer por falta de comunicação ou simplesmente por não existir o interesse em cooperar. Um exemplo clássico é o bem conhecido e estudado Dilema do Prisioneiro no qual existem dois jogadores (prisioneiros), I e II, que são chamados em salas isoladas para confessarem um crime que cometeram. A matriz de retorno (número de anos de prisão) é a seguinte:

Tabela 2. Dilema do Prisioneiro

I \ II	não confessa	confessa
não confessa	(1,1)	(5,0)
confessa	(0,5)	(2,2)

onde o par (a, b) indica a anos de prisão para I e b anos de prisão para II. O objetivo de cada prisioneiro, é claro, é passar o menor número de anos possível na prisão. O único equilíbrio de Nash para esse jogo é a situação em que ambos confessam o crime. Porém, solução mais interessante para ambos é aquela na qual ambos não confessam, que pode ser obtida caso os prisioneiros consigam agir de forma cooperativa entre si. Assim, o equilíbrio de Nash desse jogo não é eficiente no sentido de Pareto. Na verdade, no artigo [4], P. Dubey apresenta uma prova matemática de que os equilíbrios de Nash são, "em geral", ineficientes no sentido de Pareto. Vemos, então, que essas duas importantes definições dificilmente são equivalentes dentro de um jogo, ou seja, raramente correspondem à mesma combinação de estratégias. Para além de uma demonstração matemática, podemos fazer esta observação ao notarmos que, na Definição (2.2), o equilíbrio é obtido quando os jogadores utilizam as estratégias que mais os beneficiam, dadas as estratégias dos oponentes, se importando apenas com o *seu próprio ganho*, enquanto que na Definição (2.6), os jogadores também levam em consideração se o *outro jogador* será prejudicado ou não. Por isso, comumente um ponto ótimo-Pareto é chamado um *equilíbrio social*. O equilíbrio social no Dilema do Prisioneiro acima é a configuração estratégica em que ambos os prisioneiros não confessam.

3. A Demonstração do Teorema de Equilíbrio de Nash: uma aplicação do Teorema de Ponto Fixo de Brouwer

A demonstração de existência de equilíbrio dada por John Nash é uma bonita aplicação do Teorema de ponto fixo de Brouwer. Para o seu entendimento, alguns pontos preliminares são os seguintes.

Definição 3.1. *O simplexo canônico de dimensão n (ou n-simplexo canônico) é o subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por*

$$\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \ \ e \ \ t_i \geq 0, \ para\ i = 0, \dots, n\}.$$

Abaixo, enunciamos o Teorema de ponto fixo de Brouwer. Uma demonstração para ele utilizando-se de métodos da Topologia Algébrica pode ser encontrada em [20]. Para outra abordagem ver [10].

Teorema 3.2 (Teorema de ponto fixo de Brouwer [2])**.** *Seja $K \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto compacto e convexo de um espaço euclidiano. Então, para toda função contínua $f : K \to K$, existe $x \in K$ tal que $f(x) = x$.*

Para uma demonstração do lema abaixo, ver [[6], Theorem 1, pág. 69].

Lema 3.3. *Sejam H um espaço de Hilbert e C um subconjunto fechado e convexo de H. Para cada $u_0 \in H$ existe um único $v_0 \in C$ tal que*

$$\|u_0 - v_0\| = \inf_{v \in C} \|u_0 - v\|.$$

A aplicação

$$u_0 \to v_0$$

é uma função contínua, a qual chamaremos de retração natural de H sobre C, e que denotaremos por $r : H \to C$. Se H é um espaço vetorial real então a retração natural r satisfaz a seguinte desigualdade variacional:

$$\langle u_0 - r(u_0), w - r(u_0) \rangle \leq 0, \ \ para\ todo\ w \in C,$$

onde $\langle \ , \ \rangle$ denota o produto interno em H.

