MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nº29 - dezembro 2000 - pp. 1–34

Sobre a obra matemática de Jacob Palis

Sheldon Newhouse

Resumo

Uma Conferência de Sistemas Dinâmicos comemorando o 60º aniversário de Jacob Palis teve lugar no IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada) no Rio de Janeiro, de 19 a 28 de julho de 2000. Este artigo é uma versão revisada e estendida de uma palestra que eu dei na Conferência. Vários acréscimos, incluindo a lista de referências e as seções *Bifurcações homoclínicas, Conjuntos de Cantor e invariantes fractais, Sistemas não hiperbólicos,* e *Uma visão unificada da Dinâmica*, foram feitos posteriormente por Marcelo Viana. Decidiu-se preservar o sabor da palestra mantendo a narrativa na primeira pessoa. Eu agradeço a Marcelo por suas contribuições para este artigo. Na minha opinião, elas aprimoraram bastante a apresentação da influência e abrangência matemática de Jacob Palis.

1 Introdução

Eu devo começar dizendo que Jacob tem contribuído imensamente para o desenvolvimento da Matemática. Eu não vou falar sobre todas as suas contribuições porque, de fato, em uma hora seria impossível discuti-las. Eu escolhi algumas que considero principais, e vai haver relativamente pouca novidade para os peritos, mas eu espero que possamos recordar muitas experiências destes últimos trinta e poucos anos de desenvolvimento dos Sistemas Dinâmicos.

Primeiro, para mim suas principais contribuições matemáticas se encaixam em três categorias:

- estabilidade global relacionada a conceitos de estabilidade estrutural e Ω-estabilidade;
- teoria de bifurcações, que trata de como sistemas que dependem de parâmetros mudam, como sua estrutura muda.
- formulação de idéias gerais e conjecturas que motivaram diversos resultados recentes muito importantes nesta área.

Eu vou falar sobre estes aspectos do trabalho de Jacob um pouco mais tarde. Além destes tópicos há muitos outros resultados adicionais, muitas outras coisas interessantes.

Mas, juntamente com as contribuições matemáticas que ele tem dado, deve-se apreciar e compreender a supervisão e o direcionamento da pesquisa pelos quais Jacob é responsável. Atualmente ele está na marca de

- 35 alunos de doutorado, e uns 30 "alunos-netos", originários de 10 países diferentes, sobretudo da América Latina, como vocês podem ver em sua árvore acadêmica (anexada a este artigo).

Alguns destes alunos se tornaram personagens principais em toda a teoria de Sistemas Dinâmicos, e de fato, no mundo da Matemática. Vocês sabem quem são eles tanto quanto eu, não preciso mencionar nomes. Que ele tenha sido tal inspiração para tanta gente, é um testemunho de sua visão, de sua generosidade e da liberdade de pensamento que ele tem encorajado.

Além disso, eu acho que é realmente justo dizer que em nosso tempo Jacob Palis tem sido uma das principais figuras responsáveis pelo desenvolvimento da Matemática e da Ciência, sobretudo na América Latina[1] e, de fato, em muitos outros lugares, através de

- organização de encontros, simpósios, workshops e apoio às Ciências e à Matemática em países em desenvolvimento, por exemplo, através dos encontros que organiza em Trieste, com os quais eu estou mais familiarizado.

[1] O impacto do trabalho de Jacob Palis na América Latina foi assunto de uma outra palestra na Conferência, por Alberto Verjovsky.

Ele tem facilitado o contato entre cientistas com muita dificuldade para viajar para o Oeste por razões políticas, entre outras. Eles puderam estabelecer contato com matemáticos do Ocidente em encontros, workshops e escolas onde podemos encontrar muita gente. Eu mesmo encontrei diversas pessoas da China em Trieste, numa época em que era extremamente difícil viajar para Europa Ocidental. Jacob está entre as principais pessoas que organizam e apóiam ocasiões como estas.

Além disso, ele tem sido responsável, em grande parte, pelo

- enorme crescimento do IMPA, este maravilhoso instituto, como pesquisador e, mais recentemente, também como diretor.

Eu acho que é justo dizer que o IMPA se tornou o principal centro de Matemática na América Latina e, certamente, um dos principais centros para Sistemas Dinâmicos no mundo. E isso em boa parte se deve aos seus esforços e, novamente, sua visão.

Agora eu quero ir em direção a alguns desenvolvimentos matemáticos desses vários anos de atividade de Jacob.

Estabilidade estrutural

Vamos voltar a 1960. Seja M uma variedade diferenciável compacta e conexa, sem bordo, e consideremos o espaço $\mathcal{D}^r(M)$ dos difeomorfismos C^r em M, e o espaço $\mathcal{X}^r(M)$ dos campos de vetores C^r em M, assim como certos subconjuntos bem conhecidos destes:

$\mathcal{D}^r_{ss}(M)$ = conjunto dos difeomorfismos C^1 estruturalmente estáveis em M,

$\mathcal{X}^r_{ss}(M)$ = conjunto dos campos de vetores C^1 estruturalmente estáveis em M,

Esta noção de *estabilidade estrutural* significa que toda a estrutura das órbitas persiste por perturbações C^1, se fazemos uma mudança global de coordenadas contínua.

Até onde eu sei, este conceito foi proposto primeiro por Andronov e Pontrjagin em 1937. Eles introduziram estes sistemas, que eles chamaram de sistemas "grosseiros", e a primeira parte do artigo [2] os caracterizava entre todos os campos de vetores do disco bidimensional que não são tangentes ao bordo em nenhum ponto. E o que eles diziam naquele artigo era que um campo de vetores X é estruturalmente estável se e somente se

(a) X tem apenas finitos elementos críticos (pontos singulares e órbitas periódicas), todos hiperbólicos,

(b) e não há nenhuma ligação de selas.

O próximo resultado importante relacionado com estabilidade estrutural que nós vamos mencionar é de Maurício Peixoto e está em um artigo [53] que foi publicado em 1959. Neste, ele estudava várias propriedades gerais de sistemas estruturalmente estáveis e provava que os sistemas de Andronov-Pontrjagin formavam um subconjunto aberto e denso no conjunto de todos os campos de vetores do disco bidimensional que não são tangentes ao bordo em nenhum ponto. Depois, em [54], de forma um tanto surpreendente, ele provou o seguinte teorema: em uma superfície compacta orientada M^2,

- os campos de vetores estruturalmente estáveis $\mathcal{X}^r_{ss}(M^2)$ formam um subconjunto aberto e denso no espaço $\mathcal{X}^r(M^2)$ e

- eles são completamente caracterizados pelas condições (a) e (b) de Andronov-Pontrjagin e pela condição adicional de que os conjuntos α- e ω-limite de qualquer ponto x sejam elementos críticos.

Até onde eu sei, originalmente se pensou que este artigo provaria que o resultado é verdadeiro para todas as superfícies (não necessariamente orientáveis), mas isso ainda não está feito, exceto no caso de gênero dois, para o qual Carlos Gutierrez [18] provou o resultado geral, e na topologia C^1, caso em que é uma conseqüência do assim chamado "closing-lemma" de Pugh [56].

Isto conduziu na época a duas perguntas principais:

- $\mathcal{X}^r_{ss}(M)$ é sempre não-vazio, isto é, existem sistemas estruturalmente estáveis em qualquer variedade?

- $\mathcal{X}^r_{ss}(M)$ sempre é denso no espaço $\mathcal{X}^r(M)$ de todos os campos de vetores?

Havia também perguntas análogas para difeomorfismos C^r em variedades compactas.

Bem, para decepção de algumas pessoas, a segunda questão, a densidade, tem uma resposta negativa. Smale descobriu isso por volta de 1964 ou 65. Ele mostrou que em variedades de dimensão maior ou igual a 4 existem conjuntos abertos de campos de vetores que não são estruturalmente estáveis. Depois esta dimensão foi otimizada por Bob Williams no fim dos anos 60 [68], ele conseguiu versões mais detalhadas do teorema Smale e um contra-exemplo em dimensão 3.

Nesta mesma época, nos anos 60, na União Soviética, Anosov estudava outros tipos de sistemas estruturalmente estáveis. Os sistemas que ele chamou de C-difeomorfismos [3], para os quais todo o espaço tem uma decomposição em duas distribuições contínuas invariantes pela derivada, uma das quais era exponencialmente expandida e a outra exponencialmente contraída pelos iterados. Estes sistemas, agora bem conhecidos, receberam o nome de difeomorfismos de Anosov no artigo de Smale em 1967 na revista Boletim da AMS (Sociedade Americana de Matemática). O que Anosov pode provar para estes sistemas foi que

- eles formavam um subconjunto aberto no conjunto de todos os difeomorfismos C^1 em uma variedade;

- e eles eram sistemas estruturalmente estáveis.

