RMU
REVISTA MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Revista Matemática Universitária, vol. 2, 2022
ISSN: 2675-5254 — **DOI:** 10.21711/26755254/rmu202212

SOBRE A INTEGRABILIDADE DE FORMAS PFAFFIANAS NO $\mathbb{R}^n$

PEDRO F. DA SILVA JÚNIOR

RESUMO. Este artigo detalha as condições menos conhecidas no $\mathbb{R}^n$ para a integrabilidade das formas pfaffianas, ou 1-formas. É dada ênfase na localidade de tais condições e são fornecidas provas, com alguns detalhes adicionais, dos teoremas devidos a Clairaut e Carathéodory. Considerando a importância da integrabilidade das formas pfaffianas, em particular na física-matemática, este artigo mostra que: existe um conteúdo oculto no teorema de Carathéodory no sentido de uma integrabilidade global.

1. INTRODUÇÃO

As formas pfaffianas são um caso particular de formas diferenciais: as *1-formas*. O tratamento deste assunto através de formas diferenciais, incluindo a utilização de álgebra exterior e de variedades diferenciáveis mais gerais do que o $\mathbb{R}^n$, ultrapassa o escopo deste artigo[1]. O estudo das formas pfaffianas tem relevância teórica e prática em si mesmo, particularmente, na física-matemática [3, 4].

Este artigo tem dois objetivos principais. O primeiro é apresentar ao leitor, com algum detalhe, as condições menos conhecidas para a integrabilidade das formas pfaffianas no $\mathbb{R}^n$, as quais têm um caráter *local* e raramente aparecem em livros de equações diferenciais e formas diferenciais. O segundo é discutir a possibilidade e obtenção de um critério de integrabilidade *global* para as formas pfaffianas. O Teorema de Frobenius não se enquadra no roteiro proposto para este trabalho e, por isso, será omitido. A exceção é um breve comentário na seção 4.

Bem, primeiro estudadas por Clairaut, Fontaine, e Euler, de acordo com Katz [5], as formas pfaffianas foram assim nomeadas em honra a Pfaff, que entre 1814

Data de aceitação: 1 de outubro de 2019.
Palavras chave. Formas pfaffianas, integrabilidade de formas pfaffianas, teorema de Carathéodory.

[1]Para o leitor interessado numa abordagem extensiva do assunto através de formas diferenciais sugerimos a consulta do livro de Flanders [1], para uma exposição aplicada em física, ou do livro de Morita [2], para uma com foco em matemática pura.

e 1815, tratou do assunto em mais detalhes [6]. Mais tarde, matemáticos notáveis expandiram o trabalho de Pfaff, com destaque para Frobenius [7] e Cartan [8].

Uma forma adequada de aqui definirmos formas pfaffianas é semelhante a como faz Morita [2].

Definição 1.1. (Forma pfaffiana). *Seja uma coleção de n variáveis independentes $x_1, x_2, ..., x_n$ no $\mathbb{R}^n$, e uma coleção de n funções $F_i = F_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ de classe C^∞ em um conjunto aberto $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Para os objetos $\delta\xi$,*

$$\delta\xi = \sum_{i=1}^{n} F_i(x_1, x_2, ..., x_n) dx_i,$$

definidos em B, com $\delta\xi$ representando o infinitésimo de uma certa quantidade finita ξ em B, damos o nome de formas pfaffianas em n variáveis.

Doravante quando nos referirmos a uma forma pfaffiana genérica estaremos nos baseando em uma forma pfaffiana $\delta\xi$, cujos parâmetros são exemplificados a partir da Definição 1.1. Agora, uma forma pfaffiana pode, ou não, remeter ao que chamamos de diferencial de uma função. Quando uma forma pfaffiana $\delta\xi$ não possui as funções F_i identificadas como as derivadas parciais de uma função $\xi = \xi(x_1, x_2, ..., x_n)$ com relação as respectivas variáveis x_i, ($F_i = \partial\xi/\partial x_i$), então ela não representa o diferencial de uma tal função ξ e chamamos $\delta\xi$ de diferencial inexata. Ou seja, nesse caso, a quantidade $\delta\xi$ representa apenas o infinitésimo de uma certa quantidade finita ξ, e ξ não é uma função das n variáveis independentes x_i no sentido de $\xi = \xi(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Do contrário, se a forma pfaffiana $\delta\xi$ possuir as funções F_i identificadas como as derivadas parciais de uma função $\xi = \xi(x_1, x_2, ..., x_n)$ com relação as respectivas variáveis x_i, ($F_i = \partial\xi/\partial x_i$), então ela é o diferencial de uma tal função ξ, de fato existente. Além disso, nesse caso, também chamamos $\delta\xi$ de diferencial exata e substituímos, na simbologia da sua designação, o símbolo δ pelo habitual símbolo d, tradicionalmente utilizado para designar o infinitésimo de uma quantidade que é uma função ordinária.

Ocorre que, em alguns casos, mesmo que a forma pfaffiana $\delta\xi$ seja uma diferencial inexata, ela pode ser identificada como o resultado do produto de uma função $\mu = \mu(x_1, x_2, ..., x_n)$ com uma diferencial exata $d\psi$, onde ψ é uma função das n variáveis independentes $x_1, x_2, ..., x_n$, em termos de $\psi = \psi(x_1, x_2, ..., x_n)$. Isto é, existindo μ, e sendo $\mu(x_1, x_2, ..., x_n) \neq 0$, em um conjunto aberto A, onde $A \subseteq B$, segue que a quantidade $\delta\xi/\mu$ será uma diferencial exata $d\psi$ em A. Quando isso acontece dizemos que $\delta\xi$ é integrável em A, e chamamos a função μ^{-1} de fator integrante de $\delta\xi$. Além disso, dada a suavidade das funções F_i em todo B, para a discussão da integrabilidade queremos assumir também que as formas pfaffianas sejam *não-singulares* em B; i.e., não identicamente nulas em todo B.

Definição 1.2. (Forma pfaffiana integrável). *Seja $\delta\xi$ uma forma pfaffiana não-singular. Se existirem funções $\mu = \mu(x_1, x_2, ..., x_n)$, com $\mu(x_1, x_2, ..., x_n) \neq 0$, e $\psi = \psi(x_1, x_2, ..., x_n)$ tais que*

$$\delta\xi = \mu d\psi,$$

em um aberto $A \subseteq B$, então $\delta\xi$ é dita ser integrável em A. Ainda, a função μ^{-1} é chamada de fator integrante de $\delta\xi$.

