Revista Matemática Universitária, vol. 2, 2020
ISSN: 2675-5254 – **DOI:** https://doi.org/10.21711/26755254/rmu202022

TEOREMA DE GREEN NO ESPAÇO DE SOBOLEV $H^1(\Omega)$

ANDRÉ FERREIRA E PEREIRA, E CARLOS MAGNO MARTINS COSME

1. Introdução

Discutiremos aqui um teorema que é muitas vezes chamado de Teorema de Green, Fórmula de Green, Teorema da Divergência, Teorema de Gauss ou Teorema de Gauss-Green. Trata-se de um importante resultado que encontra aplicações nas mais variadas áreas do conhecimento, como eletromagnetismo, gravitação, teoria dos gases, mecânica dos fluidos, etc. Por exemplo, se um campo vetorial representa o campo de velocidades de um escoamento, então o Teorema dirá que o fluxo exterior do campo vetorial através de uma superfície suave, que é fronteira de uma região limitada, pode ser calculado integrando-se a divergência do campo sobre a região delimitada pela superfície. Ainda no contexto desse exemplo, ele pode ser usado para caracterizar a divergência do campo vetorial, calculada em um ponto do domínio, como a taxa líquida de fluxo para o exterior por unidade de volume naquele ponto.

Mais precisamente, se Ω é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$, a fronteira de Ω, $\partial\Omega$, é C^1 e $\mathbf{F}$ é um campo vetorial com componentes em $C^1(\bar{\Omega})$, então

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \int_{\Omega} \nabla\cdot\mathbf{F}\, dV, \tag{1}$$

onde $\mathbf{n}$ é um campo de vetores unitários, normais a $\partial\Omega$ e que apontam para o lado de fora de Ω, dS é um elemento de superfície e dV é o elemento de volume. Quando Ω é uma região plana substituiremos dS por ds, para denotar um elemento de comprimento e dV por dA, para denotar um elemento de área. Neste contexto em que Ω é uma região plana a fórmula de Green mais conhecidas, e que normalmente é ensinada nos cursos de cálculo, é

$$\int_{\partial\Omega} P\, dx + Q\, dy = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA,$$

que como veremos é um caso particular de (1) (veja, por exemplo, a seção 16.4 de [5]). Essas fórmulas podem ser vistas como casos particulares de uma versão bem geral do Teorema de Stokes (veja [2], Teorema 38.8).

Data de aceitação: 10 de julho de 2020.
Palavras chave. Equações Diferenciais Parciais. Fórmula de Green. Solução Forte. Solução Fraca.

Neste trabalho demonstraremos, via um teorema de densidade de $C^1(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$, que a fórmula (1) também vale quando as funções componentes do campo $\mathbf{F}$ estão no espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$. Além disso, vamos definir o que é uma solução fraca e uma solução forte de uma EDP e usar o Teorema de Green generalizado para mostrar que sob certas hipóteses de regularidade, uma solução fraca de uma determinada EDP é solução forte.

Esse último fato traz a luz uma estratégia bastante utilizada para o estudo de soluções de EDP, tanto do ponto de vista teórico quanto numérico, que consiste em buscar soluções de formulações fracas da EDP, para posteriormente mostrar que essas soluções são, na verdade, mais regulares, desde que os dados iniciais sejam suficientemente regulares. Para ilustrar essa estratégia, apresentaremos na Seção 3 um exemplo de sua utilização.

Existe uma razão intuitiva para que o método mencionado no paragrafo anterior seja eficaz, que é o fato que os espaços naturais das soluções das EDP's enfraquecidas são muito maiores que os espaços das soluções da formulação forte, de modo que a chance de encontrarmos uma solução fraca é maior do que a de encontrarmos uma solução forte de forma direta. Com efeito, acontece muitas vezes, inclusive, de não sermos capazes de garantir a existência de soluções fortes, mesmo que a solução fraca exista. Um exemplo bastante conhecido dessa última situação é o famoso problema de Navier-Stokes, ainda em aberto, que, grosso modo, é o problema de garantir a existência de solução forte global (no tempo) para as equações de Navier-Stokes em $\mathbb{R}^3$. Não se sabe, ainda, se essa solução forte existe, entretanto a existência de solução fraca já está bem estabelecida.