Os métodos eram relacionados (eu realmente não sei em que ordem) com seu célebre resultado de que fluxos geodésicos em variedades com curvatura negativa eram estruturalmente estáveis e verificavam a versão para fluxos destas condições de Anosov.

Nessa época, meados dos anos 60, qual era a situação deste tipo de Matemática? Nós tínhamos exemplos de sistemas estruturalmente estáveis em dimensão alta. Eles exibiam recorrência muito complicada e só eram conhecidos em variedades especiais. De fato, por algum tempo achava-se que as únicas variedades que admitiam difeomorfismos de Anosov eram os toros de qualquer dimensão. Smale encontrou exemplos usando outros tipos de grupos de Lie, grupos de Lie não abelianos, mas assim mesmo estes sistemas ainda estavam restritos a variedades muito particulares.

E quanto à recorrência simples, isto é, sistemas que não têm órbitas com recorrência complicada? Motivado pelos sistemas de tipo gradiente que Smale usava para transitar entre sistemas dinâmicos e topologia, foi definida uma classe especial de sistemas dinâmicos, que nós agora chamamos de sistemas de Morse-Smale. No caso dos difeomorfismos, esses são sistemas para os quais o conjunto não-errante consiste de um número finito de órbitas periódicas hiperbólicas e tais que se você tiver duas dessas órbitas suas variedades estáveis e instáveis são transversais. Foi dada uma definição análoga para campos de vetores, onde o conjunto não-errante consiste de finitos pontos críticos e órbitas periódicas, todos hiperbólicos e com as condições de transversalidade.

Smale conseguiu provar que, em qualquer variedade compacta, havia um conjunto residual de sistemas gradientes (um conjunto residual de funções) que era Morse-Smale, e suas transformações tempo-um eram difeomorfismos Morse-Smale. A parte fácil é perceber que uma função de Morse tem como conjunto não-errante apenas pontos críticos hiperbólicos. Mas não é tão simples obter a condição de transversalidade: esta é conseqüência de um teorema geral de aproximação, o teorema de Kupka-Smale, demonstrado naquela época. E Smale conjecturou que

- sistemas de Morse formam um conjunto aberto no espaço de todos os sistemas dinâmicos, tanto em $\mathcal{D}^r(M)$ quanto em $\mathcal{X}^r(M)$
- e todo sistema Morse-Smale é estruturalmente estável.

E então, em um admirável resultado em 1967, em sua tese [38] Jacob Palis provou que a primeira afirmação, a abertura, vale em geral. Ele provou a segunda afirmação, que sistemas Morse-Smale são estruturalmente estáveis, para quaisquer sistemas, difeomorfismos e campos de vetores em dimensão menor ou igual a 3.

A abordagem geométrica

Para indicar algumas das dificuldades que Jacob teve que ultrapassar para provar este teorema, vamos considerar um exemplo simples de um difeomorfismo Morse-Smale na esfera bidimensional como indicado na figura 1, onde nós temos seis pontos fixos como conjunto não-errante. Os círculos representam fontes e poços e nós temos dois pontos de sela, denotados por p_1 e p_2, tais que a variedade instável de p_1 tem interseções transversais (ligação de sela heteroclínica) com a variedade estável de p_2.

Bem, já se sabia anteriormente que havia um fenômeno de estabilidade local para pontos hiperbólicos fixos ou periódicos, o teorema de

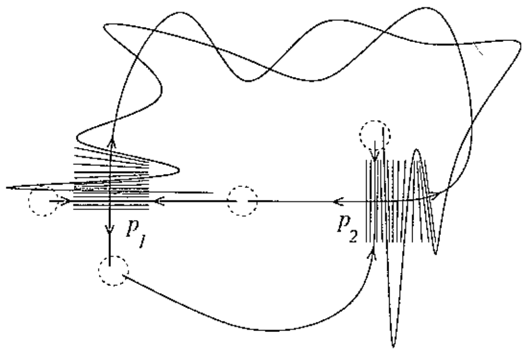

Figura 1: Famílias tubulares

Grobman-Hartman. Localmente o sistema pode ser topologicamente linearizado, isto é, em uma vizinhança de cada ponto periódico a transformação é topologicamente conjugada à sua derivada no ponto periódico. Mas você precisa fazer muito mais que isso para ter uma conjugação global, é claro, você tem que preservar globalmente as variedades estáveis e instáveis. E órbitas próximas dos pontos de sela se aproximam das fontes no passado, e no futuro se aproximam dos poços. Assim, para ter uma conjugação entre um sistema como esse e uma perturbação dele não basta olhar para figuras locais, é preciso que as colemos de uma maneira especial. E a maneira de fazê-lo não é de forma alguma óbvia, porque as linearizações locais são muito particulares, então saber como fazer a colagem de maneira compatível era um problema fundamental.

E justamente aqui se encontra o primeiro desenvolvimento fundamental do trabalho de Palis, que foram as chamadas famílias tubulares, ou folheações invariantes, que eu vou descrever com algum detalhe. Elas se mostraram muito importantes para diversos desenvolvimentos posteriores, como nós vamos ver. Tratava-se de folheações invariantes definidas na vizinhança de cada ponto periódico, uma família para a direção estável e outra para a direção instável, e elas eram compatíveis. Se duas folhas de diferentes pontos periódicos se intersectam então uma contém a outra. Essa construção não é óbvia, é bastante difícil tecnicamente – uma construção geométrica muito intrincada. Em geral as famílias tubulares têm dimensões diferentes. E a complexidade desta construção é o que motivou a restrição à dimensão três na tese de Jacob, resultados análogos para dimensão superior só surgiram mais tarde.

Em particular, pensava-se inicialmente que questões topológicas surgiriam neste contexto, já que é necessário estender transformações definidas em certos subconjuntos para conjuntos maiores. Pensava-se que a conjectura do anel, um importante problema em aberto na época, estava relacionada ao análogo para dimensões mais altas do método de famílias tubulares. Bem, eu não tenho certeza sobre os detalhes exatos de como estes problemas foram resolvidos, mas em um trabalho conjunto de Jacob e Smale, em 1968 ou 69, a construção geral das famílias tubulares foi feita e foi provada a estabilidade estrutural geral dos sistemas de Morse-Smale em qualquer dimensão [42].

É importante observar que existe muita liberdade na construção dessas famílias tubulares. As conjugações não são únicas. A existência de variedades invariantes cobrindo toda a variedade ambiente era crucial no tratamento de Anosov da estabilidade estrutural. Essas variedades invariantes são únicas, e portanto também as conjugações, se próximas da identidade, são únicas para os sistemas de Anosov. Aqui elas estão muito longe de serem únicas, e de fato a flexibilidade da escolha está fortemente relacionada à liberdade que se tem na construção das famílias tubulares. Esse foi um progresso fundamental na época e ainda é, em minha opinião, uma importante contribuição, bem cedo em sua carreira.

Isto teve dois corolários principais. O primeiro foi

- um subconjunto aberto e denso no conjunto dos sistemas gradiente de qualquer variedade consiste de campos de vetores estruturalmente estáveis;

Mais ainda, as transformações tempo-um desses campos vetoriais são difeomorfismos estruturalmente estáveis. Isto é muito mais forte. Com efeito, como nós sabemos, a relação de equivalência usual para campos de vetores é dada por homeomorfismos que levam órbitas em órbitas. Conjugação, na verdade conjugação de grupos a um parâmetro, é uma relação de equivalência mais forte. E a estabilidade estrutural para as transformações tempo-um resulta em estabilidade sob esta relação de equivalência mais forte para fluxos gradiente. Como extensão disso, o problema da existência de estabilidade estrutural foi resolvido de maneira muito positiva:

- toda a variedade possui campos de vetores e difeomorfismos estruturalmente estáveis.

As conjecturas sobre estabilidade

Naquela época, no fim dos anos 60, tendo provado que sistemas estruturalmente estáveis não são densos, Smale estava procurando um tipo mais geral de sistemas, que possuísse alguma estrutura boa e tivesse a possibilidade de formar um subconjunto denso no espaço de todos os sistemas dinâmicos. Ele formulou aquilo que foi chamado de teorema da Ω-estabilidade.

Nosso sistema é Ω-estável se quando você faz uma perturbação C^1 dele você tem uma conjugação do conjunto não-errante do primeiro sistema com o conjunto não-errante do segundo (não uma conjugação global em toda a variedade como na definição de estabilidade estrutural). Ele estudou sistemas muito especiais, os chamados difeomorfismos Axioma A, para os quais o conjunto não-errante é hiperbólico e os pontos periódicos são densos no conjunto não-errante. Ele também assumiu uma propriedade adicional, a propriedade de não ter ciclos, que permite construir as chamadas filtrações para o sistema, isto é, isolar as órbitas recorrentes em peças indecomponíveis separadas. E ele provou o teorema que diz que Axioma A e a propriedade de não ter ciclos implicavam que o difeomorfismo era Ω-estável.