Naturalmente, pela Definição 1.2, toda $\delta\xi$ tal que $\delta\xi = d\xi$ é integrável. Para continuarmos a nossa discussão precisamos mencionar a importante situação que ocorre nos caminhos em B tais que uma forma pfaffiana se anula, onde obtemos a chamada equação de Pfaff associada a essa forma pfaffiana.

Definição 1.3. (Equação de Pfaff). *A equação de Pfaff associada a forma pfaffiana $\delta\xi$ é*

$$\delta\xi = 0.$$

É muito importante ser dito que uma equação de Pfaff *não* diz que $\delta\xi$ é identicamente nula em B; essa equação diz em quais *caminhos* de B a equação $\delta\xi = 0$ tem solução[2]. Em seguida, para buscar mais familiaridade com a ideia de formas pfaffianas integráveis, vamos buscar analisar as soluções das equações de Pfaff a elas associadas.

Definição 1.4. (Equação de Pfaff Exata e Integrável). *A equação de Pfaff associada a forma pfaffiana $\delta\xi$,*

$$\delta\xi = 0,$$

é chamada exata se, e somente se, $\delta\xi$ for uma diferencial exata, $\delta\xi = d\xi$; se, e somente se, a forma pfaffiana $\delta\xi$ for integrável, a equação de Pfaff associada é chamada de integrável.

Se $\delta\xi$ for uma forma pfaffiana que constitui uma diferencial exata, então $\delta\xi = d\xi$ e a equação de Pfaff associada $d\xi = 0$ possui como solução $\xi = \xi(x_1, x_2, ..., x_n) =$ constante, o que se trata geometricamente de uma hipersuperfície de dimensão $n-1$ em B.

Por outro lado, se $\delta\xi$ for uma forma pfaffiana que é uma diferencial inexata, porém, integrável, então $\delta\xi = 0$ ocorre nos mesmos caminhos em que $d\psi = 0$, i.e., onde $\delta\xi = \mu d\psi$ vale, conforme a Definição 1.2. Nessa situação, a solução de $\delta\xi = 0$ é $\psi = \psi(x_1, x_2, ..., x_n) =$ constante, o que define uma hipersupefície de dimensão $n-1$, agora, em A. Naturalmente, se $\delta\xi$ for uma forma pfaffiana não integrável, então a solução da equação $\delta\xi = 0$ não precisa delimitar nenhum objeto geométrico restringido a $n-1$ dimensões como nos casos anteriores.

Isto posto, já podemos realizar a pergunta principal: em quais situações uma forma pfaffiana é integrável? As seções 2 e 3 nos dão essa resposta.

2. Integrabilidade local

Esta seção trata das condições de integrabilidade que possuem caráter *local* para as formas pfaffianas; i.e., condições que, quando satisfeitas, o são restritamente a

[2]Isso pode ser exemplificado com alguns usos das equações de Pfaff na física. Na Mecânica Analítica, os *vínculos* mecânicos são frequentemente modeladas por uma equação de Pfaff [9], e na Termodinâmica Clássica a representação usual de um *processo infinitesimal* adiabático $\delta\mathcal{Q} = 0$ é precisamente a equação de Pfaff da forma pfaffiana *calor*, $\delta\mathcal{Q}$ [10].

alguma vizinhança M contida em B, em torno de um algum ponto p de B. Isso ficará mais claro na seção 3, onde discutiremos condições para uma integrabilidade *global*. Por ora, é interessante que uma definição para a integrabilidade local seja formalizada.

Definição 2.1. (Integrabilidade local). *Se a forma pfaffiana $\delta\xi$ não-singular é integrável restritamente a alguma vizinhança $M \subset B$ de todo ponto $p \in B$, dizemos que $\delta\xi$ é localmente integrável em B.*

Vamos discutir primeiro os casos mais simples para a integrabilidade local: os de formas pfaffianas em duas e em três variáveis.

2.1. **Formas pfaffianas em duas e em três variáveis.** Para evitar repetições desnecessárias, daqui em diante passaremos a assumir apenas formas pfaffianas *não-singulares*. De acordo com a Definição 1.2, seja uma forma pfaffiana $\delta\xi$ em duas variáveis, x_1 e x_2:

$$\delta\xi = F_1(x_1, x_2)dx_1 + F_2(x_1, x_2)dx_2. \tag{1}$$

A respectiva equação de Pfaff associada a forma pfaffiana da expressão (1), é,

$$F_1(x_1, x_2)dx_1 + F_2(x_1, x_2)dx_2 = 0, \tag{2}$$

a qual define a seguinte equação diferencial ordinária de primeira ordem,

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{F_1(x_1, x_2)}{F_2(x_1, x_2)} \equiv f(x_1, x_2), \tag{3}$$

onde $x_2 = x_2(x_1)$. Agora, pelo Teorema da Existência e Unicidade para equações diferenciais ordinárias[3], se forem $f(x_1, x_2)$ e $\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2$ contínuas no aberto B, dado algum ponto $p = ({x_1}^0, {x_2}^0) \in B \subseteq \mathbb{R}^2$, existe então em B uma única curva $\psi(x_1, x_2(x_1)) =$ constante, parametrizada por x_1, que fornece a função $x_2 = x_2(x_1)$ solução da equação (3), tal que satisfaz ${x_2}^0 = x_2({x_1}^0)$ em algum intervalo aberto I contendo ${x_1}^0$. Garantimos que as funções $F_1(x_1, x_2)$ e $F_2(x_1, x_2)$ são C^∞ em B por definição, e devemos assumir aqui que também são, por construção, não-nulas em B, dada a arbitrariedade gerada por montarmos a equação (3) de modo que $x_2 = x_2(x_1)$, ao invés de $x_1 = x_1(x_2)$. Do contrário, por essa arbitrariedade, poderia ser $\delta\xi$ identicamente nula, ou indeterminada. Estas colocações permitem o uso deste teorema para a equação (3). Com isso em mente, estamos aptos a tratar de um dos mais importantes teoremas da teoria da integrabilidade das formas pfaffianas.

Teorema 1. *Toda forma pfaffiana em duas variáveis em um aberto B é localmente integrável em B.*

[3] Atenção despendida para enunciar formalmente esse teorema é redundante ao propósito deste artigo. Para maiores detalhes desse teorema fundamental sugerimos a leitura do livro de Coddington e Levinson [11].