2. Desenvolvimento

2.1. Definições, notações e resultados preliminares. Ao longo de todo texto Ω será um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$. Diremos que a fronteira de Ω, $\partial\Omega$, é de classe C^1 se é uma superfície que localmente pode ser parametrizada por uma função de classe C^1 de forma que, localmente, os pontos de Ω fiquem do mesmo lado da superfície.

Definimos $L^2(\Omega)$ como o conjunto das funções $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que tem o quadrado integrável na medida de Lebesgue, isto é,

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R};\ \int_\Omega |u|^2 \, dV < \infty \right\}.$$

Definimos o seguinte produto interno em $L^2(\Omega)$:

$$(u, v)_{L^2} = \int_\Omega uv \, dV.$$

Esse produto interno induz a seguinte norma:

$$\|u\|_{L^2} = \left(\int_\Omega |u|^2 \, dV \right)^{\frac{1}{2}}.$$

O espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$ é o espaço das funções $u \in L^2(\Omega)$ para as quais existe $v \in L^2(\Omega)$ de forma que

$$\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, dV = -\int_\Omega v\phi \, dV,\ \forall\, \phi \in C_c^\infty(\Omega),$$

onde o conjunto $C_c^\infty(\Omega)$ é o conjunto das funções que são C^∞ e que se anulam fora de um compacto $K \subset \Omega$. Denotaremos $v = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ e diremos que v é a derivada fraca de u com relação a x_i. Nessa notação,

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \cdots, n \right\}.$$

Podemos munir esse espaço com o seguinte produto interno:

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2}.$$

A norma induzida por esse produto interno é

$$\|u\|_{H^1} = \sqrt{\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2}.$$

A primeira dificuldade que enfrentamos ao tentar generalizar a fórmula (1) é que a integral do lado esquerdo sequer faz sentido, pois $\partial\Omega$ tem medida nula em Ω, e funções em um espaço de Sobolev, que se diferem apenas em um conjunto de medida nula, estão em uma mesma classe de equivalência. Então, é necessário dar precisão para o significado de restringir uma função para a fronteira de seu domínio, o que torna isso preciso é o seguinte teorema, conhecido como Teorema do Traço.

Teorema 1. *Assuma que Ω é limitado e que $\partial\Omega$ é C^1. Então existe um operador linear limitado*

$$T : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$$

tal que

(1) $Tu = u \mid_{\partial\Omega}$ *se* $u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ *e*
(2) $\|Tu\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$,

para cada $u \in H^1(\Omega)$, com a constante C dependendo apenas de Ω.

Demonstração. Veja Evans [1] seção 5.5, Teorema 1. □

Chamaremos o operador do último teorema de *operador traço*.

A estratégia que usaremos para demonstrar a fórmula (1) em $H^1(\Omega)$ será essencialmente aplicar a fórmula conhecida para uma sequência de funções em $C^\infty(\bar{\Omega})$ que converge para a função em $H^1(\Omega)$. Para isso precisaremos do seguinte resultado de densidade em espaços de Sobolev:

Teorema 2. *Assuma que Ω é limitado e $\partial\Omega$ é C^1. Suponha $u \in H^1(\Omega)$. Então existem funções $u_m \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tal que*

$$u_m \to u \ \text{em } H^1(\Omega).$$

Demonstração. Veja Evans [1] seção 5.3, Teorema 3. □

Essencialmente o Teorema 2 está afirmando que

$$\overline{C^\infty(\bar{\Omega})}^{H^1(\Omega)} = H^1(\Omega).$$

Outro resultado que precisaremos na aplicação da fórmula de Green é um lema conhecido como Lema de Du Bois Raymond, um enunciado simplificado desse lema é o que segue

Lema 3 (Lema de Du Bois Raymond)**.** *Seja u uma função integrável sobre Ω. Então,*

$$\int_{\Omega} u\phi \, dV = 0, \ \forall \phi \in C_c^{\infty}(\Omega) \Leftrightarrow u = 0 \quad \textit{q.t.p em } \Omega.$$

2.2. **Teorema principal.** Agora queremos provar que

$$\int_{\partial\Omega} T(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV \tag{2}$$

onde **F** é um campo de vetores com funções componentes em $H^1(\Omega)$. Mas isso é equivalente ao teorema que segue. De fato, se vale o Teorema 4, basta aplicá-lo nas funções componentes do campo para obter (2). Por outro lado se vale (2), então, para obter o Teorema 4, basta escolher o campo $\mathbf{F} = (0, \cdots, f, \cdots, 0)$, onde f está na i-ésima entrada.