Nesta mesma época Jacob provou que se você tem um sistema Axioma A e ele tem um ciclo, então não é Ω-estável. E isto levou às Conjecturas de Estabilidade que também foram apresentadas por Palis e Smale no artigo de 1969 [42]:

1. um difeomorfismo $f \in \mathcal{D}^r(M)$ é estruturalmente estável se e só se satisfaz o Axioma A e a chamada condição de transversalidade forte: sempre que variedades estável e instável se encontram, isto ocorre transversalmente;

2. e $f \in \mathcal{D}^r(M)$ é Ω-estável se e só se satisfaz o Axioma A e a propriedade de não ter ciclos.

Eles fizeram conjecturas análogas para fluxos.

Vou contar um pequeno detalhe pessoal ligado a esse teorema e à formulação dessas conjecturas. Os que estavam por perto na época devem lembrar que a primeira formulação do teorema da Ω-estabilidade tinha uma outra condição mais forte, chamada de Axioma B. O Axioma B dizia que se você tem dois conjuntos básicos e a variedade instável de um deles se acumula na do outro, então existe um ponto periódico no primeiro cuja variedade instável tem uma interseção transversal com a variedade estável do outro. E a primeira formulação do teorema da Ω-estabilidade, de fato, a formulação que está no artigo da revista Boletim da AMS diz: Axioma A mais Axioma B implicam Ω-estabilidade, ou alguma coisa nesse sentido.

Eu lembro do Smale dando um curso no seu seminário em Berkeley em 1966 ou talvez 1967. Eu era um aluno novo de doutorado que só ia de vez em quando a esse seminário, mas era um seminário muito movimentado e animado, muitas questões, comentários e discussões. Eu lembro que Charles Pugh estava lá, e Mike Shub, Morris Hirsch, Jacob Palis,... Como um estudante jovem, eu via toda aquela gente famosa na sala, e ficava só olhando o que eles estavam fazendo. Bem, naquele dia Terry Wall tinha acabado de chegar da Inglaterra e estava interessado no assunto, então ele foi ao seminário. De fato, ele ainda sentia a diferença de fuso-horário então dormiu em boa parte da palestra. E Smale estava fazendo a construção da conjugação local da Ω-estabilidade para os conjuntos básicos. Com Axioma B, ele construiu essa ordem parcial nos conjuntos básicos, e daí, a filtração para isolar cada peça, de forma que pudéssemos ter a conjugação global. E, subitamente, Terry acordou, olhou e disse calmamente: "É tudo que você precisa, a relação de ordem parcial, para obter a estabilidade?". Era um seminário agitado com muita gente. Steve voltou-se e disse: "Bem, talvez, não tenho certeza disso, eu não tenho certeza."

Neste instante, eu não sabia quem era Jacob Palis, mas ele ficou muito animado e disse: "Está certo, é isso, isso é tudo que você precisa!". E no dia seguinte, eu lembro, ele provou que se você tem um ciclo então você tem Ω-explosões, e então, de fato, esta condição de não ter ciclos era necessária para a estabilidade. Mais tarde, no artigo que realmente apareceu nas atas do simpósio [42], você encontra Axioma A e propriedade de não ter ciclos, e não Axioma A e Axioma B, o Axioma B desapareceu. Participando dessa discussão, Jacob teve um papel importante na formulação do teorema da Ω-estabilidade tal como se encontra agora.

Da hiperbolicidade para a estabilidade

Como alguém faz para ir adiante em direção a teoremas de estabilidade mais gerais e às provas dessas conjecturas? O que as pessoas sabiam naquela época? Eles sabiam que sistemas de Morse-Smale eram estruturalmente estáveis. Eles sabiam que Axioma A e a propriedade de não ter ciclos implicavam Ω-estabilidade. Como alguém consegue sistemas estruturalmente estáveis mais gerais? Uma idéia na época era pegar a construção de famílias tubulares do Jacob e estendê-la para sistemas Axioma A. Isto é, tomar uma folheação invariante em vizinhanças de conjuntos hiperbólicos complicados. Isso acabou sendo uma coisa um pouco complicada para ser feita e, de fato, ainda não é conhecido em geral, não se sabe como fazer essa construção para sistemas com dimensão alta. Mas esse método foi bem-sucedido para difeomorfismos bidimensionais, com a tese de Welington de Melo em 1971.

O progresso seguinte veio de uma forma que pode parecer um pouco curiosa. Jürgen Moser deu uma segunda prova para a estabilidade dos sistemas de Anosov, usando os chamados métodos infinitesimais. Sua idéia era a seguinte: você quer resolver a equação $h \circ f = g \circ h$ para um homeomorfismo h. Você reescreve isto como

$$f^{-1} \circ h \circ f = f^{-1} \circ g \circ h.$$

Você toma uma métrica riemanniana na sua variedade e tenta encontrar h como exponencial de algum campo vetorial contínuo v, que deve ser C^0-pequeno de forma que o homeomorfismo esteja próximo da identidade. Escrevendo $h = \exp(v)$, e também $f^{-1} \circ g = \exp(w)$ para um campo vetorial w C^1-pequeno, você obtém

$$f^{-1} \circ \exp(v) \circ f = \exp(w) \circ \exp(v).$$

Linearizando esta equação (ou usando métodos infinitesimais, que é o termo que uso), você encontra

$$\exp(Df^{-1} \circ v \circ f) = \exp(w + v).$$

a menos de um pequeno erro. Assim, tomando $\exp^{-1}$ na relação anterior, temos

$$Df^{-1} \circ v \circ f + s(v,w) = w + v,$$

onde $s(v,w)$ é pequeno. Denotando $Fv = Df^{-1} \circ v \circ f$, isso pode ser reescrito como

$$(\mathrm{I} - F)v = v - Df^{-1} \circ v \circ f = s(v,w) - w.$$

Nós conhecemos w, que é um campo vetorial C^1-pequeno, e nós estamos procurando v, um campo vetorial pequeno contínuo. Moser percebeu que se você pudesse inverter esse operador $(\mathrm{I} - F)$ no espaço dos campos vetoriais contínuos, então você poderia resolver essa relação funcional para v, usando o teorema da contração. E, de fato, a condição de Anosov é precisamente a condição que você precisa para tornar $(\mathrm{I} - F)$ inversível.

Ele conseguiu dar uma nova prova da estabilidade dos sistemas de Anosov usando métodos de campos de vetores, métodos infinitesimais, enquanto que a prova de Anosov usava fortemente a existência de variedades integrais para as distribuições expansiva e contrativa, as variedades estável e instável. Bem, naquele tempo isso era interessante porque tornava a prova de Anosov compreensível para as pessoas no Oeste, não havia nenhuma versão dela publicada em inglês. E também, eu acho que ela foi considerada um acréscimo útil, uma nova prova interessante de um resultado conhecido. Algo que surgiu daí é que você tem soluções únicas próximo da identidade, o que você também pode provar por outros métodos.

Há um outro desenvolvimento que eu devo mencionar. Entre o grupo de pessoas que estavam em Berkeley e no Oeste nesta época, a forma como os métodos de Moser ficaram conhecidos foi através de um argumento do tipo teorema da função implícita que John Mather produziu. Só que o argumento de Mather, nos seus detalhes, estava errado, porque as hipóteses de diferenciabilidade não eram satisfeitas. O que o método dava era uma solução contínua para a equação funcional, ele não provava que a solução era um homeomorfismo. Mas os argumentos podiam ser consertados. Eu acho que foi Mike Shub que observou, e era bem sabido na União Soviética também, que os sistemas de Anosov eram expansivos, e você pode usar isso para mostrar que as soluções que estão C^0-próximas da identidade são realmente bijetivas. Você tinha a prova de qualquer maneira, mesmo que o teorema da função implícita não funcionasse.

Bem longe, no meio dos EUA, Joel Robbin estava aprendendo sobre essas coisas, e eu acho que ele chocou todo mundo anunciando que podia provar, no caso C^2, que difeomorfismos Axioma A satisfazendo a condição de transversalidade forte são estruturalmente estáveis. Bem, como ele fez isso? Ele usou adaptações infinitesimais da construção das famílias tubulares. E basicamente, as conjugações não eram únicas, elas envolviam escolhas, e ele usou o fato de que a transformação de Moser $(\mathrm{I} - F)$ tinha uma inversa à direita contínua. Mesmo neste nível você pode ver novamente a influência de Jacob: no fim do artigo [60] havia um quociente que dizia:

$$(\text{Moser}) : (\text{Anosov}) = (\text{Robbin}) : (\text{Palis} - \text{Smale}).$$

A idéia era que Moser produziu uma prova infinitesimal para a estabilidade estrutural removendo a necessidade de integrar os subfibrados invariantes na construção, e Robbin produziu uma prova infinitesimal para sistemas Axioma A, removendo a necessidade das famílias tubulares.

