Revista Matemática Universitária, vol. 1, 2022
ISSN: 2675-5254 — **DOI:** 10.21711/26755254/rmu20226

COMPARAÇÃO DE TOPOLOGIAS SOBRE AS PARTES DE UM ESPAÇO MÉTRICO

MARCIO COLOMBO FENILLE

Resumo. No reticulado das topologias sobre as partes fechadas e limitadas de um espaço métrico X com mais que um ponto há duas particularmente importantes para as quais não há comparação imediata, a saber, a topologia métrica de Hausdorff e a topologia semifinita superiormente. Mostramos que estas topologias são comparáveis se, e somente se, não existem em X dois fechados não vazios e disjuntos, um dos quais limitado, com distância nula entre si, caso em que a topologia métrica de Hausdorff é estritamente mais fina que a topologia semifinita superiormente. Apresentamos alguns elementos típicos da diferença das duas topologias, considerando os casos em que o espaço contém ou não triângulos escalenos.

1. Introdução e teorema principal

A coleção de todas as topologias sobre um conjunto não vazio constitui um *reticulado* sob a ordem parcial de inclusão; ver [9]. Duas topologias que se relacionam segundo esta ordem são ditas *comparáveis* e, neste caso, aquela que contém a outra é dita *mais fina* que a outra, ou *estritamente mais fina*, caso a inclusão seja estrita. Decidir se duas dadas topologias sobre um mesmo conjunto são comparáveis e, no caso positivo, estabelecer a comparação, é um típico exercício inicial de qualquer curso de Topologia. No entanto, isto nem sempre é tarefa fácil. Mais que simples (ou não tão simples) exercício, estabelecer comparação entre topologias é um engenho por vezes decisivo para a resolução de problemas complexos, tendo em conta que algumas propriedades de um espaço podem ou não se manter quando trocamos sua topologia por uma mais fina ou por uma menos fina, e lidar com certos problemas assumindo uma ou outra topologia sobre o espaço pode ser decisivo para torná-lo mais simples ou mais complexo.

Este tipo de empreitada aparece com frequência em situações em que duas ou mais topologias sobre um dado conjunto possam ser consideradas, digamos, *naturais*, isto

Data de aceitação: 15 de julho de 2022.
Palavras chave. Comparação de topologias, partes fechadas e limitadas, topologia métrica de Hausdorff, topologia semifinita superiormente, conjuntos isósceles.

é, construídas naturalmente a partir de algo conhecido ou condição dada *a priori*. É um cenário assim que passamos a descrever.

Iniciamos com um espaço topológico (X, τ) e consideramos o conjunto $\mathfrak{p}(X)$, que chamamos as *partes* de X, constituído de todos os subconjuntos não vazios de X. A coleção das partes dos abertos não vazios de X, isto é, $\mathcal{B} = \{\mathfrak{p}(A) : \varnothing \neq A \in \tau\}$ é base para uma topologia sobre $\mathfrak{p}(X)$ que chamamos a *topologia semifinita superiormente* e denotamos por $\tau_{\mathfrak{p}}$. Impossível dizer que esta não seja uma maneira natural de se construir uma topologia sobre $\mathfrak{p}(X)$ a partir de τ; aliás, esta naturalidade carrega o fato de que a função $\mu : (X, \tau) \to (\mathfrak{p}(X), \tau_{\mathfrak{p}})$ dada por $\mu(x) = \{x\}$ é contínua. Não só isso, esta topologia desempenha um papel importante na teoria de *funções a multivalores* (funções que a cada elemento do domínio associam um subconjunto não vazio do contradomínio). Explicamos: dada uma função a multivalores $f : Y \multimap X$ entre espaços topológicos, podemos considerá-la como uma função (no sentido usual) $f : Y \to \mathfrak{p}(X)$. Se consideramos sobre $\mathfrak{p}(X)$ a topologia semifinita superiormente, então $f : Y \multimap X$ é semicontínua superiormente (como função a multivalores) se, e somente se, $f : Y \to \mathfrak{p}(X)$ é contínua (como função no sentido usual). Para detalhes sobre este assunto recomendamos [7, 8].

Ocorre que, exceto no caso em que o espaço X é unitário (possui um único ponto), o espaço topológico $(\mathfrak{p}(X), \tau_{\mathfrak{p}})$ não possui boas propriedades de separação; ele não satisfaz sequer o axioma T_1 de separação (Lema 2.1) e, portanto, não é metrizável, ainda que (X, τ) o seja. Por óbvio, é certo dizer que $\tau_{\mathfrak{p}}$ depende apenas da topologia τ, sendo pois independente de qualquer métrica que acaso exista em X a induzir τ.

Suponhamos então que seja este o caso, isto é, que (X, τ) seja metrizável e que seja d uma métrica em X que induz a topologia τ. Não há sobre $\mathfrak{p}(X)$ uma métrica natural induzida por d, mas há sobre $\mathfrak{q}(X)$, o subconjunto de $\mathfrak{p}(X)$ formado pelos fechados não vazios e limitados de X, a *métrica de Haudorff* d_H (que não pode ser estendida para $\mathfrak{p}(X)$; ver Seção 3). A topologia induzida pela métrica d_H sobre $\mathfrak{q}(X)$ é chamada a *topologia métrica de Hausdorff* e denotada por τ_H. A naturalidade a que nos referimos sobre a métrica d_H contém a informação de que a função $\mu : (X, d) \to (\mathfrak{q}(X), d_H)$ dada por $\mu(x) = \{x\}$ é uma isometria.