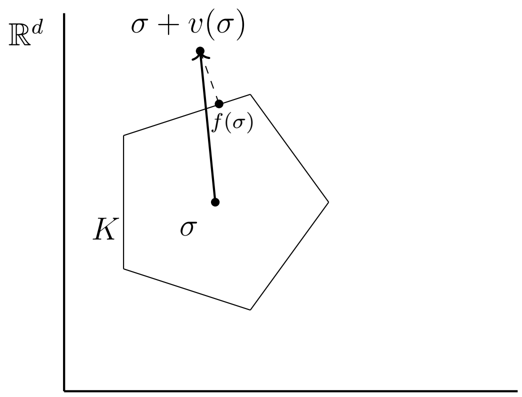
Demonstração do Teorema de Equilíbrio de Nash. Se $S_1, \dots, S_n$ são os espaços de estratégia dos jogadores $1, 2, \dots, n$, respectivamente, todos finitos e não vazios, o conjunto de estratégias mistas do jogador i, $\Delta(S_i)$, pode ser visto, sem nenhum prejuízo, como sendo o $(d_i - 1)$-simplexo canônico $\Delta^{d_i - 1} \subset \mathbb{R}^{d_i}$, onde d_i é a cardinalidade de S_i. Sob essa identificação, as funções payoff $P_i : \Delta^{d_1 - 1} \times \cdots \times \Delta^{d_n - 1} \to \mathbb{R}$, devido a sua multilinearidade, são da forma

$$P_i(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \langle v_i(\sigma_1, \dots, \sigma_n), \sigma_i \rangle + u_i(\sigma_1, \dots, \sigma_n),$$

onde $v_i : \Delta^{d_1 - 1} \times \cdots \times \Delta^{d_n - 1} \to \mathbb{R}^{d_i}$ e $u_i : \Delta^{d_1 - 1} \times \cdots \times \Delta^{d_n - 1} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas que não dependem da coordenada $\sigma_i \in \Delta^{d_i - 1}$, $1 \leq i \leq n$. Aqui, $\langle \ , \ \rangle$ denota o produto interno canônico de $\mathbb{R}^{d_i}$. Sejam $K = \Delta^{d_1 - 1} \times \cdots \times \Delta^{d_n - 1} \subset \mathbb{R}^d$, $d = d_1 + \cdots + d_n$, e $r : \mathbb{R}^d \to K$ a retração natural dada pelo Lema 3.3. Ainda, seja $f : K \to K$ a função definida por

$$f(\sigma) = r(\sigma + v(\sigma))$$

para todo $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in K$, onde $v(\sigma) = (v_1(\sigma), \ldots, v_n(\sigma))$.



Pelo Teorema de Ponto Fixo de Brouwer, existe $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*) \in K$ tal que $f(\sigma^*) = \sigma^*$.
Afirmação: σ^* é um equilíbrio de Nash. De fato, como vimos, a retração natural $r : \mathbb{R}^d \to K$ é caracterizada pela desigualdade variacional:

$$\langle y - r(y), w - r(y) \rangle \leq 0, \text{ para todo } w \in K \text{ e todo } y \in \mathbb{R}^d. \tag{1}$$

Sejam $y = \sigma^* + v(\sigma^*)$ e $w = \sigma \in K$ qualquer, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Por hipótese,

$$r(y) = r(\sigma^* + v(\sigma^*)) = f(\sigma^*) = \sigma^*.$$

Então, de (1), concluímos que

$$\langle v(\sigma^*), \sigma - \sigma^* \rangle \leq 0, \text{ para todo } \sigma \in K. \tag{2}$$

De (2), segue que

$$\langle v_i(\sigma^*), \sigma_i - \sigma_i^* \rangle \leq 0, \text{ para todo } \sigma_i \in \Delta^{d_i - 1}. \tag{3}$$

De fato, basta tomar o ponto $\sigma = (\sigma_i, \sigma_{-i}^*) \in K$ e aplicar (2).
Por (3), e desde que v_i e u_i não dependem de σ_i, temos

$$\begin{aligned} P_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) &= \langle v_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*), \sigma_i \rangle + u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) \\ &= \langle v_i(\sigma^*), \sigma_i \rangle + u_i(\sigma^*) \\ &\leq \langle v_i(\sigma^*), \sigma_i^* \rangle + u_i(\sigma^*) \\ &= P_i(\sigma^*). \end{aligned}$$

Portanto, σ^* é um equilíbrio de Nash em estratégias mistas para o jogo dado.