Por razões técnicas Robbin precisou da hipótese C^2, não para as perturbações, mas para os difeomorfismos originais. Isso foi definitivamente melhorado por Clark Robinson, que provou o teorema de estabilidade estrutural geral, isto é, que difeomorfismos C^1, Axioma A, satisfazendo a condição de transversalidade forte são estruturalmente estáveis [62], e ele também provou isso para o caso de campos de vetores [61]. Sobre a Ω-estabilidade, no artigo de Smale [65] onde ele provou seu teorema de Ω-estabilidade, ele afirma que, em princípio, métodos similares podem ser usados para fluxos. De fato, era uma extensão extremamente não trivial, e foi feita por Charles Pugh e Mike Shub [57]. Neste estágio, em meados dos anos 70, eu suponho, nós tínhamos condições suficientes gerais para a estabilidade estrutural e para a Ω-estabilidade, ambos para difeomorfismos e fluxos.

Da estabilidade de volta a hiperbolicidade

Lembremos que a conjectura da estabilidade tinha também uma recíproca. Houve muita atividade focalizada nesse sentido. As primeiras tentativas envolveram mudanças na definição de estabilidade para incluir condições sobre dependência da solução com relação à perturbação (se esta é contínua, se é Lipschitz), e muitas pessoas contribuíram com trabalhos interessantes nessa direção. John Franks [14] tinha uma noção de estabilidade com dependência do tempo, com a qual ele conseguia caracterizar sistemas Axioma A e com transversalidade forte. John Guckenheimer [16] tinha uma noção de estabilidade absoluta, e assim por diante. E ainda o problema completo foi tratado em alguns casos especiais em dimensões baixas por Liao [21], Mañé [23, 24], Pliss [55] e Sannami [64].

Mas o progresso fundamental veio em 1986, quando Ricardo Mañé, um dos primeiros alunos de doutorado do Jacob, resolveu completamente o problema! Ele provou a principal parte que faltava, isto é, que sistemas estruturalmente estáveis têm que satisfazer o Axioma A [25].

Curiosamente apesar de este ser um resultado substancial que usa muita informação sobre o conjunto não-errante, Ricardo não conseguiu provar a recíproca da Ω-estabilidade, ele provou apenas a afirmação sobre a estabilidade estrutural. Foi necessário conhecimento mais detalhado e mais um bocado de esforço para Jacob provar a recíproca, e então completar a conjectura da Ω-estabilidade para difeomorfismos, ainda por volta de 1986. Para o caso dos fluxos, nenhuma das afirmações era conhecida na época, elas só foram resolvidas recentemente, por Shuhei Hayashi [19] em 1994.

No desenvolvimento desses conceitos e dessa teoria muito importante, foi preciso um período de quase 25 anos para formar o que hoje é uma das "jóias da coroa" na área dos Sistemas Dinâmicos, a caracterização completa dos sistemas estruturalmente estáveis. E como vocês viram, Jacob Palis teve um papel central nesta história.

Isso é o que eu queria dizer sobre a estabilidade, sobre o assunto estabilidade global. Agora quero ir em direção à teoria da bifurcação.

Teoria da bifurcação

Mais ou menos em 1970, eu tive o privilégio de vir ao IMPA por dois anos e iniciar com Jacob nosso programa em teoria da bifurcação. Nós começamos a trabalhar sobre o problema de compreender como se estrutura a perda de hiperbolicidade quando partimos de um sistema Morse-Smale. A idéia é a seguinte. Seja $\{\xi_\mu\}_\mu$ um arco (uma curva) de difeomorfismos começando com um sistema Morse-Smale ξ_0. Veja figura 2. Você olha para o primeiro valor $\mu = b$ do parâmetro onde o

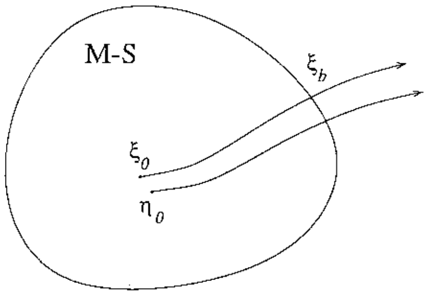

Figura 2: Bifurcações para famílias parametrizadas

sistema deixa de ser estruturalmente estável, o chamado primeiro ponto de bifurcação, e você quer descrever a estrutura destes sistemas ξ_b.

Algumas idéias e problemas foram motivados por trabalhos feitos por Jorge Sotomayor [66] para famílias de campos vetoriais a um parâmetro sobre superfícies, e também pela descrição geral de pontos periódicos para famílias de difeomorfismos a um parâmetro, obtida por Pavel Brunovsky [6]. Além disso, haviam matemáticos na União Soviética estudando problemas similares, Gavrilov e Shilnikov [15], mas nós não sabíamos disso na época, só tomamos conhecimento do trabalho deles um pouco mais tarde.

Durante esse período eu escrevi dois artigos com Jacob, [35] e [36], nos quais nós basicamente provávamos o seguinte: assumindo que no primeiro ponto de bifurcação o conjunto limite (o fecho dos conjuntos α- e ω-limite do sistema) consiste de um número finito de órbitas, nós descrevíamos completamente a estrutura do sistema no momento da bifurcação para arcos genéricos de difeomorfismos. Mas também estudamos outros assuntos relacionados com estabilidade à medida que variamos o parâmetro, depois eu vou falar um pouco mais sobre isso. Mas o conteúdo principal do primeiro artigo [35] era a descrição da bifurcação no caso em que o conjunto limite tem finitas órbitas.

No segundo artigo [36] nós consideramos sistemas onde no ponto de bifurcação o conjunto limite era realmente hiperbólico, ele se mantinha hiperbólico, mas a estabilidade estrutural e a Ω-estabilidade não eram obtidas, por causa da criação de um ciclo. Nós estudamos o caso em que o ciclo era equidimensional, isto é, as variedades estáveis de todos os pontos periódicos no ciclo tinham a mesma dimensão. Nós conseguimos provar que nesta situação a transformação de bifurcação ξ_b era ponto de acumulação de difeomorfismos que eram Axioma A e não eram Morse-Smale. Isto é,

- existiam valores do parâmetro $\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_i > \cdots$ convergindo para o primeiro ponto de bifurcação b, tais que os difeomorfismos ξ_{μ_i} satisfaziam o Axioma A e a condição de transversalidade forte e os conjuntos não-errantes $\Omega(\xi_{\mu_i})$ eram infinitos.

Além disso, os conjuntos não-errantes eram todos topologicamente distintos, de maneira que ξ_{μ_i} não poderia ser Ω-conjugado a nenhum outro. De fato, nós provamos que ξ_μ satisfaz o Axioma A e a condição de transversalidade forte para a maioria dos parâmetros $\mu > b$ próximos de b, no sentido de que tais parâmetros formam um conjunto cuja medida é uma fração próxima de 1 de pequenos intervalos $(\mu, \mu + \varepsilon)$.

Mais tarde, em um artigo com Floris Takens e Jacob [37], nós caracterizamos completamente os chamados arcos estáveis de difeomorfismos, sob a hipótese de que para cada valor do parâmetro o conjunto limite possui finitas órbitas. Um arco $\{\xi_\mu\}_\mu$ de difeomorfismos é dito estável se, dada qualquer perturbação $\{\eta_\mu\}_\mu$, como representado na figura 2, então

1. todo difeomorfismo ξ_μ do arco é conjugado a um difeomorfismo η_ν no arco perturbado, com parâmetro ν próximo

2. e a conjugação varia continuamente com o parâmetro.

Esta é a condição de estabilidade para arcos de difeomorfismos. Em [37] nós caracterizamos esta condição e, como parte deste trabalho, diversos novos conceitos e idéias foram introduzidos. Em particular, foi introduzida a noção de intervalo de rotação para endomorfismos do círculo. Neste trabalho também surgiu a rigidez forte para bifurcações sela-nó. Uma conseqüência deste fenômeno de rigidez forte para bifurcações sela-nó é que as variedades estável-forte e instável-forte são preservadas por conjugações que variam continuamente com o parâmetro (em geral, conjugações topológicas não as preservam).