Demonstração. Toda equação de Pfaff de uma forma pfaffiana em duas variáveis, sendo essa equação exata ou não, define uma equação diferencial ordinária de primeira ordem como a equação (3) que garante, pelo Teorema da Existência e Unicidade, ao menos *localmente*, a existência de uma única curva solução $\psi(x_1, x_2(x_1)) =$ constante. Considere $d\psi$ em um aberto $B \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 = 0. \tag{4}$$

Observe que a equação (4) descreve as mesmas curvas $x_2 = x_2(x_1)$ que a equação (3). Substiuindo então a equação (3) na equação (4), nós temos:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 - \frac{F_1(x_1, x_2)}{F_2(x_1, x_2)} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_1 = 0. \tag{5}$$

Reorganizando a equação (5), e em vista da Definição 1.2, somos convidados a definir a função $\mu = \mu(x_1, x_2)$, claramente não nula, dada por,

$$\mu(x_1, x_2)^{-1} \equiv \frac{1}{F_1(x_1, x_2)} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \frac{1}{F_2(x_1, x_2)} \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \tag{6}$$

de onde imediatamente segue que:

$$\mu d\psi = F_1(x_1, x_2) dx_1 + F_2(x_1, x_2) dx_2 = \delta\xi. \tag{7}$$

□

Outra prova para o Teorema 1 pode ser encontrada em [12]. No estudo da integrabilidade de uma forma pfaffiana $\delta\xi$ em três variáveis, x_1, x_2 e x_3,

$$\delta\xi = F_1(x_1, x_2, x_3) dx_1 + F_2(x_1, x_2, x_3) dx_2 + F_3(x_1, x_2, x_3) dx_3, \tag{8}$$

é mais pertinente o uso da notação vetorial: $\mathbf{F} \equiv (F_1, F_2, F_3)$, $d\mathbf{r} \equiv (dx_1, dx_2, dx_3)$. Assim, $\delta\xi$ e a sua equação de Pfaff associada são representadas por, respectivamente: $\delta\xi = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ e $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$. Em um conjunto aberto, a verificação da seguinte equação é necessária e suficiente para a integrabilidade da forma pfaffiana em questão:

$$\mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{F} = 0. \tag{9}$$

A afirmação anterior é um teorema. A prova deste resultado usando dos meios discutidos até agora é longa, em particular se a equação (9) é suficiente para a integrabilidade, e por isso será omitida neste artigo. Adiante, quando tratarmos da integrabilidade de formas pfaffianas em um número qualquer de variáveis, a demonstração da condição (9) para o caso de três variáveis será imediatamente recuperada. Um fato a ser destacado agora é que na demonstração da condição de integrabilidade (9) se faz uso do Teorema 1 para a conclusão da integrabilidade das formas pfaffianas em três variáveis [13]. Como previamente discutido, o Teorema 1 possui caráter exclusivamente *local*. O resultado disso é que a condição (9) garante a integrabilidade de formas pfaffianas em três variáveis também apenas *localmente*, para um aberto $B \subseteq \mathbb{R}^3$ apropriado.

Teorema 2. *Uma forma pfaffiana em três variáveis em um aberto B é localmente integrável em B se, e somente se, $\boldsymbol{F}\cdot\nabla\times\boldsymbol{F}=0$ em B.*

Demonstração. Observando o Teorema 1, veja o Capítulo 1 do Livro de Sneddon [13].

Entretanto, não é difícil de ver que a equação (9) é uma condição necessária para a integrabilidade de uma forma pfaffiana em três variáveis. Vejamos, adotando a notação vetorial dada após (8), do Cálculo Vetorial tiramos que se $\nabla\times\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ então $\delta\xi$ é uma diferencial inexata, graças ao Teorema de Schwarz. Para que $\delta\xi$ seja integrável é preciso então que exista uma função μ tal que $\nabla\times(\mu^{-1}\mathbf{F}) = \mathbf{0}$. Ou seja,

$$\mu^{-1}\nabla\times\mathbf{F} + \nabla(\mu^{-1})\times\mathbf{F} = \mathbf{0}. \tag{10}$$

Multiplicando escalarmente (10) por $\mathbf{F}$, obtemos que a condição procurada é:

$$\mathbf{F}\cdot\nabla\times\mathbf{F} = 0. \tag{11}$$

Para formas pfaffianas em n variáveis, começamos por encontrar uma condição necessária para a integrabilidade que generaliza (11).

2.2. **Formas pfaffianas em n variáveis.** Os importantes primeiros resultados que seguem foram inicialmente [5] obtidos por Clairaut.

Lema 1. *Uma condição necessária à integrabilidade de uma forma pfaffiana em n variáveis é que $\mathfrak{R}_{ijk}$,*

$$\mathfrak{R}_{ijk} \equiv F_i\left[\frac{\partial F_k}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial x_k}\right] + F_j\left[\frac{\partial F_i}{\partial x_k} - \frac{\partial F_k}{\partial x_i}\right] + F_k\left[\frac{\partial F_j}{\partial x_i} - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right],$$

se anule, para quaisquer i, j, k.

Demonstração. Começamos escrevendo uma forma pfaffiana $\delta\xi$ em n variáveis, $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\delta\xi = \sum_{i=1}^{n} F_i(x_1, x_2, ..., x_n)dx_i. \tag{12}$$

Da Definição 1.2, se $\delta\xi$ é integrável, então existem funções μ e ψ que, nas condições apropriadas, satisfazem $\delta\xi = \mu d\psi$. Disso vem que, para cada i:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_i} = \frac{1}{\mu}F_i. \tag{13}$$

Agora, se derivarmos a equação (13) com relação a alguma outra variável, a saber x_j, teremos,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial \mu^{-1}}{\partial x_j} F_i + \mu^{-1}\frac{\partial F_i}{\partial x_j}. \tag{14}$$

Pelo Teorema de Schwarz, $\partial^2\psi/\partial x_j\partial x_i = \partial^2\psi/\partial x_i\partial x_j$, logo,

$$\frac{\partial \mu^{-1}}{\partial x_i} F_j + \mu^{-1}\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \mu^{-1}}{\partial x_j} F_i + \mu^{-1}\frac{\partial F_i}{\partial x_j}. \tag{15}$$

Reagrupando (15) e multiplicando toda a equação por μ,

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} - \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \mu F_i \frac{\partial \mu^{-1}}{\partial x_j} - \mu F_j \frac{\partial \mu^{-1}}{\partial x_i}. \tag{16}$$