Portanto, dado um espaço métrico X, acabamos de definir duas topologias sobre $\mathfrak{q}(X)$, a saber, a topologia métrica de Hausdorff τ_H, induzida pela métrica d de X, e a topologia $\tau_{\mathfrak{q}}$ que faz de $(\mathfrak{q}(X), \tau_{\mathfrak{q}})$ subespaço topológico de $(\mathfrak{p}(X), \tau_{\mathfrak{p}})$, sendo pois induzida pela topologia τ de X que, por sua vez, é induzida pela métrica d. Para que não reste dúvida, $\tau_{\mathfrak{q}} = \{V \cap \mathfrak{q}(X) : V \in \tau_{\mathfrak{p}}\}$, e esta, assim como $\tau_{\mathfrak{p}}$, também será chamada topologia semifinita superiormente. Portanto, ao cabo, tanto τ_H quanto $\tau_{\mathfrak{q}}$ são induzidas pela métrica de X (embora $\tau_{\mathfrak{q}}$ dependa apenas da topologia), porém de maneiras distintas e com resultado distinto, em geral, como logo se vê.

Se X é um espaço métrico unitário, então $\mathfrak{q}(X)$ também o é, e, por conseguinte, $\tau_{\mathfrak{q}} = \tau_H$. Caso contrário, as topologias $\tau_{\mathfrak{q}}$ e τ_H são necessariamente distintas; de fato, $\tau_{\mathfrak{q}}$ não pode conter τ_H, uma vez que o espaço $(\mathfrak{q}(X), \tau_H)$ satisfaz o axioma T_1 de separação (por ser metrizável), mas o espaço $(\mathfrak{q}(X), \tau_{\mathfrak{q}})$ não satisfaz (Lema 2.2). Mais do que isso, há casos em que as topologias $\tau_{\mathfrak{q}}$ e τ_H não são sequer comparáveis. O resultado principal deste artigo, que anunciamos a seguir, fornece uma condição necessária e suficiente, sobre o espaço X, para que as topologias $\tau_{\mathfrak{q}}$ e τ_H sejam comparáveis e, sob tal condição, estabelece a comparação.

Teorema 1.1. *Sejam X um espaço métrico com mais que um ponto e $\mathfrak{q}(X)$ a coleção dos fechados não vazios e limitados de X. A topologia semifinita superiormente $\tau_{\mathfrak{q}}$ e a topologia métrica de Hausdorff τ_H sobre $\mathfrak{q}(X)$ são comparáveis se, e somente se, não existem em X dois fechados não vazios e disjuntos, um dos quais limitado, com distância nula entre si; neste caso, τ_H é estritamente mais fina que $\tau_{\mathfrak{q}}$.*

Importa observar que a condição sobre o espaço X enunciada no Teorema 1.1 não depende apenas da topologia de X, mas também, como se haveria de esperar, de sua métrica. Isto ficará mais claro com os exemplos da Seção 4.

A prova do Teorema 1.1 é apresentada na Seção 5. Antes, nas Seções 2 e 3, relembramos alguns fatos sobre as topologias $\tau_{\mathfrak{q}}$ e τ_H. Na Seção 4 introduzimos uma terminologia para elucidar a hipótese sobre o espaço X expressa no Teorema 1.1.

Como já dito, sejam as topologias $\tau_{\mathfrak{q}}$ e τ_H comparáveis ou não, $\tau_{\mathfrak{q}}$ jamais contém τ_H (exceto se X é unitário). Aliás, o Lema 2.2 fornece elementos típicos da diferença $\tau_H \setminus \tau_{\mathfrak{q}}$, a saber, todos os conjuntos $\mathfrak{q}(X) \setminus \{\{x\}\}$ com $x \in X$. No caso em que $\tau_{\mathfrak{q}}$ e τ_H não são comparáveis, tem-se ainda que τ_H não contém $\tau_{\mathfrak{q}}$ e, conforme se vê na prova do Teorema 1.1, um elemento típico da diferença $\tau_{\mathfrak{q}} \setminus \tau_H$ é da forma $\mathfrak{p}(A) \cap \mathfrak{q}(X)$, onde $A \subset X$ é um aberto que contém um fechado não vazio e limitado C tal que $d(C, X \setminus A) = 0$. Este conjunto $\mathfrak{p}(A) \cap \mathfrak{q}(X)$ é um aberto básico do espaço $(\mathfrak{q}(X), \tau_{\mathfrak{q}})$, ao passo que o anteriormente considerado $\mathfrak{q}(X) \setminus \{\{x\}\}$, embora aberto do espaço $(\mathfrak{q}(X), \tau_H)$, pode não ser um aberto básico, ou seja, não ser uma bola aberta em $\mathfrak{q}(X)$ segundo a métrica d_H. Por outro lado, é óbvio que se a diferença $\tau_H \setminus \tau_{\mathfrak{q}}$ é não vazia, então existe uma bola aberta no espaço métrico $(\mathfrak{q}(X), d_H)$ que não pertence a $\tau_{\mathfrak{q}}$. O Teorema 6.1 e sua prova mostram como obter uma tal bola. Curiosamente, a prova deste teorema traz separadamente os casos em que o espaço X é discreto ou não discreto e, no segundo caso, considera que o espaço X pode ou não conter *triângulos* (subconjuntos de três pontos) escalenos.