Teorema 4. *[Teorema de Green] Sejam Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ tal que $\partial\Omega \in C^1$ e f uma função em $H^1(\Omega)$. Então*

$$\int_{\partial\Omega} T(f) n_i \, dS = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dV,$$

onde $T : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ é o operador traço e n_i é a i-ésima componente do vetor ***n****.*

Demonstração. Seja f_n uma sequência em $C^{\infty}(\bar{\Omega})$, tal que $f_n \to f$ em $H^1(\Omega)$. Pela versão clássica do teorema de Green, para cada n temos que

$$\int_{\partial\Omega} f_n n_i \, dS = \int_{\Omega} \frac{\partial f_n}{\partial x_i} \, dV.$$

Agora, veja que pela desigualdade de Hölder

$$\left| \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) dV \right| \leq \int_{\Omega} \left| \frac{\partial f_n}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| dV \leq |\Omega| \left\| \frac{\partial f_n}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^2}.$$

Como Ω é limitado e $f_n \to f$ em $H^1(\Omega)$, segue que quando $n \to \infty$

$$\left| \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) dV \right| \to 0 \Rightarrow \int_{\Omega} \frac{\partial f_n}{\partial x_i} \, dV \to \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dV.$$

Além disso, usando outra vez a desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Omega} T(f_n - f) n_i \, dS \right| &\leq \int_{\partial\Omega} |T(f_n - f) n_i| \, dS \\ &\leq \|n_i\|_{L^2(\partial\Omega)} \|T(f_n - f)\|_{L^2(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

Como **n** é um vetor unitário, $\partial\Omega$ é limitado e T é um operador limitado, segue que existe uma constante C tal que

$$\left| \int_{\partial\Omega} T(f_n - f) n_i \, dS \right| \leq C \|f_n - f\|_{H^1}.$$

Mais uma vez usando o fato que $f_n \to f$ em $H^1(\Omega)$, obtemos que quando $n \to \infty$

$$\left| \int_{\partial\Omega} T(f_n - f) n_i \, dS \right| \to 0 \Rightarrow \int_{\partial\Omega} f_n n_i \, dS \to \int_{\partial\Omega} T(f) n_i \, dS.$$

Portanto,

$$\int_{\partial\Omega} T(f) n_i \, dS = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dV.$$

□

A partir de agora omitiremos o operador T na integral sobre $\partial\Omega$.

A seguir veremos algumas importantes consequências deste último teorema. Primeiramente, nos cursos de cálculo de várias variáveis, que normalmente são ministrados em cursos de graduação, é comum chamar de Teorema de Green um caso particular desse último teorema para a situação que $\partial\Omega$ é uma curva plana, de modo que podemos pensar a região Ω como sendo a região plana delimitada por essa curva. Neste caso podemos enunciar o seguinte corolário:

Corolário 5. *Seja Ω uma região plana tal que $\partial\Omega \in C^1$ seja uma curva fechada e orientada positivamente. Se $P, Q \in H^1(\Omega)$, então*

$$\int_{\partial\Omega} P \, dx + Q \, dy = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dA$$

onde dA é um elemento de área (que substitue dV por estarmos em $\mathbb{R}^2$).

Demonstração. Seja $\mathbf{F} = (Q, -P)$. Pela fórmula 2, temos que

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dA = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

Seja $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)),\ t \in [a, b]$, uma parametrização da curva $\partial\Omega$ orientada positivamente. Então,

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{k} = (y'(t), -x'(t)) / \|\mathbf{r}'(t)\|,$$

onde $\mathbf{k}$ é o vetor canônico $(0, 0, 1)$, $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), 0)$ e estamos desprezando a última coordenada do vetor normal, pois é um vetor no plano xy. Além disso o elemento de comprimento é dado por:

$$ds = \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dA &= \int_a^b (Q(\mathbf{r}(t)), -P(\mathbf{r}(t))) \cdot \frac{(y'(t), -x'(t))}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \|\mathbf{r}'(t)\| dt \\
&= \int_a^b Q(\mathbf{r}(t)) y'(t) \, dt + \int_a^b P(\mathbf{r}(t) x'(t) dt \\
&= \int_{\partial\Omega} P \, dx + Q \, dy.
\end{aligned}$$

□

A integral do lado esquerdo do último corolário pode ser interpretada como a circulação no sentido anti-horário do campo $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ ao redor da curva $\partial\Omega$, de modo que o corolário muitas vezes é útil para facilitar o cálculo dessa circulação, pois transforma uma integral de linha em uma integral dupla.