Em comparação com a condição (11) para três variáveis, o lado esquerdo de (16) nos convida a procurar meios de anulá-lo e, assim, obtermos uma condição de integrabilidade que dependa apenas das derivadas das funções F_i. Isso ocorre se multiplicarmos (16) por uma outra função F_k, e então somarmos ciclicamente termos análogos a $F_k[\partial F_j/\partial x_i - \partial F_i/\partial x_j]$ de modo que,

$$\mathfrak{R}_{ijk} \equiv F_i\left[\frac{\partial F_k}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial x_k}\right] + F_j\left[\frac{\partial F_i}{\partial x_k} - \frac{\partial F_k}{\partial x_i}\right] + F_k\left[\frac{\partial F_j}{\partial x_i} - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right] = 0, \tag{17}$$

porque os termos do lado direito de (16) se cancelam com os termos análogos quando nós os adicionamos. □

Imediatamente se vê a recuperação da condição (11) ao fixarmos $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ em (17). A recíproca do Lema 1 é válida, ao menos *localmente*. Para mostrar isso, primeiro precisamos observar que: se a quantidade $\mathfrak{R}_{ijk}$ é nula em uma coleção de variáveis, permanecerá nula por uma mudança de variáveis.

Lema 2. *A nulidade de $\mathfrak{R}_{ijk}$ é invariante por uma mudança de variáveis.*

Demonstração. Seja uma forma pfaffiana $\delta\xi$ em n variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ tal que sofra uma mudança de variáveis para novas n variáveis $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n$. O diferencial de uma variável $x_i = x_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ é, então:

$$dx_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j} d\bar{x}_j. \tag{18}$$

A forma pfaffiana $\delta\xi$ pode ser representada em ambas as coleções de variáveis, com as respectivas funções associadas. Logo,

$$\delta\xi = \sum_{i=1}^{n} F_i(x_1, x_2, ..., x_n) dx_i = \sum_{j=1}^{n} \bar{F}_j(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) d\bar{x}_j, \tag{19}$$

onde, substituindo (18) em (19), obtemos:

$$\bar{F}_j(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j} F_i(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{20}$$

Suprimindo a dependência explícita com as variáveis, por (17), na coleção das novas variáveis, a quantidade $\bar{\mathfrak{R}}_{ijk}$ é:

$$\bar{F}_i\left[\frac{\partial \bar{F}_k}{\partial \bar{x}_j} - \frac{\partial \bar{F}_j}{\partial \bar{x}_k}\right] + \bar{F}_j\left[\frac{\partial \bar{F}_i}{\partial \bar{x}_k} - \frac{\partial \bar{F}_k}{\partial \bar{x}_i}\right] + \bar{F}_k\left[\frac{\partial \bar{F}_j}{\partial \bar{x}_i} - \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial \bar{x}_j}\right]. \tag{21}$$

Vamos analisar inicialmente apenas o segundo termo de (21), substituindo assim apropriadamente as novas funções dadas em (20). Fazendo isso,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j} F_i \left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_i}\frac{\partial F_k}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_k} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_k}\frac{\partial F_j}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_i}\right], \tag{22}$$

vemos que obtemos um termo proporcional ao primeiro termo de $\mathfrak{R}_{ijk}$, uma vez que as derivadas parciais de segunda ordem nas variáveis somem, pelo Teorema de Schwarz. Repetindo o mesmo para os termos restantes de (21), temos que:

$$\bar{\mathfrak{R}}_{ijk} = \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j}\frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_k}\frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_i}\right]\mathfrak{R}_{ijk}. \tag{23}$$

Logo, se $\mathfrak{R}_{ijk} = 0$, então, $\bar{\mathfrak{R}}_{ijk} = 0$. □

Teorema 3. *Uma condição suficiente à integrabilidade local de uma forma pfaffiana em n variáveis, em um aberto B, é que $\mathfrak{R}_{ijk}$ se anule, para quaisquer i, j, k.*

Demonstração. Apresentaremos uma prova via indução finita que, inicialmente, busca mostrar que a condição $\mathfrak{R}_{ijk} = 0$, para quaisquer i, j, k, é suficiente para a integrabilidade. Disso virá que o máximo que podemos afirmar sobre tal condição é que, de fato, ela é suficiente a uma integrabilidade *local*, apenas.

Para uma forma pfaffiana em uma variável, x_1, por construção, fica evidente que $\delta\xi$ é sempre integrável. Já para uma forma pfaffiana em n variáveis,

$$\delta\xi = \sum_{i=1}^{n} F_i(x_1, x_2, ..., x_n)dx_i, \tag{24}$$

supomos que $\mathfrak{R}_{ijk} = 0$, para quaisquer i, j, k. Em seguida, escolhemos examinar $\delta\xi$ por um caminho em um aberto $B \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $dx_n = 0$. A forma pfaffiana que resulta de fixarmos o valor da variável x_n em (24), é,

$$\delta\eta = \sum_{i=1}^{n-1} F_i(x_1, x_2, ..., x_n)dx_i, \tag{25}$$

de forma que naturalmente $\mathfrak{R}_{ijk} = 0$ permanece inalterada em (25), como a hipótese de indução, uma vez que a nulidade dessa quantidade não muda por fixarmos uma variável. Supomos então que $\delta\eta$ é integrável, sob a circunstância $\mathfrak{R}_{ijk} = 0$, para quaisquer i, j, k diferentes de n em B. Por conta disso, devem existir funções λ, com $\lambda(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \neq 0$, e $\sigma = \sigma(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$, em algum aberto $A \subseteq B$, tais que:

$$\delta\eta = \lambda d\sigma = \lambda \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} dx_i. \tag{26}$$

Agora, deixando x_n variar, podemos reescrever $\delta\xi$ em função de $\delta\eta$, com $\delta\eta$ integrável por hipótese, como colocamos. Isto é,

$$\delta\xi = \lambda d\sigma + F_n dx_n, \tag{27}$$

onde, uma vez que $\delta\xi$ é uma forma pfaffiana em n variáveis, escrever (27) equivale a uma mudança de variáveis em $\delta\xi$, das variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$, para certas novas variáveis $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_{n-2}, \sigma, x_n$. Nessa nova coleção de variáveis ocorre que $\bar{F}_i = 0$, para todo $i = \{1, 2, ..., n-2\}$. Do Lema 2, a hipótese da nulidade de $\mathfrak{R}_{ijk}$ permanece para a nova coleção de variáveis. Novamente, essa relação se preserva ao examinarmos apenas a coleção de variáveis $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_{n-2}$. Explicitamente,

$$\bar{\mathfrak{R}}_{ijk} = \lambda \frac{\partial F_n}{\partial \bar{x}_i} - F_n \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{x}_i} = 0, \tag{28}$$

e obtemos que, nas variáveis $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_{n-2}, \sigma, x_n$, o quociente F_n/λ deve depender unicamente de σ e x_n. Com $\lambda \neq 0$, podemos reescrever (27) como:

$$\delta\xi = \lambda \left(d\sigma + \frac{F_n}{\lambda} dx_n \right), \tag{29}$$