Toda a terminologia de topologia geral e espaços métricos segue a referência [6].

Para finalizar esta introdução, enfatizamos que, além da topologia semifinita superiormente e da topologia métrica de Hausdorff, há outras topologias importantes sobre $\mathfrak{q}(X)$ ou, mais geralmente, sobre o conjunto dos fechados não vazios de X, conhecido na literatura como *hiperespaço* de X. Deixamos aqui duas referências: o artigo [2], um dos primeiros a reunir conteúdo substancial sobre o tema, e o livro [3], com muita informação consolidada.

2. A topologia semifinita superiormente

Sejam (X, τ) um espaço topológico e $\mathfrak{p}(X)$ o conjunto dos subconjuntos não vazios de X, que doravante chamamos as *partes* de X. A coleção das partes dos abertos de X, isto é, $\mathcal{B} = \{\mathfrak{p}(A) : \varnothing \neq A \in \tau\}$ é base para uma topologia sobre $\mathfrak{p}(X)$ chamada a *topologia semifinita superiormente* e denotada por $\tau_{\mathfrak{p}}$.

Se X possui mais que um ponto, a topologia $\tau_{\mathfrak{p}}$ não é discreta (ainda que τ seja discreta). De fato, dados $a, b \in X$, o conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ é um subconjunto de $\mathfrak{p}(X)$ que não pertence a $\tau_{\mathfrak{p}}$ (verificação por conta do leitor ou da leitora). Mais que isso, exceto no caso em que X é unitário, o espaço $(\mathfrak{p}(X), \tau_{\mathfrak{p}})$ não satisfaz sequer o axioma T_1 de separação. Esta é uma consequência do seguinte lema:

Lema 2.1. *Seja (X, τ) um espaço topológico com mais que um ponto. Para cada $x \in X$, o conjunto unitário $\{\{x\}\}$ não é fechado no espaço $(\mathfrak{p}(X), \tau_{\mathfrak{p}})$.*

Demonstração. Dado um ponto $x \in X$, como X tem mais que um ponto, temos que $X \in \mathfrak{p}(X) \setminus \{\{x\}\}$. Seja U uma vizinhança básica de X em $\mathfrak{p}(X)$. Então $X \in U = \mathfrak{p}(A)$ para algum A aberto em X. Segue que $A = X$ e, assim, $\{x\} \in U$, o que mostra que $\mathfrak{p}(X) \setminus \{\{x\}\}$ não é aberto. $\square$

Suponhamos que o espaço (X, τ) seja metrizável e que seja d uma métrica em X que induz a topologia τ. Consideramos o subconjunto $\mathfrak{q}(X) \subset \mathfrak{p}(X)$ cujos elementos são as *partes fechadas e limitadas* de X, isto é, os subconjuntos de X que são não vazios, fechados e limitados. Observamos que ser fechado é uma propriedade topológica (depende apenas de τ) ao passo que ser limitado é uma propriedade métrica (depende da métrica fixada d induzindo τ).

A topologia $\tau_{\mathfrak{p}}$ induz sobre $\mathfrak{q}(X)$ uma topologia que denotamos por $\tau_{\mathfrak{q}}$ e continuamos a chamar *topologia semifinita superiormente*. Os abertos básicos do subespaço topológico $(\mathfrak{q}(X), \tau_{\mathfrak{q}})$ são da forma $\mathfrak{p}(A) \cap \mathfrak{q}(X)$ com $\varnothing \neq A \in \tau$.

Observamos que, em geral, $\mathfrak{p}(A) \cap \mathfrak{q}(X) \neq \mathfrak{q}(A)$. Por exemplo, se $X = [0, 3]$ com a métrica usual herdada da reta, então $A = (1, 3]$ é aberto em X e o intervalo $(1, 2]$ pertence a $\mathfrak{q}(A)$, por ser fechado em A, mas não pertence a $\mathfrak{p}(A) \cap \mathfrak{q}(X)$, por não ser fechado em X.

O resultado expresso no Lema 2.1 permanece válido para o subespaço $(\mathfrak{q}(X), \tau_{\mathfrak{q}})$.

Lema 2.2. *Seja X um espaço métrico com mais que um ponto. Para cada $x \in X$, o conjunto unitário $\{\{x\}\}$ não é fechado no espaço topológico $(\mathfrak{q}(X), \tau_{\mathfrak{q}})$.*

Demonstração. Dado $x \in X$, seja $C \in \mathfrak{q}(X)$ o conjunto formado por x e por um segundo ponto de X. Seja U uma vizinhança básica de C no espaço $(\mathfrak{q}(X), \tau_{\mathfrak{q}})$. Então $U = \mathfrak{p}(A) \cap \mathfrak{q}(X)$ para algum aberto A de X contendo C. Segue que $\{x\} \in U$. Portanto, toda vizinhança de C em $\mathfrak{q}(X)$ contém $\{x\}$, o que implica que o conjunto unitário $\{\{x\}\}$ não é fechado. $\square$

Segue do Lema 2.2 que o espaço $(\mathfrak{q}(X), \tau_{\mathfrak{q}})$ não satisfaz o axioma T_1 de separação e, por conseguinte, não é metrizável.