Estes trabalhos foram estendidos de um modo muito significativo por Palis e Takens [43], que provaram em 1983 que

- havia um conjunto aberto e denso de famílias de sistemas gradientes a um parâmetro em qualquer variedade que eram estáveis no sentido que eu acabei de descrever (variação contínua da conjugação com o parâmetro).

E um pouco depois, em 1990, Mário Jorge Dias Carneiro e Jacob [8] provaram que isso pode ser estendido para famílias a dois parâmetros: há um subconjunto aberto e denso de famílias de sistemas gradientes que dependem de dois parâmetros e são estáveis.

Poderia-se esperar, de fato, o que se esperava naquele tempo e também um pouco antes, era que famílias de sistemas gradientes a k parâmetros seriam estáveis em um conjunto aberto e denso. Takens mostrou que isso era falso, provando que para 8 ou mais parâmetros as famílias de sistemas gradientes estáveis não são densas. Eu não sei o quão fundo já se foi neste assunto, eu acho que a conjectura ainda é que para k menor ou igual a 4 as famílias estáveis devem formar um subconjunto aberto e denso no espaço dos sistemas gradientes.

Nestas construções, a liberdade geométrica das famílias tubulares e de como você as constrói tem, novamente, importância fundamental. É interessante lembrar que nessa época as pessoas discutiam se mapas infinitesimais poderiam ser usados para estes teoremas, mas, até onde eu sei, nunca se conseguiu que isto funcionasse. Até agora métodos infinitesimais, foram usados apenas para o teorema de estabilidade estrutural geral.

Bifurcações homoclínicas

A teoria de bifurcações continuou a ser um dos principais projetos de Jacob durante os anos 80 e daí em diante. Inicialmente, o objetivo era estender alguns desses resultados, especialmente de [36], para o caso em que o conjunto limite pode ter infinitas órbitas. Em particular, agora você quer considerar arcos de sistemas mais gerais começando dentro do conjunto dos Axioma A, não apenas os sistemas de Morse-Smale. Mas isso também conduz a alguns novos problemas e idéias relacionados muito interessantes, por exemplo, dimensão fractal.

Para explicar isso vou considerar a situação descrita na figura 3, um difeomorfismo numa superfície com interseção não transversal entre as variedades estável e instável de um ponto periódico de sela p. Nós chamamos esta interseção de tangência homoclínica. E o ponto periódico

p está contido em um conjunto hiperbólico infinito H do difeomorfismo, uma ferradura. Isso significa que a tangência homoclínica é acumulada por um par de laminações, ou folheações parciais, formada pelas variedades estáveis e instáveis de todos os pontos em H.

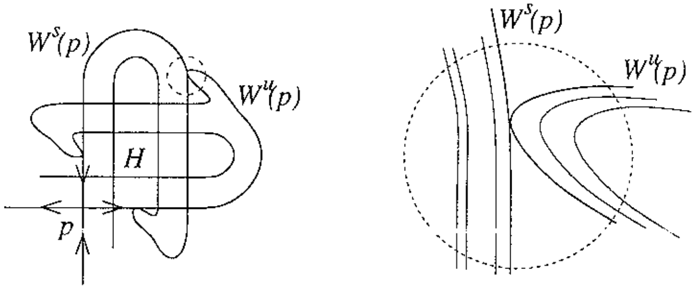

Figura 3: Tangência homocliníca associada a um conjunto hiperbólico

Um difeomorfismo como este pode ser obtido como uma primeira bifurcação ξ_b de um arco $\{\xi_\mu\}$ começando em um sistema Axioma A. A própria transformação ξ_b não é Axioma A: a tangência homoclínica implica que o conjunto não-errante não é hiperbólico. À medida que você aumenta o parâmetro, as laminações estável e instável movem-se uma com relação à outra e, sempre que há uma tangência entre uma folha de uma e uma folha da outra, o difeomorfismo não pode ser Axioma A.

Uma vez que são apenas laminações, não folheações completas de conjuntos abertos, você poderia esperar que conseguíssemos facilmente evitar essas tangências, aproveitando as lacunas entre as folhas. Entretanto, eu mostrei em minha tese [32] que isso não é verdade em geral. De fato,

- se as laminações são transversalmente espessas, isto é, se as lacunas são relativamente pequenas, é impossível evitar tangências entre folhas das duas laminações, elas existem para todo um conjunto aberto de difeomorfismos.

Eu vou chamar esse fenômeno de *persistência de tangências homoclínicas*. Depois, em [34], eu provei que esse fenômeno ocorre próximo de qualquer difeomorfismo com tangência homoclínica em uma superfície:

- sempre existem conjuntos abertos no espaço dos parâmetros, arbitrariamente próximos da bifurcação, que correspondem a tangências persistentes.

Mais tarde Clark Robinson [63] deduziu uma versão desse resultado para arcos de difeomorfismos.

Palis e Takens queriam entender este assunto em mais detalhes, e eles vieram a estabelecer uma conexão profunda entre bifurcações homoclínicas e dimensões fractais para conjuntos hiperbólicos. Eu vou explicar isso.

No artigo [36], que eu mencionei antes, Jacob e eu tínhamos mostrado que tangências entre as laminações estável e instável eram, essencialmente, a única coisa com a qual alguém deveria se preocupar. Nós mostramos que se não houvesse tangências e, de fato, a transformação não estivesse muito perto de possuir uma tangência, então o conjunto não-errante seria hiperbólico. Este era um tipo de recíproca para o fato de que as tangências são uma obstrução para hiperbolicidade.

Na configuração com a qual nós estávamos lidando o conjunto limite era finito, e nós provamos que os parâmetros para os quais a transformação estava muito perto de uma tangência tinham medida relativamente pequena próximo da bifurcação. Foi assim que provamos que a hiperbolicidade (Axioma A e transversalidade forte) prevalece próximo dessas tangências homoclínicas, em termos da medida no espaço de parâmetros. E os argumentos sugeriam que deveria ser possível evitar as tangências para a maioria dos valores do parâmetro em situações mais gerais, bastando que as laminações não fossem muito espessas.

Aí, Palis e Takens perceberam que isso poderia ser formulado em termos da dimensão fractal transversal das laminações. A condição que eles exigiam era que a soma das dimensões de Hausdorff transversais das laminações estável e instável deveria ser menor que 1. Por definição, a dimensão de Hausdorff transversal é a dimensão de Hausdorff da interseção da laminação com alguma seção transversal. Pode ser provado, neste contexto, que a definição não depende da escolha da seção transversal.

Acontece que a soma dessa dimensão de Hausdorff transversal é igual à dimensão de Hausdorff do conjunto hiperbólico H. O teorema que eles provaram por volta de 1984 tinha um enunciado muito elegante [45]:

- se a dimensão de Hausdorff $HD(H)$ do conjunto hiperbólico envolvido na tangência é menor que 1, então ξ_μ é hiperbólico (Axioma A e transversalidade forte) para a maioria dos parâmetros $\mu > b$ próximos:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} m\left(\{\mu \in (b, b+\varepsilon) : \xi_\mu \text{ é hiperbólico }\}\right) = 1, \tag{1}$$

 onde $m(\cdot)$ é a medida de Lebesgue.

Mais ou menos ao mesmo tempo eles provaram um resultado similar para o caso heteroclínico [44], no qual a tangência ocorre entre as variedades estável e instável de pontos periódicos diferentes. Na verdade, nesses artigos eles usaram uma outra noção de dimensão, chamada capacidade limite, no lugar da dimensão de Hausdorff. Mas então tornou-se claro que as duas noções de dimensões fractais coincidiam para conjuntos hiperbólicos de difeomorfismos em superfícies. Isto é discutido no livro [46, Capítulos 4-5], onde eles também explicam porque (1) pode ser formulado como um verdadeiro limite (inicialmente no caso heteroclínico eles tinham apenas um lim sup).

Em um artigo [51] que foi publicado em 1994, Jacob e Jean-Christophe Yoccoz provaram que a condição no teorema anterior é realmente ótima:

- se a dimensão de Hausdorff de H é maior que 1, então não vale a conclusão (1).

Essa afirmação e, até certo ponto, sua demonstração foram inspiradas em um resultado de John Marstrand [26] sobre diferenças aritméticas

$$K_1 - \lambda K_2 = \{a_1 - \lambda\, a_2 : a_1 \in K_1 \text{ e } a_2 \in K_2\}$$

de conjuntos de Cantor na reta: se a soma $HD(K_1) + HD(K_2)$ é maior que 1 então a diferença tem medida de Lebesgue positiva, para quase todo λ. Nesse ponto já estava claro que havia uma importante relação dessa parte da dinâmica com outros tópicos, como Teoria Geométrica da Dimensão e Análise Harmônica.