O termo em parênteses em (29) é uma forma pfaffiana em duas variáveis, que é, pelo Teorema 1, localmente integrável. Portanto, existem funções μ e ψ, tais que,

$$\delta\xi = \lambda\mu d\psi, \tag{30}$$

nas condições apropriadas, e assim $\delta\xi$ é localmente integrável em B. □

Apresentaremos agora um último resultado. Originalmente obtido na formalização da Termodinâmica Clássica de C. Carathéodory em 1909 [14], e provavelmente figurando como o critério para integrabilidade das formas pfaffianas mais ausente nos livros didáticos de equações diferenciais desde então. Esta é uma verificação que fornece a integrabilidade local de uma forma pfaffiana a partir de uma condição topológica do conjunto B ao qual reside a forma pfaffiana em questão. A prova desse teorema é apresentada aqui com um pouco mais de detalhes do que nas obras que primeiro a investigaram [15, 16], após a prova original de Carathéodory [14].

Teorema 4. (Teorema de Carathéodory). *Uma condição necessária e suficiente à integrabilidade local de uma forma pfaffiana $\delta\xi$ em n variáveis em um aberto B, é que em toda vizinhança $M \subset B$ arbitrariamente próxima de um ponto qualquer $p \in B$ existam pontos inatingíveis desde p pelas curvas tais que $\delta\xi = 0$.*

Demonstração [15]. Sejam a forma pfaffiana $\delta\xi$ em n variáveis, num aberto $B \subseteq \mathbb{R}^n$, e $p = ({x_1}^0, {x_2}^0, ..., {x_n}^0)$, $q = ({x_1}^*, {x_2}^*, ..., {x_n}^*)$, $r = ({x_1}^{**}, {x_2}^{**}, ..., {x_n}^{**})$ pontos de B. Sejam as curvas γ_1 e γ_2 em B, suaves, parametrizadas por um parâmetro t,

$$\gamma_1(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)) \equiv (f_i(t)), \tag{31a}$$

$$\gamma_2(t) = (f_1(t) + \nu g_1(t), f_2(t) + \nu g_2(t), ..., f_n(t) + \nu g_n(t)) \equiv (f_i(t) + \nu g_i(t)), \tag{31b}$$

com ν real, tais que $\delta\xi = 0$, com as seguintes condições, respectivamente,

$$\gamma_1(t_0) = p, \quad \gamma_1(t_*) = q, \tag{32a}$$

$$\gamma_2(t_0) = p, \quad \gamma_2(t_{**}) = r, \tag{32b}$$

onde $t_0 < t_* < t_{**}$, com $|t_* - t_0| < \epsilon_1$ e $|t_{**} - t_*| < \epsilon_2$, para ϵ_1 e ϵ_2 arbitrariamente pequenos. Com um ν suficientemente pequeno, nosso objetivo é examinar a situação $\epsilon_2 \to 0$. A equação de Pfaff a qual γ_2 é solução se dá por,

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} F_i(f_l(t) + \nu g_l(t)) d(f_i(t) + \nu g_i(t)) = 0 \\ = &\sum_{i=1}^{n} F_i(f_l(t) + \nu g_l(t))[\dot{f}_i(t) + \nu \dot{g}_i(t)], \end{aligned} \tag{33}$$

com $df_i(t)/dt \equiv \dot{f}_i(t)$, $dg_i(t)/dt \equiv \dot{g}_i(t)$. Derivando (33) por ν, em $\nu = 0$,

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(f_l(t))\dot{g}_i(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i(f_l(t))}{\partial x_j} \dot{f}_i(t) g_j(t) = 0, \tag{34}$$

ou

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(f_l(t))\dot{g}_i(t) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i(f_l(t))}{\partial x_j} \dot{f}_i(t) g_j(t). \tag{35}$$

A equação (35) é equivalente a escolhermos $n - 1$ das funções $g_j(t)$ de maneira arbitrária e a n-ésima asseguramos obedecer (35). Seja então essa n-ésima função $g_k(t)$, de modo que, isolando os termos de índice k, temos:

$$(36)\quad \begin{aligned} &F_k(f_l(t))\dot{g}_k(t)+\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\frac{\partial F_i(f_l(t))}{\partial x_k}\dot{f}_i(t)g_k(t)=\\ &\qquad -\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}F_j(f_l(t))\dot{g}_j(t)-\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}\frac{\partial F_i(f_l(t))}{\partial x_j}\dot{f}_i(t)g_j(t). \end{aligned}$$

A função $g_k(t)$ então se torna o objeto a ser estudado se fazemos $\epsilon_2 \to 0$. O lado esquerdo de (36) é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem linear em $g_k(t)$, logo, pelo método de Leibniz do fator integrante, seja a função $\eta = \eta(t)$, não nula, tal que:

$$(37)\quad \frac{d(\eta(t)F_k(f_l(t))g_k(t))}{dt}=\eta(t)\left[F_k(f_l(t))\dot{g}_k(t)+\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\frac{\partial F_i(f_l(t))}{\partial x_k}\dot{f}_i(t)g_k(t)\right].$$

Desenvolvendo o lado esquerdo de (37):

$$(38)\quad \begin{aligned} &\frac{d(\eta(t)F_k(f_l(t))g_k(t))}{dt}\\ &=\eta(t)F_k(f_l(t))\dot{g}_k(t)+\eta(t)\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\frac{\partial F_k(f_l(t))}{\partial x_i}\dot{f}_i(t)g_k(t)+\dot{\eta}(t)F_k(f_l(t))g_k(t), \end{aligned}$$

e com a comparação entre (37) e (38) segue,

$$(39)\quad \dot{\eta}(t)F_k(f_l(t))=\eta(t)\dot{f}_i(t)\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\left[\frac{\partial F_i(f_l(t))}{\partial x_k}-\frac{\partial F_k(f_l(t))}{\partial x_i}\right].$$