3. A topologia métrica de Hausdorff

Seja (X, d) um espaço métrico e, como antes, seja $\mathfrak{q}(X)$ o conjunto das partes fechadas e limitadas de X. Para cada subconjunto não vazio $C \subset X$ e cada número real $\varepsilon > 0$, chamamos de *ε-vizinhança* de C em X ao aberto $\mathcal{V}_\varepsilon(C) = \{x \in X : d(x, C) < \varepsilon\}$. Claro que para um subconjunto unitário $\{x\} \subset X$, sua ε-vizinhança $\mathcal{V}_\varepsilon(\{x\})$ é simplesmente a bola aberta $B_\varepsilon(x)$ de centro x e raio ε em X.

A *métrica de Hausdorff* d_H sobre $\mathfrak{q}(X)$ é definida como segue: dados $A, B \in \mathfrak{q}(X)$,

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset \mathcal{V}_\varepsilon(B) \text{ e } B \subset \mathcal{V}_\varepsilon(A)\}.$$

Uma prova de que d_H é de fato uma métrica sobre $\mathfrak{q}(X)$ pode ser vista em [7, Proposição 4.3]. Em [1, Exercício 53 do Capítulo 1] há a seguinte definição alternativa para a métrica de Hausdorff: dados $A, B \in \mathfrak{q}(X)$,

$$d_H(A,B) = \max\left\{ \sup_{a\in A} d(a,B),\ \sup_{b\in B} d(b,A)\right\}.$$

Observações simples mas que justificam a atenção voltada apenas às partes *fechadas e limitadas* do espaço X são as seguintes: (i) a métrica de Haudorff não pode ser estendida para o conjunto das partes (apenas) limitadas, uma vez que se um subconjunto $A \subset X$ é limitado mas não é fechado, então A está estritamente contido em seu fecho $\mathrm{cl}(A)$, que é ainda limitado, e tem-se $d_H(A, \mathrm{cl}(A)) = 0$; (ii) do mesmo modo, d_H não pode ser estendida para as partes (apenas) fechadas, pois se o espaço X não é limitado, dados um ponto $x \in X$ e um subconjunto fechado e ilimitado $A \subset X$ (por exemplo, $A = X$), não existe $\varepsilon > 0$ tal que $A \subset \mathcal{V}_\varepsilon(\{x\})$, donde $d_H(\{x\}, A)$ não está definido.

Os seguintes são alguns exemplos simples para auxiliar o leitor ou a leitora que pela primeira vez se depara com a métrica de Hausdorff:

(1) Dados $x, y \in X$, tem-se $d_H(\{x\},\{y\}) = d(x,y)$; assim, a função $\mu : (X,d) \to (\mathfrak{q}(X), d_H)$ dada por $\mu(x) = \{x\}$ é uma isometria.

(2) Se $x \in X$ e $B \in \mathfrak{q}(X)$, então $d_H(\{x\}, B) = \sup_{b\in B} d(x,b)$.

(3) Para os subconjuntos $A = \{(x,0) : 0 \le x \le a\}$ e $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le b^2\}$ do plano euclidiano, com $a \ge b > 0$ dados, tem-se $d_H(A,B) = \max\{a-b, b\}$.

A topologia métrica induzida sobre $\mathfrak{q}(X)$ pela métrica d_H é chamada a *topologia métrica de Hausdorff* e denotada por τ_H.

Dados $C \in \mathfrak{q}(X)$ e um número real $r > 0$, a bola aberta $B_r^H(C)$ em $\mathfrak{q}(X)$, de centro C e raio r, pode ser caracterizada como segue: para cada $A \in \mathfrak{q}(X)$,

$$A \in B_r^H(C) \ \Leftrightarrow\ \exists\, \varepsilon \in (0,r)\ :\ A \subset \mathcal{V}_\varepsilon(C) \text{ e } C \subset \mathcal{V}_\varepsilon(A).$$

Exemplo simples mas elucidativo é o da bola aberta cujo centro é um subconjunto unitário $\{x\}$ de X; temos:

$$B_r^H(\{x\}) = \bigcup_{\varepsilon\in(0,r)} \mathfrak{p}(B_\varepsilon(x)) \cap \mathfrak{q}(X).$$

4. Fechados limitadamente assintóticos

Nesta breve seção introduzimos um conceito para simplificar a referência e elucidar a hipótese expressa no Teorema 1.1 como sendo equivalente a comparabilidade das topologias métrica de Hausdorff e semifinita superiormente.

Definição 4.1. Diz-se que um espaço métrico (X,d) tem a *propriedade dos fechados limitadamente assintóticos* (a *propriedade* F.L.A.) se existem fechados não vazios e disjuntos $C, D \subset X$, um dos quais limitado, tais que $d(C,D) = 0$.