$\square$

No exemplo do Jogo "pedra-papel-tesoura" que descrevemos anteriormente, vimos que esse não admite equilíbrio de Nash. No entanto, quando consideramos estratégias mistas (distribuições de probabilidade sobre as estratégias puras), o Teorema de Nash nos garante a existência de pelo menos um equilíbrio. Pode-se verificar que o único equilíbrio em estratégias mistas do referido jogo é a situação em que cada jogador assume cada uma das possibilidades de movimento (pedra, papel, tesoura) com probabilidade 1/3.

4. O clássico modelo de oligopólio devido a Cournot

Suponha n $(n \geq 2)$ empresas, $\{1, 2, \ldots, n\}$, produtoras de um mesmo produto homogêneo. Denote por s_i a quantidade desse produto produzida pela empresa i e seja f_i sua função custo de produção, ou seja, para produzir a quantidade s_i, a empresa i tem um gasto de $f_i(s_i)$ reais. Suponha ainda que o preço de venda do produto no mercado, denotado por q, depende da quantidade total de produção, ou seja, $q = q(\sum_{j=1}^{n} s_j)$ (função demanda inversa). Supondo que o mercado consome a quantidade total produzida pelas empresas, $\sum_{j=1}^{n} s_j$, o lucro da empresa i é expresso por

$$p_i(s_1, \ldots, s_n) = q\left(\sum_{j=1}^{n} s_j\right) \cdot s_i - f_i(s_i).$$

Aqui, o dilema da empresa i é decidir qual a quantidade s_i de produção é mais interessante, lembrando que as empresas concorrentes estão simutaneamente com o mesmo dilema.

Por exemplo, se a situação é de duopólio (apenas duas empresas no mercado, $i \in \{1, 2\}$), com preço de produto no mercado dado por $q(s_1 + s_2) := 100 - (s_1 + s_2)$ e funções custo de produção $f_i(s_i) := 10s_i$, $i = 1, 2$, qual deve ser a previsão de quantidades produzidas por cada empresa? Com o princípio de que a empresa toma a sua decisão visando o lucro máximo, se a empresa 1 supõe que a empresa 2 decidirá pela quantidade s_2 de produção, ela buscará a quantidade s_1 que maximiza sua função lucro,

$$p_1(s_1, s_2) = (100 - s_1 - s_2)s_1 - 10s_1,$$

e se a empresa 2 supõe que a empresa 1 decidirá pela quantidade s_1, ela buscará a quantidade s_2 que maximiza sua função lucro,

$$p_2(s_1, s_2) = (100 - s_1 - s_2)s_2 - 10s_2.$$

O equilíbrio ocorre quando é alcançada uma configuração estratética $(\tilde{s}_1, \tilde{s_2})$ tal que

$$\begin{cases} p_1(s_1, \tilde{s}_2) \leq p_1(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2), & \text{para todo } s_1 \\ p_2(\tilde{s}_1, s_2) \leq p_2(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2), & \text{para todo } s_2. \end{cases} \tag{4}$$

Dos métodos do Cálculo Diferencial, os candidatos a satisfazerem o Sistema 4 de desigualdades são os que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_1}{\partial s_1}(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2) = 0 \\ \dfrac{\partial p_2}{\partial s_2}(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

que possui única solução $\tilde{s}_1 = \tilde{s}_2 = 30$. Pode-se verificar que, de fato, $(30, 30)$ é o único equilíbrio de Nash para a situação acima. Uma vez alcançada tal configuração, nenhuma das empresas possuirá motivação para alterar unilateralmente a sua quantidade de produção.