Agora, perpetuando o método de Leibniz e multiplicando os dois lados de (36) por $\eta(t)$, usando (38) e (39), podemos isolar $g_k(t)$ pela integração do lado esquerdo de (37), o que se revela ser igual ao lado direito de (36) quando multiplicamos o último por $\eta(t)$. Temos então:

(40)

$$\eta(t')F_k(f_l(t'))g_k(t')=-\int_{t_0}^{t'}\eta(t)\left[\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}F_j(f_l(t))\dot{g}_j(t)+\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\frac{\partial F_i(f_l(t))}{\partial x_j}\dot{f}_i(t)g_j(t)\right]dt,$$

onde $g_i(t_0)=0$ para todo i, pelas condições (32). Integrando por partes o primeiro termo no integrando de (40), usando (39) e novamente que $g_i(t_0) = 0$, obtemos diretamente:

(41)

$$-\int_{t_0}^{t'}\eta(t)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}F_j(f_l(t))\dot{g}_j(t)dt=-\eta(t')\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}F_j(f_l(t'))g_j(t')$$

$$+\int_{t_0}^{t'}\eta(t)\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\dot{f}_i(t)g_j(t)\left(\frac{F_j(f_l(t))}{F_k(f_l(t))}\left[\frac{\partial F_i(f_l(t))}{\partial x_k}-\frac{\partial F_k(f_l(t))}{\partial x_i}\right]+\frac{\partial F_j(f_l(t))}{\partial x_i}\right)dt.$$

Substituindo (41) em (40), e colocando a função $F_k(f_l(t))$ em evidência no integrando, temos:

(42)

$$\begin{aligned}\eta(t')F_k(f_l(t'))g_k(t')=&-\eta(t')\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}F_j(f_l(t'))g_j(t')\\&+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\int_{t_0}^{t'}\frac{\eta(t)\dot{f}_i(t)g_j(t)}{F_k(f_l(t))}\left(F_j(f_l(t))\left[\frac{\partial F_i(f_l(t))}{\partial x_k}-\frac{\partial F_k(f_l(t))}{\partial x_i}\right]\right.\\&\left.+F_k(f_l(t))\left[\frac{\partial F_j(f_l(t))}{\partial x_i}-\frac{\partial F_i(f_l(t))}{\partial x_j}\right]\right)dt.\end{aligned}$$

Uma vez que, pela curva γ_1 é verdade que,

$$\sum_{i=1}^{n}F_i(f_l(t))\dot{f}_i(t)=0, \tag{43}$$

então,

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\int_{t_0}^{t'}\frac{\eta(t)\dot{f}_i(t)g_j(t)}{F_k(f_l(t))}F_i(f_l(t))\left[\frac{\partial F_k(f_l(t))}{\partial x_j}-\frac{\partial F_j(f_l(t))}{\partial x_k}\right]dt=0. \tag{44}$$

Substituindo (44) em (42), isolando $g_k(t')$ no processo e identificando $\mathfrak{R}_{ijk}$ no integrando, temos:

$$\begin{aligned}g_k(t')=\frac{1}{\eta(t')F_k(f_l(t'))}\Bigg\{&-\eta(t')\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}F_j(f_l(t'))g_j(t')\\&+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\int_{t_0}^{t'}\frac{\eta(t)\dot{f}_i(t)g_j(t)}{F_k(f_l(t))}\mathfrak{R}_{ijk}dt\Bigg\}.\end{aligned} \tag{45}$$

Se $t' \to t_*$, com ϵ_1 arbitrariamente pequeno, onde $|t_* - t_0| < \epsilon_1$, bem como ϵ_2, onde $|t_{**} - t_*| < \epsilon_2$, então, no limite $\epsilon_2 \to 0$, teremos a formação de uma vizinhança $M \subset B$ em torno de p, arbitrariamente próxima de p, tal que existem pontos atingíveis desde p pelas curvas nas quais $\delta\xi = 0$. A única excessão a isso é se toda função $g_k(t)$ for identicamente nula, para todo t. No integrando de (45), isso requer que:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \dot{f}_i(t)\mathfrak{R}_{ijk} = 0, \tag{46}$$

uma vez que, por construção, $\eta = \eta(t) \neq 0$, as $g_j(t)$ não podem ser fixadas como zero e, obviamente, $F_k(f_l(t))^{-1} \neq 0$, para todo k. Uma vez que as $\dot{f}_i(t)$ podem ser arbitrárias, exceto $\dot{f}_k(t)$, a qual não comparece em (46), concluímos que $\mathfrak{R}_{ijk} = 0$, para todo i, j, k. Pelo Lema 1 e o Teorema 3 essa prova se encerra. □

3. Integrabilidade global

O Teorema de Carathéodory 4 tem sido historicamente colocado em debate por garantir apenas uma integrabilidade *local* para as formas pfaffianas [17]. No entanto, seu uso na Termodinâmica Clássica fornece pistas de que sua natureza local reside na generalidade de sua premissa em termos topológicos. Mais do que isso, quando analisado de acordo com as necessidades descritivas da Termodinâmica Clássica [10], esse teorema parece pedir mais do que se precisa para obter um fator integrante, ao presumir uma relação de não conexão entre pontos no espaço (no presente contexto, o $\mathbb{R}^n$) válido para qualquer vizinhança, arbitrariamente pequena, neste espaço.

Isso indica a possibilidade de um conteúdo oculto no Teorema de Carathéodory que pode ser revelado pela modificação apropriada da noção de *vizinhança*. Faremos isso a seguir e obteremos como resultado uma condição suficiente para a integrabilidade das formas pfaffianas em todo B, exceto para um conjunto de medida nula contido em B; o que chamaremos aqui de integrabilidade *global* em B.

Definição 3.1. (Reta cercante). *Dado um ponto $p = ({x_1}^0, {x_2}^0, ..., {x_n}^0) \in B \subseteq \mathbb{R}^n$, para a reta $\Pi(x_i)$ dos pontos $({x_1}^0, {x_2}^0, ..., x_i, ..., {x_n}^0)$, com a variável arbitrária x_i chamada de variável livre, damos o nome de reta cercante a p associada com x_i.*

Perceba que a união $\bigcup_{i=1}^{n} \Pi(x_i)$ das n retas cercantes $\Pi(x_i)$ possíveis a um ponto $p \in B \subseteq \mathbb{R}^n$ não constitui uma vizinhança M de p.