É comum em um curso de cálculo encontrarmos o corolário acima com a hipótese de que P e Q tenham derivadas parciais contínuas em um aberto que contém a região Ω. Essa versão apresentada acima claramente exige condições mais fracas para que possamos efetuar o mesmo cálculo, veja a seguir um exemplo da aplicação desse corolário que não poderia ser resolvido diretamente pela aplicação do resultado clássico.

Exemplo 1. *Seja $\boldsymbol{F}(x, y) = (\frac{y^3}{3} + x^2)\boldsymbol{i} + |x|\boldsymbol{j}$. Vamos calcular a circulação (no sentido anti-horário) sobre a curva que é fronteira da região plana Ω que é o semi-disco de raio 1 centrado na origem acima do eixo x (ou seja, $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$). Note que a função componente $P(x, y) = |x|$ sequer tem derivadas parciais nos pontos $(0, y)$, entretanto, não é difícil verificar que a derivada fraca dessa função com respeito a x é dada por*

$$\frac{\partial|x|}{\partial x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0, \end{cases}$$

e que $P \in H^1(\Omega)$. Dessa forma podemos aplicar o último corolário, obtendo

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{y^2}{3} + x^2\right)\, dx + |x|\, dy = \int_{\Omega} \frac{\partial|x|}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{3} + x^2\right)\, dA$$
$$= \int_{R_1} (1 - x^2 - y^2)\, dA + \int_{R_2} (-1 - x^2 - y^2)\, dA$$

onde R_1 é a região do semi-disco onde $x > 0$ e R_2 é a região do disco onde $x < 0$, ou seja, em coordenadas polares, $R_1 = \{(r, \theta) \mid 0 < r < 1, 0 < \theta < \pi/2\}$ e $R_2 = \{(r, \theta) \mid 0 < r < 1, \pi/2 < \theta < \pi\}$. Então, fazendo a mudança de coordenadas para coordenadas polares na duas últimas integrais, temos

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{y^2}{3} + x^2\right)\, dx + |x|\, dy$$
$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (1 - r^2)r\, dr d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^1 (-1 - r^2)r\, dr d\theta$$
$$= \frac{\pi}{8} - \frac{3\pi}{8} = -\frac{\pi}{4}.$$

No caso do exemplo apresentado, uma estratégia para resolver o problema sem apelar para esse resultado mais generalizado é repartir a região em duas partes, isso é, nas regiões R_1 e R_2 que aparecem na solução do exercício. Nessas duas regiões o teorema clássico pode ser aplicado, pois em ambas a função módulo tem derivadas contínuas. Entretanto, é necessário mostrar que a circulação através da fronteira de Ω é a soma das circulações através das fronteiras de R_1 e de R_2, pois, a circulação na parte comum das fronteiras de R_1 e R_2 se anulam. Então, grosso modo, podemos dizer que a estratégia apresentada acima fica embutida no próprio resultado, de forma que podemos resolver o problema diretamente sem apelar para esse artifício.

Outra consequência muito importante, que será usada na próxima seção, é o Teorema de Integração por Partes.

Teorema 6 (Integração por Partes)**.** *Sejam Ω um conjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$, onde $\partial\Omega$ é C^1 e $u, v \in H^1(\Omega)$. Então*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dV = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dV + \int_{\partial\Omega} uvn_i \, dS,$$

para todo $1 \leq i \leq n$.

Demonstração. Para demostrar o teorema de integração por partes basta usar que a derivada fraca satisfaz a regra do produto

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

Mas essa regra vale (veja o Teorema 1 da subseção 5.2.3 de Evans [1]). □

Veja que o Teorema de Green e o Teorema de Integração por Partes são equivalentes. De fato, já vimos que o teorema de Green implica no teorema de integração por partes. A recíproca pode ser obtida tomando $v = 1$ no Teorema de Integração por Partes.