Lembramos que se $C, D \subset X$ são fechados não vazios e disjuntos, um dos quais é compacto, então tem-se necessariamente $d(C,D) > 0$. Por conseguinte:

(1) Os espaços euclidianos não tem a propriedade F.L.A., já que seus subconjuntos fechados e limitados são compactos.

(2) Se X é compacto, então X não tem a propriedade F.L.A., uma vez que seus subconjuntos fechados são compactos.

Para ilustrar, apresentamos exemplo de um espaço métrico que tem a propriedade F.L.A. Seja X o plano cartesiano munido da métrica euclidiana d. Considere sobre X a métrica limitada padrão $\bar{d}$ induzida por d, isto é, $\bar{d}(x,y) = \min\{d(x,y),1\}$. As métricas d e $\bar{d}$ induzem a mesma topologia sobre X, já que as bolas abertas de raio menor que 1 coincidem sob ambas as métricas. Considere os subconjuntos $C = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ e $D = \{(x,1/x) : x \in (0,\infty)\}$. Temos que C e D são fechados não vazios e disjuntos e, sob a métrica $\bar{d}$, ambos são limitados. Além disso, $\bar{d}(C,D) = 0$. Portanto, o espaço métrico $(X,\bar{d})$ tem a propriedade F.L.A.

Uma forma alternativa que utilizamos na introdução do artigo para expressar a propriedade F.L.A. é a seguinte: *(X,d) tem a propriedade* F.L.A. *se existe um aberto A em X contendo um fechado não vazio e limitado C tal que $d(X \setminus A, C) = 0$.*

5. Prova do teorema principal

Com a terminologia introduzida na Seção 4, o Teorema 1.1 pode ser enunciado alternativamente como segue: *para um espaço métrico X com mais que um ponto, as topologias $\tau_{\mathfrak{q}}$ e τ_H sobre $\mathfrak{q}(X)$ são comparáveis se, e somente se, X não tem a propriedade* F.L.A.*; neste caso, τ_H é estritamente mais fina que $\tau_{\mathfrak{q}}$.*

Prova do Teorema 1.1. Seja (X,d) um espaço métrico com mais que um ponto.

Seja $x \in X$ um ponto. Pelo Lema 2.2, $\mathfrak{q}(X) \setminus \{\{x\}\}$ não pertence a $\tau_{\mathfrak{q}}$. Por outro lado, como τ_H é uma topologia métrica, o conjunto unitário $\{\{x\}\}$ é fechado em $\mathfrak{q}(X)$ segundo τ_H, donde $\mathfrak{q}(X) \setminus \{\{x\}\}$ pertence a τ_H. Isto mostra que *τ_H não está contida em $\tau_{\mathfrak{q}}$*. Observamos que esta conclusão é independente do espaço X ter ou não ter a propriedade F.L.A.

Suponha que X tenha a propriedade F.L.A. e sejam $C, D \subset X$ fechados não vazios e disjuntos, com C limitado, tais que $d(C,D) = 0$. Então $C \in \mathfrak{q}(X)$ e $A = X \setminus D$ é um aberto em X contendo C, o que implica que $U = \mathfrak{p}(A) \cap \mathfrak{q}(X)$ é uma vizinhança de C em $\mathfrak{q}(X)$ segundo a topologia $\tau_{\mathfrak{q}}$. Afirmamos que U não pertence a τ_H. De fato: dado um número real $r > 0$, como $d(C,D) = 0$, existe $y \in D$ tal que $d(y,C) < r/2$. Seja $C' = C \cup \{y\}$. Então $C' \in \mathfrak{q}(X)$ e temos $C' \subset \mathcal{V}_{r/2}(C)$ e $C \subset \mathcal{V}_{r/2}(C')$, donde $C' \in B^H_r(C)$. Por outro lado, $C' \notin U$, pois $y \notin A$. Isto mostra que não existe $r > 0$ tal que $B^H_r(C) \subset U$ e, assim, U não é aberto em $\mathfrak{q}(X)$ segundo τ_H. Portanto, *$\tau_{\mathfrak{q}}$ não está contida em τ_H*. Como antes concluímos que τ_H não está contida em $\tau_{\mathfrak{q}}$, segue que as topologias $\tau_{\mathfrak{q}}$ e τ_H não são comparáveis.

Suponha que X não tenha a propriedade F.L.A. Vamos provar que $\tau_{\mathfrak{q}}$ está contida em τ_H. Seja U um aberto básico de $\mathfrak{q}(X)$ segundo $\tau_{\mathfrak{q}}$, isto é, $U = \mathfrak{p}(A) \cap \mathfrak{q}(X)$, onde A é um aberto não vazio de X. Seja C um elemento de U. Então C é um fechado não vazio e limitado de X, com $C \subset A$. Segue que $D = X \setminus A$ é um fechado de X disjunto de C. Como X não tem a propriedade F.L.A., a distância $r = d(C,D)$ é positiva. Afirmamos que $B^H_r(C) \subset U$. De fato: se $K \in B^H_r(C)$, então existe $\varepsilon \in (0,r)$ tal que $K \subset \mathcal{V}_\varepsilon(C) \subset A$, o que implica que $K \in U$. Portanto, *$\tau_{\mathfrak{q}}$ está* *contida em* τ_H. Como antes concluímos que τ_H não está contida em $\tau_{\mathfrak{q}}$, segue que τ_H é estritamente mais fina que $\tau_{\mathfrak{q}}$. □

6. Elementos típicos da diferença das topologias

Nesta seção final cumprimos nosso compromisso, assumido na introdução do artigo, de descrever bolas abertas em $(\mathfrak{q}(X), d_H)$ que não pertencem à topologia $\tau_{\mathfrak{q}}$.