Teorema 5. *Uma condição suficiente à integrabilidade global de uma forma pfaffiana $\delta\xi$ em n variáveis em um aberto B é que na reta cercante $\Pi(x_i)$ de um ponto qualquer $p \in B$, para alguma variável livre x_i, existam pontos arbitrariamente próximos de p inatingíveis desde p pelas curvas tais que $\delta\xi = 0$.*

Demonstração. Sejam a forma pfaffiana $\delta\xi$ em n variáveis, num aberto $B \subseteq \mathbb{R}^n$, e $p = ({x_1}^0, {x_2}^0, ..., {x_n}^0)$ um ponto arbitrário de B. Sejam também $q = ({x_1}^0, {x_2}^0, ..., {x_n}^*)$ um ponto da reta cercante a p associada a variável x_n, $\Pi(x_n)$, e γ uma curva em B tal que:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(\gamma)dx_i(\gamma) = 0. \tag{47}$$

Com $|{x_n}^* - {x_n}^0| < \varepsilon$, vamos supor que γ passa por p mas não passa por q, para qualquer ε arbitrariamente pequeno. Segue disso que a equação,

$$dx_n(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{F_i(x_1, x_2, ..., x_n)}{F_n(x_1, x_2, ..., x_n)} dx_i, \tag{48}$$

advinda de (47), denota dx_n como o diferencial de uma função $x_n = x_n(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$, de modo que, como sabemos, a função $F_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ não é identicamente nula. Obtemos $x_n = x_n(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ explicitamente integrando (48),

$$x_n(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) = {x_n}^0 - \int_{({x_1}^0, {x_2}^0, ..., {x_{n-1}}^0)}^{(x_1, x_2, ..., x_{n-1})} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{F_i(x_1, x_2, ..., x_n)}{F_n(x_1, x_2, ..., x_n)} dx_i, \tag{49}$$

onde ${x_n}^0 = x_n({x_1}^0, {x_2}^0, ..., {x_{n-1}}^0)$. Agora, se fizermos as quantidades ${x_1}^0, {x_2}^0, ..., {x_{n-1}}^0$ variarem, teremos $x_1, x_2, ..., {x_n}^0$ como as novas variáveis independentes das quais a função x_n, agora $x_n = x_n(x_1, x_2, ..., {x_n}^0)$, depende. A função x_n é contínua em relação as variáveis $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, {x_n}^0$, e diferenciável em relação as variáveis $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$, graças a (48). Portanto:

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_i} = -\frac{F_i}{F_n}. \tag{50}$$

Além disso, pela equação (49), os quocientes F_i/F_n poderão depender de ${x_n}^0$ de alguma forma. Porém, se fixarmos as outras variáveis $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$, em (49), obteremos que $x_n = x_n(x_1, x_2, ..., {x_n}^0)$ é uma função monótona de ${x_n}^0$. Isso não muda para qualquer intervalo fechado contido em $\Pi(x_n)$ no qual possamos assumir as mesmas hipóteses que foram postas até aqui. Como consequência, pelo Teorema de Lebesgue da Diferenciação [18], $x_n = x_n(x_1, x_2, ..., {x_n}^0)$ é uma função diferenciável de ${x_n}^0$ em todo B, com exceção a um conjunto de medida nula contido em B.
Assim, observamos que o diferencial da função $x_n = x_n(x_1, x_2, ..., {x_n}^0)$,

$$dx_n(x_1, x_2, ..., {x_n}^0) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial x_n}{\partial {x_n}^0} d{x_n}^0, \tag{51}$$

da mesma maneira se refere a todo B, com exceção ao mesmo conjunto de medida nula contido em B. Retomando (47) explicitamente, e usando (51) e (50), temos:

$$
\begin{aligned}
\delta\xi =& \sum_{i=1}^{n-1} F_i dx_i + F_n dx_n \\
=& \sum_{i=1}^{n-1} F_i dx_i + F_n \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial x_n}{\partial {x_n}^0} d{x_n}^0 \right) \\
=& F_n \frac{\partial x_n}{\partial {x_n}^0} d{x_n}^0 .
\end{aligned} \tag{52}
$$

Logo, $\delta\xi$ é integrável em quase toda parte de B. □

4. Aplicações e comentários finais

Neste artigo apresentamos ao leitor as condições de integrabilidade das formas pfaffianas no $\mathbb{R}^n$, com exceção do conhecido Teorema de Frobenius. Dividimos nossa discussão entre aspectos locais, na seção 2, e aspectos globais, na seção 3, no que diz respeito à integrabilidade. Inspirado no Teorema de Carathéodory, e seu uso na Termodinâmica Clássica [10], um critério de integrabilidade de caráter *global*, a saber, o Teorema 5, foi obtido na seção 3.

O Teorema 5 quando aplicado à Termodinâmica Clássica pode gerar um resultado muito importante: a construção de uma função entropia diferenciável em quase toda parte, de modo que as regiões onde a diferenciabilidade desaparece sejam, pela justificativa experimental da teoria, os pontos no espaço termodinâmico de estados relacionados com transições de fase. Com efeito, introduzindo a lei zero da termodinâmica e consequentemente o conceito de temperatura empírica ϑ, esta quantidade pode agora ser identificada como a variável livre no contexto do Teorema 5; ou seja, assumimos que $\vartheta = x_n$. Em seguida, de acordo com [16], identificando também $\delta\xi$ como a quantidade de calor $\delta\mathcal{Q}$, $F_n = F_\vartheta$, e ${x_n}^0 = \vartheta^0$, a última expressão em (52) pode ser reescrita se observarmos a dedução da premissa do Teorema 5 a partir do enunciado de Kelvin, ou Clausius, da segunda lei da termodinâmica [10]. Então, fazendo uma mudança para novas variáveis, μ e σ, obtém-se,

$$\delta\mathcal{Q} = \mu d\sigma,$$

onde não é difícil verificar que σ é uma função diferenciável em quase toda parte das variáveis apropriadas em consideração. Com um pouco mais de argumentos [16], obtemos a segunda lei da termodinâmica para processos quase-estáticos,

$$\delta\mathcal{Q} = Td\mathcal{S},$$

sendo T a temperatura absoluta e $\mathcal{S}$ a entropia absoluta. Esta função entropia absoluta, ou simplesmente função entropia, possui as seguintes propriedades: a) aditividade (sobre sistemas termodinâmicos); b) extremização (maximização ou minimização[4]) sobre um processo adiabático irreversível (a premissa do Teorema 5 pode