Uma consequência imediata do Teorema de Integração por Partes é a seguinte fórmula:

$$\int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} v \, dV = -\int_\Omega \mathbf{F} \cdot \nabla v \, dV + \int_{\partial\Omega} v\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

onde $\mathbf{F}$ é um campo de vetores com funções componentes em $H^1(\Omega)$. Em particular, se $\mathbf{F} = \nabla u$

$$\int_\Omega \Delta uv \, dV = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dV + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS.$$

Essa última identidade é chamada de *Primeira Fórmula de Green.*

3. Aplicação

Vamos definir o que são as soluções forte e fraca de um sistema de equações diferenciais parciais e usar o Teorema de Green em $H^1(\Omega)$ para mostrar que, sobre certas hipóteses, essas definições coincidem.

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais parciais:

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \cdot (F_1(\phi, c)\nabla\phi + F_2(\phi, c)\nabla c) + D_1(\phi, c) \text{ em } Q_T, \\ \dfrac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (F_3(\phi, c)\nabla\phi + F_4(\phi, c)\nabla c) + D_2(\phi, c) \text{ em } Q_T, \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \dfrac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0, T), \\ \phi(0) = \phi_0, \quad c(0) = c_0 \text{ em } \Omega, \end{cases}$$

onde, $T > 0$ é arbitrário, $Q_T = \Omega \times (0, T)$ com Ω um domínio aberto e limitado em $\mathbb{R}^n$, a fronteira $\partial\Omega$ é de classe C^1, $\mathbf{n}$ é o campo de vetores unitários normais a $\partial\Omega$ e as funções $F_1,\ F_2,\ F_3,\ F_4,\ D_1$ e D_2 podem ser não lineares. Esse sistema de EDP, em um caso particular, modela a evolução no tempo de um processo isotérmico de solidificação de uma liga binária (veja por exemplo [3]). Um modelo mais geral para esse mesmo fenômeno, que inclui efeitos de convecção na parte líquida, pode ser encontrado em [4].

Em uma primeira investigação ficamos tentados a buscar uma solução $(\phi, c) \in C([0,T]; C^2(\Omega))^2 \cap C^1([0,T]; C(\Omega))^2$, já que essa é a hipótese mínima para que façam sentido as equações em (3), uma solução desse tipo é chamada de *solução clássica* da EDP. Mas com a nossa nova noção de derivada podemos propor a seguinte definição de solução para o problema (3):

Definição 1. *Seja $T > 0$ fixado arbitrariamente. Dizemos que*

$$(\phi, c) \in L^2(0,T; H^2(\Omega))^2 \cap H^1(0,T; L^2(\Omega))^2,$$

é uma solução forte para o problema (3) se $c(0) = c_0$, $\phi(0) = \phi_0$ e valem

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \cdot (F_1(\phi, c)\nabla\phi + F_2(\phi, c)\nabla c) + D_1(\phi, c) \text{ q.t.p em } Q_T,$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (F_3(\phi, c)\nabla\phi + F_4(\phi, c)\nabla c) + D_2(\phi, c) \text{ q.t.p em } Q_T,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{n}} = \frac{\partial c}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \text{ q.t.p em } \partial\Omega \times (0,T),$$

onde as derivadas aqui são derivadas no sentido fraco.

Veja que o espaço onde buscamos uma solução forte para (3) é maior que o espaço onde buscamos as soluções clássicas, pois

$$C([0,T]; C^2(\Omega))^2 \cap C^1([0,T]; C(\Omega))^2 \subset L^2(0,T; H^2(\Omega))^2 \cap H^1(0,T; L^2(\Omega))^2.$$

Podemos enfraquecer mais ainda a noção de solução do problema (3), ou seja, podemos introduzir uma noção de solução onde o espaço factível é ainda maior que o das soluções fortes, chamaremos essa solução de *solução fraca*. Para motivar essa definição, vamos multiplicar as equações na Definição 1 por $v,\ w \in H^1(\Omega)$ e integrar sobre Ω, então obtemos

$$\int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial t} v \, dV = \int_\Omega (\nabla \cdot (F_1(\phi, c)\nabla\phi + F_2(\phi, c)\nabla c) + D_1(\phi, c))\, v \, dV,$$
$$\int_\Omega \frac{\partial c}{\partial t} v \, dV = \int_\Omega (\nabla \cdot (F_3(\phi, c)\nabla\phi + F_4(\phi, c)\nabla c) + D_2(\phi, c))\, w \, dV.$$