Veja que no equilíbrio de Nash da situação hipotética acima os lucros serão de R$ 900,00 reais para cada empresa. Mas e se as empresas tivessem o interesse de cooperar entre si? Existiria um equilíbrio social entre elas? Ou seja, existiria um ponto ótimo-Pareto para esse jogo? Observamos que todo par (s_1^*, s_2^*) que maximiza $p_1(s_1, s_2) + p_2(s_1, s_2)$ é um ótimo-Pareto, não sendo necessariamente verdadeira a recíproca. De qualquer modo, quando analisamos a função

$$p_1(s_1, s_2) + p_2(s_1, s_2) = (90 - s_1 - s_2)(s_1 + s_2) = 2025 - (s_1 + s_2 - 45)^2 \tag{6}$$

vemos que seu valor máximo é atingido quando $s_1 + s_2 = 45$. Assim, toda configuração estratégica do tipo $(s_1, 45 - s_1)$ é um ótimo-Pareto do jogo. Dentre essas configurações, a que agradará igualmente ambas as empresas é aquela em que $s_1 = s_2 = 22,50$, e verifica-se que, aqui, os lucros serão de R$ 1012,50 reais para cada empresa.

5. A Teoria dos Jogos aplicada à Biologia Evolutiva

"Desde que Darwin leu o trabalho de Malthus, a Teoria de Evolução se beneficiou da interação entre a Ecologia e a Economia. A Teoria dos Jogos Evolutivos pertence a esta tradição: ela funde a ecologia populacional com a teoria dos jogos" (SIGMUND; NOWAK, 1999, p. 503, tradução nossa)[1]. A Teoria de Evolução de Darwin baseia-se no princípio da sobrevivência do mais apto, segundo o qual as novas gerações da flora e da fauna sofrem mutações. Um indivíduo que sofreu uma mutação irá passá-la para seus descendentes. Apenas aqueles indivíduos mais adaptados ao seu ambiente alcançam sucesso na luta pela sobrevivência. Decorre desse princípio que, no contexto do processo de evolução, todo organismo age como se fosse uma criatura racional, o que significa uma criatura cujo comportamento é direcionado para um objetivo: maximizar o número esperado de seus descendentes. Dizemos que o organismo age "como se fosse racional" para enfatizar que ele, por si só, não é uma criatura estrategicamente planejadora.

A Teoria dos Jogos tratava originalmente de problemas enfrentados por tomadores de decisão com interesses divergentes (por exemplo, empresas competindo por um mercado, como no Modelo de Oligopólio de Cournot). No contexto da biologia evolutiva, as duas noções básicas da teoria dos jogos, a saber, estratégia e recompensa, precisam ser reinterpretadas. Aqui, uma estratégia não é um curso de ação deliberada, mas um traço hereditário; a recompensa é a aptidão darwiniana (sucesso reprodutivo médio). Os "jogadores" são membros de uma população, todos competindo por uma parcela maior de descendentes. Se várias variantes de uma característica ocorrem em uma população, a seleção natural leva a um aumento na frequência daquelas variantes com maior aptidão. Se o sucesso de uma característica não depende de sua frequência, isso acabará por levar à fixação da variante ótima. Mas se o sucesso de um traço depende da frequência, então podemos modelar uma situação de competição, e isso pode ser analisado por meio da teoria dos jogos. A situação é semelhante ao que acontece na ecologia de populações. Se a presa for

[1] "Ever since Darwin read Malthus, the theory of evolution has benefited from the interaction of ecology with economics. Evolutionary game theory belongs to this tradition: it merges population ecology with game theory."

abundante, os predadores aumentarão por um tempo. Mas esse aumento reduz a abundância de presas e, eventualmente, leva a uma diminuição dos predadores. Se entendermos o número de descendentes de um organismo como uma recompensa, descrevemos um processo que é impulsionado pela maximização das recompensas. Uma vez que o conceito de equilíbrio em um jogo também se baseia na ideia de que apenas estratégias que maximizam os retornos esperados (contra as estratégias utilizadas pelos outros jogadores) serão escolhidas, temos uma motivação para usar ideias da teoria dos jogos para explicar fenômenos evolutivos. Em [17], Maynard Smith e Price mostraram que, de fato, é possível usar o conceito de equilíbrio de Nash para lançar uma nova luz sobre a teoria de Darwin. O exemplo que apresentaremos a seguir foi tirado e adaptado de [17] e contém as principais ideias e a abordagem geral dessa área de pesquisa.