Teorema 6.1. *Seja X um espaço métrico com mais que um ponto. Então existem um real $r > 0$ e um subconjunto $F \subset X$, com dois ou três pontos (logo $F \in \mathfrak{q}(X)$), tais que $B_r^H(F) \notin \tau_{\mathfrak{q}}$ e, portanto, $B_r^H(F)$ é um elemento da diferença $\tau_H \setminus \tau_{\mathfrak{q}}$.*

Para provar o Teorema 6.1 consideramos separadamente o caso em que o espaço X é discreto e o caso em que X não é discreto. No segundo caso, utilizamos dois resultados preliminares envolvendo a (in)existência de triângulos escalenos em X.

Por um *triângulo* em um espaço métrico (X, d) entendemos um subconjunto $\{x_1, x_2, x_3\} \subset X$ composto de três pontos distintos. Diz-se que um tal triângulo é *escaleno* se as três distâncias $d(x_1, x_2)$, $d(x_1, x_3)$ e $d(x_2, x_3)$ são distintas; caso contrário, diz-se que o triângulo é *isósceles*. Um número real $r > 0$ é chamado uma *distância factível* em (X, d) se existem $x, y \in X$ tais que $r = d(x, y)$.

Lema 6.2. *Seja X um espaço métrico com quatro pontos no qual todos os triângulos são isósceles. Então há no máximo três distâncias factíveis em X.*

Demonstração. Seja $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. As distâncias factíveis em X são $d(x_1, x_2)$, $d(x_1, x_3)$, $d(x_1, x_4)$, $d(x_2, x_3)$, $d(x_2, x_4)$ e $d(x_3, x_4)$, e queremos provar que no máximo três delas são distintas. Suponhamos, ao contrário disso, que (pelo menos) quatro destas distâncias sejam distintas. Então os quatro pontos de X comparecem na realização destas distâncias, pois se apenas três comparecessem teríamos apenas três distâncias. Além disso, ou todos os pontos comparecem duas vezes ou há um ponto que comparece três vezes. No primeiro caso, as quatro distâncias distintas seriam $d(x_i, x_j), d(x_i, x_k), d(x_j, x_l)$ e $d(x_k, x_l)$ para alguma permutação (i, j, k, l) de $(1, 2, 3, 4)$. Como o triângulo $\{x_i, x_j, x_k\}$ deve ser isósceles, a distância $d(x_j, x_k)$ deve ser igual a $d(x_i, x_j)$ ou $d(x_i, x_k)$. Por outro lado, também o triângulo $\{x_j, x_k, x_l\}$ deve ser isósceles, o que força que $d(x_j, x_k)$ seja igual a $d(x_j, x_l)$ ou $d(x_k, x_l)$. Assim chegamos a uma contradição. No segundo caso, isto é, se há um ponto de X que comparece três vezes na realização das quatro distâncias distintas, então estas distâncias devem ser $d(x_a, x_b), d(x_a, x_c), d(x_a, x_d)$ e $d(x_b, x_c)$ para alguma permutação (a, b, c, d) de $(1, 2, 3, 4)$. Mas disto resulta que o triângulo $\{x_a, x_b, x_c\}$ é escaleno, o que está em contradição com a hipótese sobre X. Portanto, há no máximo três distâncias factíveis em X, conforme enunciado. □

Os seguintes são modelos simples para um espaço métrico $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ que tem três distâncias factíveis e cujos triângulos são todos isósceles:

(1) No plano cartesiano, sejam x_1, x_2 e x_3 os vértices de um triângulo isósceles cujos ângulos internos, medidos em graus, não sejam $15, 15, 150$ ou $30, 75, 75$ ou $60, 60, 60$ ou $120, 30, 30$, e seja x_4 o circuncentro do triângulo.

(2) Para um modelo no espaço tridimensional, iniciamos com um triângulo isósceles $\{x_1, x_2, x_3\}$ que não seja equilátero, e consideramos a semirreta L que inicia no circuncentro e é perpendicular ao plano do triângulo. Para qualquer ponto x_4 escolhido sobre L, o espaço $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ terá todos os seus triângulos isósceles. Além disso, há apenas duas maneiras de escolher o ponto x_4 em L de modo que haja apenas duas distâncias factíveis em X, havendo três para todas as outras escolhas.

O leitor ou a leitora terá divertimento ao verificar os detalhes destes exemplos.