Agora, usando o teorema de Green (Teorema de Integração por Partes), obtemos que

$$\int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial t} v \, dV + \int_\Omega (F_1(\phi, c)\nabla\phi + F_2(\phi, c)\nabla c) \cdot \nabla v \, dV = \int_\Omega D_1(\phi, c) v \, dV,$$
$$\int_\Omega \frac{\partial c}{\partial t} w \, dV + \int_\Omega (F_3(\phi, c)\nabla\phi + F_4(\phi, c)\nabla c) \cdot \nabla w \, dV = \int_\Omega D_2(\phi, c) w \, dV.$$

Para que as integrais $\displaystyle\int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial t} v \, dV$ e $\displaystyle\int_\Omega \frac{\partial c}{\partial t} w \, dV$ façam sentido precisamos pedir pelo menos que $(\phi, c) \in H^1(0,T; L^2(\Omega))^2$, mas podemos enfraquecer essa condição e pedir apenas que $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ e $\frac{\partial c}{\partial t}$ definam funcionais lineares de $H^1(\Omega)$ em $\mathbb{R}$, ou seja, $(\phi, c) \in H^1(0,T; H^1(\Omega)')^2$. Isso motiva a seguinte definição

Definição 2. *Seja $T > 0$ fixado arbitrariamente. Dizemos que o par*

$$(\phi, c) \in L^2(0,T; H^1(\Omega))^2 \cap H^1(0,T; H^1(\Omega)')^2$$

é uma solução fraca para o problema (3) se $c(0) = c_0$, $\phi(0) = \phi_0$ e valem

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, v \right\rangle + \int_\Omega (F_1(\phi,c)\nabla\phi + F_2(\phi,c)\nabla c)\cdot \nabla v \, dV = \int_\Omega D_1(\phi,c) v \, dV, \tag{4}$$

$$\left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, w \right\rangle + \int_\Omega (F_3(\phi,c)\nabla\phi + F_4(\phi,c)\nabla c)\cdot \nabla w \, dV = \int_\Omega D_2(\phi,c) w \, dV \tag{5}$$

para todo v, $w \in H^1(\Omega)$ e q.t.p em $(0,T)$. Onde o símbolo $\langle \cdot,\cdot \rangle$ denota o para dual $\langle \cdot,\cdot \rangle_{H^1(\Omega)', H^1(\Omega)}$.

Agora vamos usar a Fórmula de Green em $H^1(\Omega)$ para mostrar que, sobre certas hipóteses, uma solução fraca de (3) é uma solução forte.

Proposição 7. *Seja (ϕ, c) uma solução fraca do problema (3). Suponha que*

$$(\phi, c) \in L^2(0,T; H^2(\Omega))^2 \cap H^1(0,T; L^2(\Omega))^2$$

e que

$$det \begin{bmatrix} F_1(\phi,c) & F_2(\phi,c) \\ F_3(\phi,c) & F_4(\phi,c) \end{bmatrix} \neq 0, \quad \textit{q.t.p em } \partial\Omega \times (0,T).$$

Então, (ϕ, c) é solução forte do problema (3).

Demonstração. Se (ϕ, c) é uma solução fraca e $(\phi, c) \in L^2(0,T; H^2(\Omega))^2 \cap H^1(0,T; L^2(\Omega))^2$, então teremos

$$\int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial t} v \, dV + \int_\Omega (F_1(\phi,c)\nabla\phi + F_2(\phi,c)\nabla c)\cdot \nabla v \, dV = \int_\Omega D_1(\phi,c) v \, dV, \tag{6}$$

$$\int_\Omega \frac{\partial c}{\partial t} w \, dV + \int_\Omega (F_3(\phi,c)\nabla\phi + F_4(\phi,c)\nabla c)\cdot \nabla w \, dV = \int_\Omega D_2(\phi,c) w \, dV \tag{7}$$

para todo v, $w \in H^1(\Omega)$ e q.t.p em $(0,T)$, em particular, para todo v, $w \in C_c^\infty(\Omega)$. Então, aplicando integração por partes nas duas equações com v, $w \in C_c^\infty(\Omega)$, segue que

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla \cdot (F_1(\phi,c)\nabla\phi + F_2(\phi,c)\nabla c) - D_1(\phi,c) \right) v \, dV = 0,$$