Conjuntos de Cantor e invariantes fractais

Motivado por isto, Jacob começou a formular diversas questões sobre diferenças aritméticas de conjuntos de Cantor, já visando suas aplicações a Sistemas Dinâmicos e outras áreas. Em particular, ele conjecturou que para conjuntos de Cantor regulares genéricos K_1 e K_2, a diferença aritmética tinha medida de Lebesgue zero ou continha algum intervalo. Um conjunto de Cantor é dito regular se é gerado por uma transformação expansora diferenciável. Estes conjuntos de Cantor trazem uma topologia natural, herdada das transformações correspondentes.

Bem, essa conjectura foi provada por Carlos Gustavo Moreira e Yoccoz [30], mais ou menos no começo de 1995. De fato, eles provaram uma versão forte da conjectura. Seu resultado se aplicava a um conjunto aberto, denso e com "probabilidade total" (em algum sentido natural) de conjuntos de Cantor regulares. Além disso, eles tinham interseções estáveis, o que é bem mais forte do que ter apenas um intervalo contido na diferença aritmética. Eles provaram a seguinte extensão substancial do resultado anterior sobre tangências homoclínicas [31]: para arcos genéricos de difeomorfismos $\{\xi_\mu\}_\mu$ com uma tangência homoclínica em $\mu = b$,

- para a maioria dos parâmetros $\mu > b$ próximos de b, no sentido de (1), ou ξ_μ é hiperbólico ou μ está em algum intervalo com tangências homoclínicas persistentes.

Em outras palavras, se $PT + AT$ é a união de todos intervalos de tangências persistentes com parâmetros para os quais a transformação satisfaz o Axioma A e a condição de transversalidade forte, então

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} m(PT + AT \cap (b, b+\varepsilon)) = 1.$$

O teorema de Palis e Takens diz que se a dimensão de Hausdorff da ferradura H é menor que 1 então nós temos o mesmo resultado também para o conjunto dos parâmetros correspondentes às transformações hiperbólicas. A principal novidade desse resultado está no caso de dimensão de Hausdorff maior que 1.

Há uma questão muito natural que surge: o que se pode dizer sobre a dinâmica no caso não hiperbólico? Bem, Jacob tem alguns trabalhos recentes junto com Yoccoz [52] sobre isso, Yoccoz vai falar deles mais tarde nessa conferência, então não vou discuti-los. [2] Mas a questão é que eles definem os chamados conjuntos não uniformemente hiperbólicos, ou ferraduras não uniformemente hiperbólicas, que são uma extensão de conjuntos hiperbólicos ainda com diversas propriedades boas. Eles provam que se a dimensão de Hausdorff do conjunto hiperbólico original H não é muito maior que 1 (eles têm uma condição técnica precisa), então os difeomorfismos ξ_μ são não uniformemente hiperbólicos para a maioria dos parâmetros $\mu > b$ próximos de b. Isto é, se NUH é o conjunto dos parâmetros tais que o conjunto não-errante é não uniformemente hiperbólico então

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} m(NUH \cap (b, b+\varepsilon)) = 1,$$

desde que a dimensão de Hausdorff não seja muito maior que 1.

Agora vou dizer algumas palavras sobre o caso com dimensão mais alta. A maioria destas coisas está provada para difeomorfismos em superfícies, e no caso de dimensões mais altas aparecem várias dificuldades sérias. A principal razão é que as laminações estável e instável não precisam ser transversalmente diferenciáveis. Em geral, não se sabe, sequer, quando é que a dimensão de Hausdorff transversal está bem definida. De fato, a geometria dos conjuntos hiperbólicos em dimensão alta é muito menos compreendida que no caso de superfícies. Em geral, a dimensão de Hausdorff e a capacidade limite não são iguais e não variam continuamente com o sistema dinâmico.

Entretanto, e esse é um trabalho do qual eu gosto especialmente, Jacob e Marcelo Viana conseguiram ultrapassar essas dificuldades e, por volta de 1989, provar a extensão do resultado sobre tangências homoclínicas persistentes para dimensões mais altas. O resultado foi publicado em [47].

Além disto eles têm resultados muito recentes junto com Moreira (como ouvimos em sua palestra nesta conferência) que mostram que a relação entre dimensão fractal e abundância de hiperbolicidade no espaço de parâmetros permanece válida para famílias de difeomorfismos em dimensão arbitrária.

[2] Resumos das palestras da Conferência podem ser encontrados em www.impa.br/~dsconf/.

Sistemas não hiperbólicos

O estudo de bifurcações e estes resultados que mencionei são parte de um esforço para ultrapassar o contexto dos sistemas hiperbólicos e entender sistemas dinâmicos muito gerais. Eu acho que desde o começo Jacob estava convencido que a teoria de bifurcações era o jeito certo de fazer isto, ou pelo menos, um ponto essencial para a compreensão de sistemas que não são hiperbólicos, que não são estruturalmente estáveis. E à medida que a teoria de bifurcações homoclínicas se desenvolveu, ele foi ficando mais e mais convencido de que elas deveriam ter um papel chave neste contexto.

Em 1989 houve um artigo de Benedicks e Carleson [4] no qual eles provaram que dinâmicas não uniformemente hiperbólicas eram freqüentes na chamada família de Hénon de transformações do plano

$$h(x, y) = (1 - ax^2 + y, bx).$$

Isto é, para parâmetros a e b com valores em um conjunto com medida de Lebesgue positiva, as transformações têm um atrator "estranho" não uniformemente hiperbólico. Essa era uma extensão surpreendente de um trabalho pioneiro muito importante de Jakobson [20], do fim dos anos 70, no qual ele obtivera um resultado similar para a família quadrática na reta $q(x) = 1 - ax^2$.

Mesmo antes que o artigo deles aparecesse, Palis sugeriu que esse resultado deveria ser verdadeiro, mais geralmente, para arcos genéricos $\{\xi_\mu\}$ de difeomorfismos com tangências homoclínicas em superfícies. Veja, sabia-se que as transformações de retorno de ξ_μ a certas regiões próximas da tangências pareciam com o modelo de Hénon, então essa era a idéia. Daí, ele propôs esse problema para dois de seus alunos na época, Leonardo Mora e Marcelo Viana. E Mora e Viana [27] conseguiram mostrar que a abordagem de Benedicks e Carleson se estendia para sistemas dissipativos mais gerais, que são chamados de transformações do tipo Hénon, e a partir disso, em 1990, eles provaram a conjectura de Jacob.

Esse tipo de resultados (há muitos outros) relacionando tangências homoclínicas com outros tipos de dinâmica complicada, convenceram Jacob que tangências homoclínicas deveriam ser o tipo de noção que unifica a compreensão de sistemas não-hiperbólicos, pelo menos em dimensões baixas. Ele fez a seguinte conjectura:

- a união dos difeomorfismos Axioma A com aqueles que têm tangência homoclínica é densa em $\mathcal{D}^r(M)$, se M é uma superfície.

Em outras palavras, todo difeomorfismo C^r em uma superfície que não está no fecho dos sistemas Axioma A é aproximado por outros difeomorfismos que têm tangências homoclínicas.

Como vocês provavelmente sabem, essa conjectura foi provada por outros ex-alunos de Jacob, Enrique Pujals e Martin Sabarino, no caso $r = 1$. O artigo deles acabou de sair [58]. De fato, o resultado tinha sido anunciado por Araújo e Mañé no início dos anos 90, mas eles nunca deram uma prova. Como uma conseqüência dos métodos que usaram, Pujals e Sambarino também conseguiram um outro resultado muito interessante [59]:

- qualquer arco de difeomorfismos em uma superfície no qual a entropia topológica não seja constante deve conter uma tangência homoclínica.

Há uma versão da conjectura anterior para dimensões altas, que diz que a união dos difeomorfismos Axioma A com aqueles que têm tangência homoclínica ou ciclo heterodimensional deve ser densa em $\mathcal{D}^r(M)$. Um ciclo é chamado heterodimensional se as variedades estáveis dos pontos periódicos envolvidos no ciclo não possuem todas a mesma dimensão. Parece que vários grupos têm feito progressos na direção dessa conjectura em dimensão alta, de fato haverá algumas palestras sobre o assunto nesta conferência, mas uma prova completa ainda não foi obtida.

De volta a fins dos anos 80, Jacob sugeriu o estudo dos ciclos heterodimensionais a Lorenzo Díaz, como seu problema de tese. A idéia era complementar nossos próprios resultados em [36]. Como disse antes, nós estudamos o caso eqüidimensional. Só que Díaz descobriu que as conclusões eram diferentes para os ciclos heterodimensionais: na maioria das vezes o difeomorfismo de bifurcação ξ_b não é acumulado por difeomorfismos hiperbólicos, de fato, há um intervalo inteiro $(b, b+\varepsilon)$ tal que ξ_μ não é hiperbólico, não é estruturalmente estável, para qualquer parâmetro μ nesse intervalo. Estes resultados estavam em sua tese [11] e foram muito desenvolvidos em uma série de artigos conjuntos com Jorge Rocha, outro ex-aluno de Jacob. Veja por exemplo [13].