Lema 6.3. *Seja X um espaço métrico não discreto em que todos os triângulos são isósceles. Então existe um subespaço $X' = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ de X no qual as distâncias factíveis satisfazem*

$$0 < d(x_1, x_4) < d(x_1, x_3) = d(x_3, x_4) < d(x_1, x_2) = d(x_2, x_3) = d(x_2, x_4).$$

Demonstração. Seja $x_1 \in X$ um ponto de acumulação de X e seja $x_2 \in X$ um ponto qualquer diferente de x_1. Então existem $x_3, x_4 \in X$ tais que

$$0 < 4d(x_1, x_4) < 2d(x_1, x_3) < d(x_1, x_2).$$

Como todos os triângulos em X são isósceles, o mesmo ocorre com os triângulos em $X' = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Pelo Lema 6.2, existem (no máximo, e, portanto) exatamente três distâncias factíveis em X', a saber, $d(x_1, x_2)$, $d(x_1, x_3)$ e $d(x_1, x_4)$. Além disso, temos: (i) como o triângulo $\{x_1, x_3, x_4\}$ é isósceles e $d(x_1, x_4) < d(x_1, x_3)/2$, segue que $d(x_3, x_4) = d(x_1, x_3)$; (ii) como o triângulo $\{x_1, x_2, x_4\}$ é isósceles e $d(x_1, x_4) < d(x_1, x_2)/2$, segue que $d(x_2, x_4) = d(x_1, x_2)$; (iii) como o triângulo $\{x_2, x_3, x_4\}$ é isósceles e $d(x_3, x_4) = d(x_1, x_3) < d(x_1, x_2)/2$, segue que $d(x_2, x_3) = d(x_2, x_4)$. $\square$

Provados estes lemas, passamos à prova do Teorema 6.1.

Demonstração do Teorema 6.1. Conforme antecipado, consideramos dois casos:

• X DISCRETO: provaremos que *para cada conjunto finito $F \subset X$, com mais que um ponto, existe um número real $r > 0$ tal que $B_r^H(F) = \{F\} \notin \tau_{\mathfrak{q}}$.*

Seja $F = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$, com $n \geq 2$. Então F é aberto, fechado e limitado.

Suponha $F \neq X$. Como F é finito e $X \setminus F$ é fechado, a distância $\delta = d(F, X \setminus F)$ é positiva. Considere o real $\varepsilon = \min\{d(x_i, x_j) : x_i, x_j \in F,\ x_i \neq x_j\}$ e seja $r = \min\{\varepsilon, \delta\}$. Então $r > 0$ e temos $B_r^H(F) = \{F\}$. De fato: dado $K \in \mathfrak{q}(X)$, temos:

(i) se K não está contido em F, então existe $x \in K \setminus F$ e $d(x, F) \geq \delta$, o que implica que $x \notin \mathcal{V}_\delta(F) \supset \mathcal{V}_r(F)$, donde $K \notin B_r^H(F)$;

(ii) se K está contido propriamente em F, então existe $x_i \in F \setminus K$ e $d(x_i, K) \geq \varepsilon$, o que implica que $F \nsubseteq \mathcal{V}_\varepsilon(K) \supset \mathcal{V}_r(K)$, donde $K \notin B_r^H(F)$.

Segue de (i) e (ii) que: se $K \in B_r^H(F)$, então $K = F$, ou seja, $B_r^H(F) = \{F\}$. Vamos provar que $\{F\} \notin \tau_{\mathfrak{q}}$. Suponha o contrário; então, como $\{F\}$ é um conjunto unitário, deve existir um aberto $A \subset X$ tal que $\{F\} = \mathfrak{p}(A) \cap \mathfrak{q}(X)$, o que é impossível, já que F tem mais que um ponto.

Suponha agora $F = X$ (consequentemente, X finito). Considere o real positivo $r = \min\{d(x_i, x_j) : x_i, x_j \in X,\ x_i \neq x_j\}$. Dado um subconjunto próprio $K \subset X$, para cada $x_i \in X \setminus K$ temos $d(x_i, K) \geq r$, o que implica que $X \not\subseteq \mathcal{V}_r(K)$, donde $K \notin B_r^H(X)$. Segue que $B_r^H(X) = \{X\}$, ao passo que, pela razão de antes, $\{X\} \notin \tau_{\mathfrak{q}}$.

• X NÃO DISCRETO: provaremos que *existem um real $r > 0$ e um subconjunto $F \subset X$, com dois ou três pontos, tais que $B_r^H(F) \notin \tau_{\mathfrak{q}}$.*

Consideramos primeiro o caso em que X possui um triângulo escaleno e, em seguida, o caso em que todos os triângulos em X são isósceles. A prova é similar em ambos os casos.

Suponhamos que exista um triângulo escaleno $\{x_1, x_2, x_3\}$ em X e sejam $r_1 = d(x_1, x_2)$, $r_2 = d(x_2, x_3)$ e $r_3 = d(x_1, x_3)$. Sem perda de generalidade, podemos assumir $r_1 < r_2 < r_3$. Ponhamos $F = \{x_1, x_2\}$ e $G = \{x_2, x_3\}$. Seja $\delta > 0$ um número real tal que $r_2 + 2\delta < r_3$, e sejam $r = r_2 + 2\delta$ e $\varepsilon = r_2 + \delta$. Então $r_2 < \varepsilon < r < r_3$. Segue que $G \subset \mathcal{V}_\varepsilon(F)$ e $F \subset \mathcal{V}_\varepsilon(G)$, o que mostra que $G \in B_r^H(F)$. Vamos provar que $B_r^H(F) \notin \tau_{\mathfrak{q}}$. Suponhamos o contrário; então existe um aberto $A \subset X$ tal que $G \in \mathfrak{p}(A) \cap \mathfrak{q}(X) \subset B_r^H(F)$. Logo, $G \subset A$ e, assim, $\{\{x_3\}\} \in \mathfrak{p}(A) \cap \mathfrak{q}(X) \subset B_r^H(F)$, o que implica que $\{x_3\} \in B_r^H(F)$. Por outro lado, como $x_1 \in F$ e $r < d(x_1, x_3)$, temos que $F \not\subseteq \mathcal{V}_r(\{x_3\})$. Isto perfaz uma contradição. Portanto, $B_r^H(F) \notin \tau_{\mathfrak{q}}$.