5.1. **Exemplo: Tipos pacíficos e tipos agressivos.** Lutas intraespecíficas fornecem um primeiro exemplo de mudanças em uma população que dependem da frequência de uma característica.

Na discussão que se segue, suponha que um determinado animal possa exibir um de dois tipos de comportamento: o agressivo ou o pacífico. Os tipos diferentes de comportamento são expressos quando um animal invade o território de outro animal da mesma espécie. Um tipo agressivo escala numa luta para repelir o invasor até que a lesão de um dos competidores resolva a questão. Um tipo pacífico apresenta alguma exibição convencional (uma luta de empurrar, por exemplo, onde as lesões são praticamente nulas) e cede o território se o adversário aumentar o embate. Se um dos animais for do tipo agressivo e o outro do tipo pacífico, o resultado dessa luta é que o agressivo ficará no território, enquanto que o pacífico será expulso, ficando exposto a predadores e outros perigos. Se os dois animais forem pacíficos, um deles acabará saindo do território. Suponha que cada um deles saia com probabilidade $\frac{1}{2}$. Se os dois animais forem agressivos, inicia-se uma luta, durante a qual os dois são feridos, talvez fatalmente, e no máximo um deles permanecerá no território e produzirá descendentes. A tabela abaixo apresenta um exemplo de matriz que descreve o número esperado de descendentes de cada tipo de animal considerando os possíveis encontros.

Tabela 3. Número esperado de descendentes

		Invasor	
		Pacífico	Agressivo
Defensor	Pacífico	4, 4	2, 8
	Agressivo	8, 2	1, 1

Observe que o jogo na figura acima é simétrico; isto é, ambos os jogadores têm o mesmo conjunto de estratégias $S_1 = S_2$, e suas funções payoff satisfazem $p_1(s_1, s_2) = p_2(s_2, s_1)$, para cada $s = (s_1, s_2) \in S = S_1 \times S_2$.

Esse é um exemplo de uma população de espécie única, ou seja, uma população composta por apenas uma espécie animal, onde cada indivíduo pode exibir um de vários comportamentos possíveis.

O foco, agora, é entender o processo dinâmico que se desenvolve a partir de muitos encontros aleatórios entre indivíduos na população, juntamente com o aparecimento de mutações aleatórias.

O número esperado de descendentes de um indivíduo que encontra aleatoriamente outro indivíduo na população depende tanto de seu tipo quanto do tipo de indivíduo que encontrou; para ser mais preciso, o número esperado depende da probabilidade y de que o indivíduo encontrado seja do tipo pacífico (ou da probabilidade $1 - y$ de que seja do tipo agressivo).

Cada composição populacional determina um único número real y $(0 \leq y \leq 1)$ que é a probabilidade de que um indivíduo escolhido aleatoriamente na população seja do tipo pacífico. Suponha agora que uma mutação, antes de nascer, possa "decidir" que tipo será (apresentar o tipo pacífico ou o tipo agressivo). Esta "decisão" e as subsequentes interações que a mutação terá com a população podem ser descritas pela matriz

Tabela 4. Matriz da dinâmica mutação x população

		População	
		Pacífico	Agressivo
		y	1-y
Mutação	Pacífico	4, 4	2, 8
	Agressivo	8, 2	1, 1

Na matriz acima, as colunas e as linhas representam os tipos de comportamento. Se tratarmos a matriz como um jogo, o jogador da coluna é a "população", que está implementando uma estratégia mista fixa $[y(\text{Pacífico}), (1 - y)(\text{Agressivo})]$; ou seja, com probabilidade y, um indivíduo escolhido aleatoriamente na população será do tipo pacífico e com probabilidade $1 - y$ será do tipo agressivo. O jogador da linha, que é a mutação, em contraste, escolhe seu tipo.