[4]Para o leitor com familiaridade em física, a aparente lacuna da possibilidade de maximização ou minimização, e a ausência de uma propriedade de variação monótona crescente da entropia em relação à energia interna, são características suportadas por várias evidências experimentais [19].

ser generalizada a partir do ponto de vista da termodinâmica de processos irreversíveis); c) diferenciabilidade em quase toda parte. Com a suposição experimental de variação localmente limitada das grandezas termodinâmicas [20], podemos assumir que a função entropia também tem suas primeiras derivadas com a mesma propriedade de variação localmente limitada. Isso, juntamente com a propriedade de diferenciabilidade em quase toda parte, gera uma propriedade final para a função entropia em questão: d) continuidade localmente Lipschitz. Na verdade, devido ao Teorema de Rademacher, as propriedades desta função entropia podem ser resumidas em: aditividade, extremização, e continuidade localmente Lipschitz.

Também na Mecânica Analítica, a aplicação de um critério de integrabilidade para formas pfaffianas é o procedimento que leva a verificar se os vínculos não-holônomos são, ou não, integráveis. Vínculos são relações entre as coordenadas mecânicas generalizadas, velocidades generalizadas e, eventualmente, a coordenada de tempo; quando um vínculo é uma relação apenas entre as coordenadas generalizadas e o tempo, ele é chamado de holônomo, caso contrário, é chamado de não-holônomo. Um conjunto de n vínculos não-holônomos impostos a um sistema mecânico são frequentemente representados por n correspondentes equações de Pfaff: $\delta\xi_1 = 0, ..., \delta\xi_n = 0$. Há uma importância prática para a Mecânica Analítica na verificação da integrabilidade de vínculos não-holônomos: os vínculos podem ser aplicados diretamente na função lagrangiana do sistema mecânico, facilitando assim a obtenção das equações de movimento resolvendo as equações de Euler-Lagrange [21]. Além disso, o método tradicional para fazer o teste de integrabilidade é utilizando o Teorema de Frobenius, que exige manuseio de álgebra exterior e conhecimento analítico das equações de Pfaff em questão.

Por outro lado, em termos do Teorema de Carathéodory 4, o teste de integrabilidade para vínculos não-holônomos pode ser realizado sem mais recursos matemáticos, ao invés disso fazendo uso de inferências físicas no espaço de fase do sistema mecânico e suas respectivas restrições. Por exemplo, o problema tradicional de um cilindro perfeito rolando sem deslizar em um plano inclinado pode ser facilmente visualizado na perspectiva de que existem estados no espaço de fase do sistema que não são acessíveis graças ao vínculo de rolar sem deslizar, portanto, esse vínculo precisa ser integrável. Nesse ponto de vista, o Teorema de Carathéodory 4 mostra-se fisicamente mais substancial do que o Teorema de Frobenius, embora este último tenha maior rigor e seja mais útil, especialmente com vínculos mais complicados. No entanto, a aplicação de um derivado do Teorema de Carathéodory 4, como o Teorema 5, na integrabilidade de vínculos não-holônomos deve ser melhor investigada.

Referências

[1] Flanders, H. *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*, Revised ed., Dover Publications, 1989.

[2] Morita, S. *Geometry of Differential Forms*, American Mathematical Society, 2001.

[3] Antoniou, I. *Caratheodory and the Foundations of Thermodynamics and Statistical Physics*, Foundations of Physics (V. 32, n. 4, pp. 627-641), 2002.

[4] Arens, R. *Differential-Geometric Elements of Analytic Dynamics*, Journal of Mathematical Analysis and Applications (V. 9, pp. 165-202), 1964.

[5] Katz, V. J. *The history of differential forms from Clairaut to Poincaré*, Historia Mathematica (V. 8, n. 2, pp. 161-188), 1981.

[6] Samelson, H. *Differential Forms, the Early Days; or the Stories of Deahna's Theorem and of Volterra's Theorem*, The American Mathematical Monthly (V. 108, n. 6, pp. 522-530), 2001.

[7] Frobenius, G. *Über das Pfaffsche Problem*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (V. 82, pp. 230-315), 1877.

[8] Cartan, E. *Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff*, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure (V. 16, pp. 239-332), 1899.

[9] Papastavridis, J. G. *Analytical Mechanics: A Comprehensive Treatise on the Dynamics of Constrained Systems; For Engineers, Physicists, and Mathematicians*, Oxford University Press, 2002.

[10] Silva Júnior, P. F. *Sobre a Dedução do Axioma de Carathéodory da Segunda Lei da Termodinâmica dos Princípios de Clausius e Kelvin*, Revista Brasileira de Ensino de Física (V. 43), 2021.

[11] Coddington, E. A. e Levinson, N. *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill Inc., 1955.

[12] Díaz, A. A. *Las ecuaciones de Pfaff*, Universidad de Sevilla, Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, 2017.

[13] Sneddon, I. N. *Elements of Partial Differential Equations*, Dover Publications, 2006.

[14] Carathéodory, C. *Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik*, Mathematische Annalen (V. 67, pp. 355-386), 1909.

[15] Buchdahl, H. A. *Integrability Conditions and Carathéodory's Theorem*, American Journal of Physics (V. 22, pp. 182-183), 1954.

[16] Buchdahl, H. A. *The Concepts of Classical Thermodynamics*, Cambridge University Press, 1966.

[17] Boyling, J. B. *Carathéodory's principle and the existence of global integrating factors*, Communications in Mathematical Physics (V. 10, n. 1, pp. 52-68), 1968.

[18] Botsko, M. W. *An Elementary Proof of Lebesgue's Differentiation Theorem*, The American Mathematical Monthly (V. 110, n. 9, pp. 834-838), 2003.

[19] Lavis, D. A. *The question of negative temperatures in thermodynamics and statistical mechanics*, Studies in History and Philosophy of Modern Physics (V. 67, pp. 26-63), 2019.

[20] Lieb, E. H. e Yngvason, J. *The physics and mathematics of the second law of thermodynamics*, Physics Reports (V. 310, pp. 1-96), 1999.

[21] Lemos, N. A. *Vínculos dependentes de velocidades e condição de integrabilidade de Frobenius*, Revista Brasileira de Ensino de Física (V. 37, n. 4), 2015.

Universidade Federal de Pernambuco, Departamento de Física
Recife, PE
Email address: pedro.fsilva2@ufpe.br