E, algum tempo depois, tornou-se claro que os ciclos heterodimensionais também tinham uma ligação importante com o fenômeno dos atratores não hiperbólicos robustos, que eu vou mencionar em um instante.

Uma visão unificada da dinâmica

Por volta de 1995, Jacob tinha formulado muitas idéias e conjecturas, juntamente com um quadro coerente de quais poderiam ser os comportamentos típicos de sistemas não hiperbólicos. Isso saiu em um artigo que seria depois publicado no volume da revista Astérisque dedicado a A. Douady [41]. O ingrediente principal das conjectura é que todo sistema pode ser aproximado por outro tendo apenas finitos atratores, cujas bacias de atração contêm quase todo ponto. De fato, esse sistemas devem ter grande probabilidade no espaço dos parâmetros, em algum sentido natural. E o atrator deve ter propriedades boas, tais como existência da chamada medida de Sinai-Ruelle-Bowen.

É interessante observar que a idéia de que a maioria dos sistemas dinâmicos têm um número finito de atratores remonta a René Thom, nos anos 60, apesar de ele não ter deixado claro o significado de "maioria". Certamente, ele foi motivado pelas idéias de Smale em teoria hiperbólica na época [3], onde o ponto de vista era, fundamentalmente, topológico. Talvez por causa disso, foi entendido que Thom tinha em mente um subconjunto residual (segunda categoria de Baire) de sistemas dinâmicos e, nesse sentido, a afirmação sobre finitude é falsa [33]. A conjectura de Jacob é uma reformulação muito interessante dessa idéia clássica, em um contexto novo e mais probabilístico.

Assim, sabe-se que essa conjectura vale para transformações quadráticas no intervalo, como uma conseqüência de um trabalho feito por Lyubich, Martens e Nowicki. Veja [22]. E tanto Misha Lyubich quanto Artur de Melo vão falar nesta conferência sobre os seus trabalhos recentes com Welington de Melo, onde eles estendem isto para famílias muito mais gerais de transformações unimodais analíticas.

Em dimensões mais altas, têm surgido resultados muito interessantes que, eu creio, são pelo menos parcialmente motivados pelas questões e

[3] "Toutefois, selon certaines idées récentes de S. Smale, si la varieté est compacte, presque tout champ X présenterait un nombre fini d'attracteurs isolément structurellement stables"[67, p. 56]

conjecturas de Jacob.

Há os trabalhos de Díaz, Pujals, Ures e Bonatti [12, 5] onde eles caracterizam os conjuntos robustos de difeomorfismos em qualquer dimensão. Um conjunto invariante é robusto se é transitivo e permanece transitivo sob perturbações C^1-pequenas do sistema. Eles provaram que conjuntos robustos deveriam ter a chamada decomposição dominada, que é uma decomposição do espaço tangente em duas distribuições contínuas tais que uma é mais expansora que a outra em todo ponto. Provaram ainda que em dimensão 3 ao menos uma das distribuições é hiperbólica, ou expansiva ou contrativa. Isso é chamado de hiperbolicidade parcial.

Além disso, Alves, Bonatti e Viana provaram a existência e a finitude de atratores ergódicos, ou medidas de Sinai-Ruelle-Bowen, para certos sistemas parcialmente hiperbólicos, em um artigo [1] que acabou de sair.

E há também um trabalho muito importante de Carlos Morales, Maria José Pacífico e Enrique Pujals [28, 29], caracterizando os conjuntos robustos de fluxos arbitrários em dimensão 3. Conjuntos robustos contendo apenas órbitas regulares devem ser hiperbólicos, então o caso mais interessante é quando o conjunto contém alguma singularidade. Eles provaram que qualquer conjunto robusto que contém uma singularidade é um atrator ou um repulsor, tipo Lorenz, isto é, tem todas as principais características do modelo de Lorenz geométrico de Guckenheimer-Williams [17].

Muitos outros resultados

Existem muitas outras contribuições importantes de Palis. Por exemplo, seu trabalho em invariantes de módulos, isto é, caracterização de sistemas com a propriedade de que o número de tipos topológicos de perturbações depende de uma quantidade finita de parâmetros reais. Em [40],

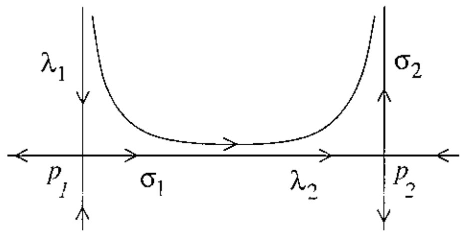

Figura 4: Módulos de conjugação em ligações de selas

ele descobriu um invariante diferenciável para conjugação topológica entre fluxos com ligação de sela como na figura 4. De fato, dois fluxos destes são conjugados se somente se eles têm a mesma razão entre autovalores

$$\frac{\lambda_1}{\sigma_2}$$

E, junto com Welington de Melo e Sebastian van Strien [9, 10], ele obteve a caracterização destes sistemas com recorrência moderada em um vasto conjunto de situações.

Como parte do desenvolvimento da teoria de módulos temos a descrição de campos de vetores holomorfos típicos, os tipos topológicos de campos de vetores lineares holomorfos em CP^n, que foi feita por César Camacho, Nicolaas Kuiper e Jacob em [7].

Eu devo mencionar também a série de artigos que ele tem com Yoccoz, onde eles estudam a rigidez dos centralizadores de difeomorfismos, que são os conjuntos dos difeomorfismos que comutam com um dado difeomorfismo. Em uma série de artigos [48, 49, 50], eles provaram que, genericamente, o centralizador de um difeomorfismo hiperbólico é trivial, contém apenas os iterados da transformação.

De fato, já na sua tese, Jacob estava interessado em um problema relacionado: saber o quão freqüentemente difeomorfismos podem ser mergulhados em fluxos. Ele observou que havia conjuntos abertos de difeomorfismos para os quais as condições topológicas naturais que você precisaria para mergulhá-los em um fluxo não eram suficientes: havia conjuntos abertos nesses difeomorfismos que não mergulham em fluxos. E, um pouco depois, em [39], ele provou que, C^1 genericamente, difeomorfismos não mergulham em fluxos.

Se você olhar para a lista dos trabalhos científicos do Jacob anexada a este artigo, você vai ver que eu poderia continuar por um longo tempo. Vou apenas concluir com algumas observações pessoais.

Conclusão

É interessante notar que Jacob teve 16 alunos de doutorado com teses terminadas até 1993. Desde 1993 ele é diretor do IMPA, e seus alunos até 2000 somam 35. Pode-se concluir que a administração não é tão ruim para alguém com os talentos de Jacob Palis...

De qualquer maneira, ele tem exibido liderança, como eu disse, direcionamento e abrangência na formulação de conjecturas, e estimulado muitas pessoas pelo mundo afora. O âmbito de seus interesses de pesquisa tem crescido muito através da sua colaboração com Yoccoz, com Viana, com muitas outras pessoas, e de muita atividade, muitos resultados interessantes, que vão fundo no estudo dos sistemas dinâmicos.

Por ocasião do seu 60° aniversário, todos nós desejamos que continue com suas contribuições à ciência por muitos, muitos anos.

Tradução: Anne Michelle Dysman Gomes

Referências

[1] J. F. Alves, C. Bonatti, and M. Viana. SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly expanding. *Invent. Math.*, 140(2):351–398, 2000.

[2] A. Andronov and L. Pontryagin. Systèmes grossiers. *Dokl. Akad. Nauk. USSR*, 14:247–251, 1937.

[3] D. V. Anosov. Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 90:209, 1967.

[4] M. Benedicks and L. Carleson. The dynamics of the Hénon map. *Ann. of Math. (2)*, 133(1):73–169, 1991.

[5] C. Bonatti, L. J. Díaz, and E. R. Pujals. A C^1-generic dichotomy for diffeomorphisms: weak forms of hyperbolicity or infinitely many sinks or sources. Preprint, 1999.

[6] P. Brunovský. On one-parameter families of diffeomorphisms. II. Generic branching in higher dimensions. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 12:765–784, 1971.

[7] C. Camacho, N. H. Kuiper, and J. Palis. The topology of holomorphic flows with singularity. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 48:5–38, 1978.

[8] M. J. Dias Carneiro and J. Palis. Bifurcations and global stability of families of gradients. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 70:103–168, 1990.