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial c}{\partial t} - \nabla \cdot (F_3(\phi,c)\nabla\phi + F_4(\phi,c)\nabla c) - D_2(\phi,c) \right) w \, dV = 0,$$

para todo v, $w \in C_c^\infty(\Omega)$ e q.t.p em $(0, T)$. Então, usando o Lema 3, obtemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \cdot (F_1(\phi, c)\nabla \phi + F_2(\phi, c)\nabla c) + D_1(\phi, c) \text{ q.t.p em } Q_T,$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (F_3(\phi, c)\nabla \phi + F_4(\phi, c)\nabla c) + D_2(\phi, c) \text{ q.t.p em } Q_T.$$

Por outro lado, se integrarmos (6) e (7) por partes com v, $w \in H^1(\Omega)$, segue que

$$\int_\Omega \Big(\frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla \cdot (F_1(\phi, c)\nabla \phi + F_2(\phi, c)\nabla c) - D_1(\phi, c)\Big) v\, dV = \int_{\partial\Omega} \left(F_1(\phi, c)\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} + F_2(\phi, c)\frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}}\right) v\, dS,$$

$$\int_\Omega \Big(\frac{\partial c}{\partial t} - \nabla \cdot (F_3(\phi, c)\nabla \phi + F_4(\phi, c)\nabla c) - D_2(\phi, c)\Big) w\, dV = \int_{\partial\Omega} \left(F_3(\phi, c)\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} + F_4(\phi, c)\frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}}\right) w\, dS,$$

para todo v, $w \in H^1(\Omega)$ e q.t.p em $(0, T)$. Assim,

$$\int_{\partial\Omega} \left(F_1(\phi, c)\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} + F_2(\phi, c)\frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}}\right) v\, dS = 0,$$
$$\int_{\partial\Omega} \left(F_3(\phi, c)\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} + F_4(\phi, c)\frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}}\right) w\, dS = 0,$$

para todo v, $w \in H^1(\Omega)$ e q.t.p em $(0, T)$. Usando novamente o Lema 3, segue que

$$F_1(\phi, c)\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} + F_2(\phi, c)\frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} = 0,$$
$$F_3(\phi, c)\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} + F_4(\phi, c)\frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} = 0,$$

q.t.p em $\partial\Omega \times (0, T)$. Mas como

$$det \begin{bmatrix} F_1(\phi, c) & F_2(\phi, c) \\ F_3(\phi, c) & F_4(\phi, c) \end{bmatrix} \neq 0, \quad \text{q.t.p em } \partial\Omega \times (0, T),$$

segue que os sistema tem apenas a solução trivial, ou seja,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ q.t.p em } \partial\Omega \times (0, T).$$

□

4. Conclusão

Vimos que o importante Teorema de Green vale também para funções em $H^1(\Omega)$. Isso nos permite concluir que mesmo que as componentes de um campo não sejam funções contínuas (basta que sejam $H^1(\Omega)$) o fluxo exterior deste campo vetorial através de uma superfície suave (ou a circulação através de uma curva plana), que é fronteira de uma região limitada, pode ser calculado integrando-se a divergência (ou a última componente do rotacional, no caso da região plana), no sentido fraco, do campo sobre a região delimitada pela superfície. Além disso vimos como esse teorema pode ser usado para garantir que uma solução fraca de uma EDP é também uma solução forte, assim, um caminho para garantir existência de solução forte para (3) é mostrar a existência de solução fraca e posteriormente garantir regularidade dessa solução.

Referências

[1] C. L. Evans, *Partial differential equations*. Washington: American Matematical Society, 2002.
[2] J. R. Munkres, *Analysis on manifolds*. Redwood City: Addison-Wesley Publishing Company, 1990.
[3] A. F. Pereira, *Análise matemática de um modelo de campo de fase para um processo de solidificação de uma liga binária*. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas - SP, 2013.
[4] A. F. Pereira and G. Planas, *Analysis of a Three-Dimensional Phase-field Model for Solidification Under a Magnetic Field Effect*. Journal of Mathematical Analysis and Aplications, v. 482, p. 123494, 2020.
[5] J. Stewart, *Cálculo, volume 2*. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

Dep. de Matemática, Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte - MG.
Email address: andrefp@cefetmg.br, Carlos Magno Martins Cosme