Se, por exemplo, a população é composta de 80% de animais do tipo pacífico $(y = 0,8)$ e 20% do tipo agressivo, e uma nova mutação é chamada a escolher o seu tipo quando nasce. O que a mutação "deveria escolher"? Se a mutação escolhe nascer do tipo pacífico, seu número esperado de descendentes é

$$(0,8) \times 4 + (0,2) \times 2 = 3,6 \text{ descendentes},$$

enquanto que se escolher nascer do tipo agressivo, seu número esperado de descendentes é

$$(0,8) \times 8 + (0,2) \times 1 = 6,6 \text{ descendentes}.$$

É, portanto, nessa situação, mais vantajoso para a mutação escolher nascer do tipo agressivo. Nenhuma mutação, é claro, tem a capacidade de decidir se será do tipo agressivo ou do tipo pacífico, porque essas características são ou herdadas ou o resultado de uma mudança aleatória na composição genética. O que acontece na prática é que indivíduos que possuem as características de um tipo agressivo irão se reproduzir mais que indivíduos que possuem as características de um tipo pacífico. Ao longo das gerações, o número dos do tipo agressivo irá aumentar, e a proporção de pacíficos para agressivos não será mais 80% para 20%. Uma população na qual a proporção de pacíficos para agressivos é 80% : 20% é, portanto, evolutivamente instável.

Agora, se assumirmos que a mutação implementa uma estratégia mista fixa $[x(\text{Pacífico}), (1-x)(\text{Agressivo})]$, as payoffs são dadas por:

$$\textbf{Mutação:}\ p_1(x,y) = x(4y + 2(1-y)) + (1-x)(8y + (1-y))$$

$$\textbf{População:}\ p_2(x,y) = y(4x + 2(1-x)) + (1-y)(8x + (1-x))$$

Nesse jogo em estratégias mistas, pode-se mostrar que os equilíbrios de Nash são $(1/5, 1/5)$, $(0,1)$ e $(1,0)$. O primeiro corresponde à situação de uma população composta por 20% de seus elementos sendo do tipo pacífico e, das mutações, 20% "escolhe nascer" do tipo pacífico. Para o segundo, a população é toda composta por tipos pacíficos e uma mutação sempre "escolhe nascer" do tipo agressivo. E o terceiro é o oposto: população toda composta por tipos agressivos, com as mutações "escolhendo nascer" do tipo pacífico. Vemos que os equilíbrios de Nash $(0,1)$ e $(1,0)$ não são evolutivamente estáveis. Na verdade, a definição de estratégia evolutivamente estável é dada pelo seguinte:

Definição 5.1. *Uma estratégia mista x^* em um jogo simétrico de 2 jogadores é uma estratégia evolutivamente estável (EEE) se, para toda estratégia mista x diferente de x^*, existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x) > 0$ tal que, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$,*

$$(1-\varepsilon)p_1(x,x^*) + \varepsilon p_1(x,x) < (1-\varepsilon)p_1(x^*,x^*) + \varepsilon p_1(x^*,x). \tag{7}$$