[9] W. de Melo and J. Palis. Moduli of stability for diffeomorphisms. In *Global theory of dynamical systems (Proc. Internat. Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill., 1979)*, pages 318–339. Springer, Berlin, 1980.

[10] W. de Melo, J. Palis, and S. J. van Strien. Characterising diffeomorphisms with modulus of stability one. In *Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980 (Coventry, 1979/1980)*, pages 266–285. Springer, Berlin, 1981.

[11] L. J. Díaz. Robust nonhyperbolic dynamics and heterodimensional cycles. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 15(2):291–315, 1995.

[12] L. J. Díaz, E. R. Pujals, and R. Ures. Partial hyperbolicity and robust transitivity. *Acta Math.*, 183(1):1–43, 1999.

[13] L. J. Díaz and J. Rocha. Large measure of hyperbolic dynamics when unfolding heteroclinic cycles. *Nonlinearity*, 10(4):857–884, 1997.

[14] J. M. Franks. Time dependent stable diffeomorphisms. *Invent. Math.*, 24:163–172, 1974.

[15] N. K. Gavrilov and L. P. Šil'nikov. Three-dimensional dynamical systems that are close to systems with a structurally unstable homoclinic curve. I. *Mat. Sb. (N.S.)*, 88(130):475–492, 1972.

[16] J. Guckenheimer. Absolutely Ω-stable diffeomorphisms. *Topology*, 11:195–197, 1972.

[17] J. Guckenheimer and R. F. Williams. Structural stability of Lorenz attractors. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 50:59–72, 1979.

[18] C. Gutiérrez. Structural stability for flows on the torus with a cross-cap. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 241:311–320, 1978.

[19] S. Hayashi. Connecting invariant manifolds and the solution of the C^1 stability and Ω-stability conjectures for flows. *Ann. of Math. (2)*, 145(1):81–137, 1997.

[20] M. V. Jakobson. Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps. *Comm. Math. Phys.*, 81(1):39–88, 1981.

[21] S.-T. Liao. On the stability conjecture. *Chinese Ann. Math.*, 1(1):9–30, 1980.

[22] M. Lyubich. Almost every real quadratic map is either regular or stochastic. *Annals of Math.* To appear.

[23] R. Mañé. Contributions to the stability conjecture. *Topology*, 17(4):383–396, 1978.

[24] R. Mañé. An ergodic closing lemma. *Ann. of Math. (2)*, 116(3):503–540, 1982.

[25] R. Mañé. A proof of the C^1 stability conjecture. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 66:161–210, 1988.

[26] J. M. Marstrand. Some fundamental geometrical properties of plane sets of fractional dimensions. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 4:257–302, 1954.

[27] L. Mora and M. Viana. Abundance of strange attractors. *Acta Math.*, 171(1):1–71, 1993.

[28] C. A. Morales, M. J. Pacifico, and E. R. Pujals. Robust transitive singular sets for 3-flows are partially hyperbolic attractors and repellers. Preprint, 1999.

[29] C. A. Morales, M. J. Pacífico, and E. R. Pujals. On C^1 robust singular transitive sets for three-dimensional flows. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 326(1):81–86, 1998.

[30] C. G. Moreira and J.-C. Yoccoz. Stable intersections of regular Cantor sets with large Hausdorff dimension. Preprint 1998.

[31] C. G. Moreira and J.-C. Yoccoz. Tangences homocliniques stables pour les ensembles hyperboliques de grande dimension fractale. Preprint 2000.

[32] S. E. Newhouse. Nondensity of Axiom A(a) on S^2. In *Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968)*, pages 191–202. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970.

[33] S. E. Newhouse. Diffeomorphisms with infinitely many sinks. *Topology*, 13:9–18, 1974.

[34] S. E. Newhouse. The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 50:101–151, 1979.

[35] S. E. Newhouse and J. Palis. Bifurcations of Morse-Smale dynamical systems. In *Dynamical systems (Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971)*, pages 303–366, New York, 1973. Academic Press.

[36] S. E. Newhouse and J. Palis. Cycles and bifurcation theory. *Astérisque*, 31:43–140, 1976.

[37] S. E. Newhouse, J. Palis, and F. Takens. Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 57:5–71, 1983.

[38] J. Palis. On Morse-Smale dynamical systems. *Topology*, 8:385–404, 1968.

[39] J. Palis. Vector fields generate few diffeomorphisms. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 80:503–505, 1974.

[40] J. Palis. A differentiable invariant of topological conjugacies and moduli of stability. *Astérisque*, 51:335–346, 1978.

[41] J. Palis. A global view of dynamics and a conjecture on the denseness of finitude of attractors. *Astérisque*, 261:xiii–xiv, 335–347, 2000. Géométrie complexe et systèmes dynamiques (Orsay, 1995).

[42] J. Palis and S. Smale. Structural stability theorems. In *Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968)*, pages 223–231. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970.

[43] J. Palis and F. Takens. Stability of parametrized families of gradient vector fields. *Ann. of Math. (2)*, 118(3):383–421, 1983.

[44] J. Palis and F. Takens. Cycles and measure of bifurcation sets for two-dimensional diffeomorphisms. *Invent. Math.*, 82(3):397–422, 1985.

[45] J. Palis and F. Takens. Hyperbolicity and the creation of homoclinic orbits. *Ann. of Math. (2)*, 125(2):337–374, 1987.

[46] J. Palis and F. Takens. *Hyperbolicity and sensitive-chaotic dynamics at homoclinic bifurcations.* Cambridge University Press, 1993.

[47] J. Palis and M. Viana. High dimension diffeomorphisms displaying infinitely many periodic attractors. *Ann. of Math. (2)*, 140(1):207–250, 1994.

[48] J. Palis and J.-C. Yoccoz. Centralizers of Anosov diffeomorphisms on tori. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 22(1):99–108, 1989.

[49] J. Palis and J.-C. Yoccoz. Rigidity of centralizers of diffeomorphisms. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 22(1):81–98, 1989.

[50] J. Palis and J.-C. Yoccoz. Differentiable conjugacies of Morse-Smale diffeomorphisms. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 20(2):25–48, 1990.

[51] J. Palis and J.-C. Yoccoz. Homoclinic tangencies for hyperbolic sets of large Hausdorff dimension. *Acta Math.*, 172(1):91–136, 1994.

[52] J. Palis and J. C. Yoccoz. Nonuniformily hyperbolic horseshoes unleashed by homoclinic bifurcations and zero density of attractors. *C. R. Ac. Sc. Paris*, 2000. To appear.

[53] M. M. Peixoto. On structural stability. *Ann. of Math. (2)*, 69:199–222, 1959.

[54] M. M. Peixoto. Structural stability on two dimensional manifolds. *Topology*, 1:101-120, 1962.

[55] V. A. Pliss. Analysis of the necessity of the conditions of Smale and Robbin for structural stability for periodic systems of differential equations. *Differencial'nye Uravnenija*, 8:972–983, 1972.

[56] C. Pugh. The closing lemma. *Amer. J. Math.*, 89:956–1009, 1967.

[57] C. Pugh and M. Shub. The Ω-stability theorem for flows. *Invent. Math.*, 11:150–158, 1970.

[58] E. R. Pujals and M. Sambarino. Homoclinic tangencies and hyperbolicity for surface diffeomorphisms: a conjecture of Palis. *Annals of Math.*, 2000. To appear.

[59] E. R. Pujals and M. Sambarino. On homoclinic tangencies, hyperbolicity, creation of homoclinic orbits and varation of entropy. *Nonlinearity*, 13(3):921–926, 2000.

[60] J. W. Robbin. A structural stability theorem. *Ann. of Math. (2)*, 94:447–493, 1971.

[61] C. Robinson. Structural stability of vector fields. *Ann. of Math. (2)*, 99:154–175, 1974.

[62] C. Robinson. Structural stability of C^1 diffeomorphisms. *J. Differential Equations*, 22(1):28–73, 1976.

[63] C. Robinson. Bifurcation to infinitely many sinks. *Comm. Math. Phys.*, 90(3):433–459, 1983.

[64] A. Sannami. The stability theorems for discrete dynamical systems on two-dimensional manifolds. *Nagoya Math. J.*, 90:1–55, 1983.

[65] S. Smale. Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73:747–817, 1967.

[66] J. Sotomayor. Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 43:5–46, 1974.

[67] R. Thom. *Stabilité structurelle et morphogénèse.* W. A. Benjamin, Inc., Reading, Mass., 1972. Essai d'une théorie générale des modèles, Mathematical Physics Monograph Series.

[68] R. F. Williams. The "DA" maps of Smale and structural stability. In *Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968)*, pages 329–334. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970.

Department of Mathematics
Michigan State University
East Lansing MI 48824-1027
USA