Suponhamos agora que todos os triângulo em X sejam isósceles. Pelo Lema 6.3, existe um subespaço $X' = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ de X tal que $0 < d(x_1, x_4) < d(x_1, x_3) = d(x_3, x_4) < d(x_1, x_2) = d(x_2, x_3) = d(x_2, x_4)$. Ponhamos $F = \{x_2, x_3, x_4\}$ e $G = \{x_1, x_2, x_4\}$. Sejam ε e r número reais tais que $d(x_1, x_4) < \varepsilon < r < d(x_1, x_3)$. Segue que $G \subset \mathcal{V}_\varepsilon(F)$ e $F \subset \mathcal{V}_\varepsilon(G)$, o que mostra que $G \in B_r^H(F)$. Como antes, vamos provar que $B_r^H(F) \notin \tau_{\mathfrak{q}}$. Suponhamos o contrário; então existe um aberto $A \subset X$ tal que $G \in \mathfrak{p}(A) \cap \mathfrak{q}(X) \subset B_r^H(F)$. Logo $G \subset A$ e, assim, $\{\{x_2\}\} \in \mathfrak{p}(A) \cap \mathfrak{q}(X) \subset B_r^H(F)$, o que implica que $\{x_2\} \in B_r^H(F)$. Por outro lado, como $x_3 \in F$ e $r < d(x_2, x_3)$, temos que $F \not\subseteq \mathcal{V}_r(\{x_2\})$. Isto perfaz uma contradição. Portanto, $B_r^H(F) \notin \tau_{\mathfrak{q}}$. □

À primeira vista, a possibilidade de que todos os triângulos em um espaço métrico não discreto possam ser isósceles pode parecer estranha. Para evitar que este estranhamento persista (e provocar no leitor ou na leitora questionamentos para além da existência), apresentamos um exemplo: consideramos um conjunto infinito enumerável $X = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ e definimos uma métrica d sobre X estabelecendo que $d(x_m, x_n) = d(x_n, x_m)$ para quaisquer $m, n \geq 0$ e, para $m \leq n$,

$$d(x_m, x_n) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad m = n \\ 1/n & \text{se} \quad 0 = m < n \\ 1/m & \text{se} \quad 0 < m < n \end{cases}.$$

Deixamos ao leitor ou à leitora o trabalho de verificar que d é de fato uma métrica sobre X, que o espaço métrico (X, d) tem x_0 como (seu único) ponto de acumulação e que todos os triângulos neste espaço são isósceles.

Subespaços de espaços euclidianos nos quais todos os triângulos são isósceles são necessariamente finitos; eles são chamados *conjuntos isósceles*. Vários artigos sobre tais conjuntos foram publicados na primeira década do século corrente. Indicamos as referências [4, 5, 10] para quem se interessar pelo tema.

Referências

[1] Elon Lages Lima, *Espaços Métricos*, Rio de Janeiro: IMPA, CNPq, 1977.
[2] Ernest Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Transactions of the American Mathematical Society, v. 71, (1951), 152–182.
[3] Gerald Beer, *Topologies on closed and closed convex sets*, Mathematics and its applications 266, Kluwer Academic Publishers, 1993.
[4] Hiroaki Kido, *Classification of isosceles eight-point sets in three-dimensional euclidean space*, European Journal of Combinatorics, v. 27, no. 3, (2006), 329–341.
[5] Hiroaki Kido, *On isosceles sets in the* 4*-dimensional Euclidean space*, International Journal of Combinatorics, v. 2010, Art. ID 803210, (2010), 30 pp.
[6] James Raymond Munkres, *Topology*, Second Edition, Prentice Hall, Inc., 2000.
[7] Lech Górniewicz, *Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings*, Second Edition, Springer, Netherlands, 2006.
[8] Marcio Colombo Fenille, *A reverse viewpoint on the upper semicontinuity of multivalued maps*, Mathematica Bohemica, v. 138, no. 4, (2013), 415–423.
[9] Roland Edwin Larson and Susan Jane Andima, *The Lattice of Topologies: A Survey*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, v. 5, No. 2, 1975, 177–198.
[10] Yury Ionin, *Isosceles Sets*, The Electronic Journal of Combinatorics, v 16, no. 1, (2009), Research Paper 141, 24 pp.

Universidade Federal de Uberlândia – Faculdade de Matemática
Av. João Naves de Ávila, 2121, Santa Mônica.
38400-902 – Uberlândia MG, Brasil.
Email address: mcfenille@gmail.com