A interpretação biológica para essa definição é a seguinte. Uma vez que mutações ocorrem na natureza em uma base regular, estamos lidando com populações majoritariamente compostas de indivíduos "normais", com uma minoria de mutações. Interpretaremos x^* como a distribuição dos tipos entre os indivíduos normais. Considere uma mutação fazendo uso da estratégia x, e assuma que a proporção dessa mutação na população é ε. Todo indivíduo do tipo x irá encontrar um indivíduo do tipo x^* com probabilidade $1-\varepsilon$, recebendo, nesse caso, o retorno $p_1(x,x^*)$, e encontrará uma mutação do tipo x com probabilidade ε, recebendo, nesse caso, o retorno $p_1(x,x)$. A desigualdade dada em (7) nos diz, então, que em uma população na qual a proporção de mutações é ε, o retorno esperado de uma mutação (o lado esquerdo da desigualdade) é menor do que o retorno esperado de um indivíduo normal (o lado direito da desigualdade) e, assim, a proporção de mutações irá decrescer e, eventualmente, desaparecer com o tempo, com a composição da população retornando a ser majoritariamente do tipo x^*. Um "equilíbrio evolutivamente estável" é, portanto, uma estratégia mista do jogador coluna que corresponde à população que é imune a ser superada por mutações.

Uma propriedade das estratégias evolutivamente estáveis é a seguinte.

Teorema 5.2. *Se x^* é uma estratégia evolutivamente estável em um jogo simétrico de 2 jogadores, então (x^*, x^*) é um equilíbrio de Nash simétrico no jogo.*

Demonstração. Suponha x^* uma estratégia evolutivamente estável (EEE). Para mostrarmos que (x^*, x^*) é um equilíbrio de Nash, devemos provar que, para todo $x \neq x^*$,

$p_1(x,x^*) \le p_1(x^*,x^*)$ e $p_2(x^*,x) \le p_2(x^*,x^*)$. Como o jogo é simétrico, a desigualdade $p_2(x^*,x) \le p_2(x^*,x^*)$ coincide com a primeira, $p_1(x,x^*) \le p_1(x^*,x^*)$. Assim, provemos que, dado $x \neq x^*$, $p_1(x,x^*) \le p_1(x^*,x^*)$.

Seja $x \neq x^*$ qualquer. Como x^* é EEE, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$,

$$(1-\varepsilon)p_1(x,x^*) + \varepsilon p_1(x,x) < (1-\varepsilon)p_1(x^*,x^*) + \varepsilon p_1(x^*,x).$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos

$$p_1(x,x^*) \le p_1(x^*,x^*).$$

□

É importante salientarmos que a recíproca do teorema acima não é verdadeira, ou seja, existem jogos simétricos em 2 jogadores, com payoffs não negativas, admitindo equilíbrio de Nash simétrico (x^*,x^*) sem que x^* seja uma estratégia evolutivamente estável.

O exemplo que discutimos nessa seção é comumente encontrado na literatura como *Jogo Falcão-Pomba*, em analogia à situação da dinâmica populacional presa-predador. O tipo agressivo é identificado por falcão e o tipo pacífico por pomba. Em geral, a matriz de payoff que se coloca é a seguinte:

Tabela 5. Jogo Falcão-Pomba

	Falcão	Pomba
Falcão	(G-C)/2, (G-C)/2	G, 0
Pomba	0, G	G/2, G/2

onde G é o ganho em aptidão darwiniana resultante de vencer a competição, e C é o custo em aptidão darwiniana devido a uma lesão.

6. Discussões finais

Vimos que a Teoria dos Jogos é uma área de pesquisa que se encarrega da construção de modelos matemáticos que descrevem situações de competição e de cooperação entre tomadores de decisão racionais. Uma força motivadora da Teoria dos Jogos é a busca por uma abordagem unificada no tratamento de qualquer situação de interação estratégica, e de um princípio universal que nos leve a prever os possíveis desdobramentos em cada uma dessas situações, às vezes fornecendo até mesmo indicações aos tomadores de decisão sobre maneiras pelas quais eles podem alcançar seus objetivos. Inicialmente desenvolvida para dar conta de questões da Economia, a Teoria dos Jogos possui hoje aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento humano tais como Ciência Política (e.g. [8]), Psicologia e Ciências Sociais (e.g. [16]), Ciência da Computação (e.g. [13]), Biologia (e.g. [14]), Engenharia (e.g. [5]), Relações Internacionais (e.g. [1]), Saúde (e.g. [18]), Filosofia (e.g. [3]), etc.

Com essas notas, esperamos ter instigado o leitor para as potencialidades dessa área de pesquisa cujo desenvolvimento firma a sua vocação de produzir diálogo entre a Matemática e diversas outras áreas do saber humano.

7. Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer o parecerista anônimo pelos apontamentos de várias correções e sugestões que certamente contribuíram para melhorar o presente texto.

Referências

[1] Peter G. Bennett, *Modelling decisions in international relations: game theory and beyond*, Mershon International Studies Review (1995), vol. 39, Issue supplement 1, 19–52.
[2] Luitzen Egbertus Jan Brouwer, *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **71**, 97–115 (1911).
[3] B. Bruin, *Game Theory in Philosophy*, Topoi **24**, 197–208 (2005).
[4] Pradeep Dubey, *Inefficiency of Nash Equilibria*, Mathematics of Operations Research **11** (1986), no. 1, 1–8.
[5] Oleg Kapliński and Jolanta Tamošaitiene, *Game theory applications in construction engineering and management*, Ukio Technologinis ir Ekonominis Vystymas, (2010), vol. 16, n. 2, 348–363.
[6] David G. Luenberger, *Optimization by vector space methods*, John Wiley & Sons, Inc., 1969.
[7] Michael Maschler, Eilon Solan, Shmuel Zamir, *Game Theory*. Cambridge University Press, 2013.
[8] B. de Mesquita, *Game Theory, Political Economy, and the Evolving Study of War and Peace*, American Political Science Review, 100(4) (2006), 637–642.
[9] John Milnor, *A nobel prize for John Nash*, Math. Intelligencer **17** (1995), no. 3, 11–17.
[10] John Milnor, *Analytic Proofs of the "Hairy Ball Theorem" and the Brouwer Fixed Point Theorem*, The American Mathematical Monthly, vol. 85, no. 7 (1978), 521–524.
[11] Thaís Fernanda Mendes Monis, *Sobre Teoremas de Equilíbiro de Nash*, Tese de doutorado, ICMC/USP, 2010.
[12] John Forbes Nash, *Non-cooperative games*, Ann. of Math., **54** (1951), no. 2, 286–295.
[13] Yoav Shoham, *Computer science and game theory*, Communications of the ACM, vol. 51, Issue 8 (2008), 74–79.
[14] Karl Sigmund, Martin A. Nowak, *Evolutionary game theory*, Current Biology (1999), Vol. 9, no. 14, 503–505.
[15] Pim, B. A.; Souza, L. L. G.; Monis, T. F. M., *Uma breve introdução à teoria dos jogos*, C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, v. 21, p. 69–80, dez. 2021.
[16] H. M. Samieh and K. Wahba, *Knowledge Sharing Behavior from Game Theory and Socio-Psychology Perspectives*, 2007 40th Annual Hawaii International Conference on System Sciences (HICSS'07), 2007, pp. 187c–187c.
[17] J. Maynard Smith, G. R. Price, *The logic of animal conflict*, Nature **246** (1973), 15–18.
[18] Kateřina Staňková; Joel S. Brown; William S. Dalton; et al, *Optimizing Cancer Treatment Using Game Theory - A Review*, JAMA Oncol. (2019), vol. 5, n. 1, 96–103.
[19] Juan Pablo Torres-Martínez, *Fixed points as Nash equilibria*, Fixed Point Theory Appl. 2006, Art. ID 36135, 4 pp.
[20] James W. Vick, *Homology Theory - an introduction to Algebraic Topology*, Second Edition, Springer-Verlag, 1994.
[21] Jingang Zhao, *The equivalence between four economic theorems and Brouwer's fixed point theorem,* working paper, Dept. Economics, Iowa State Univ., 2002; available at econ.iastate.edu/faculty/jingang/wp/fpt.pdf

Universidade Estadual Paulista (UNESP)
Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE)
Avenida 24 A, 1515, Bela Vista
Rio Claro, SP
13506-900
Email address: thais.monis@unesp.br, b.pim@unesp.br