

## RESOLVENDO RECORRÊNCIAS

ANTONIO CAMINHA

RESUMO. O problema de obtenção de fórmulas posicionais para sequências recorrentes é de importância central em Combinatória. Este artigo mostra como a teoria elementar de séries de potências complexas pode ser utilizada para resolvê-lo. Primeiro, no caso mais simples de recorrências lineares de coeficientes constantes, depois, em um caso não linear combinatorialmente relevante.

### 1. INTRODUÇÃO

Em Combinatória, é bastante comum que a modelagem analítica de problemas recursivos traduza-se no problema de obter fórmulas posicionais para sequências que satisfaçam relações de recorrência. Nesse sentido, cursos introdutórios de Matemática Discreta ou Combinatória gastam tempo considerável apresentando técnicas para a resolução de tais recorrências, o mais das vezes apoiando-se no uso de séries de potências *formais*.

Em que pese o fato de a correção do uso de séries formais poder ser justificada de maneira relativamente simples (cf. [5], por exemplo), esse ponto não é usualmente apresentado, ou mesmo mencionado, aos estudantes. Por outro lado, mesmo quando outras disciplinas de um curso de Licenciatura ou Bacharelado em Matemática ou Computação ocupam algum tempo com o tema, usualmente o fazem somente para recorrências lineares de coeficientes constantes e no contexto de tópicos bem mais avançados, por exemplo o teorema da decomposição primária em Álgebra Linear.

Uma vez que recorrências de coeficientes analíticos podem ser vistas como análogos discretos da classe correspondente de equações diferenciais, espera-se que a teoria de séries de potências complexas possa ser aplicada com sucesso em seu estudo. Esta nota pretende mostrar que esse é de fato o caso, de sorte que o tema passe a ser acessível a estudantes que tenham sido apresentados à teoria básica de séries de potências, conforme desenvolvida no Capítulo 11 de [1], por exemplo.

Por simplicidade, começaremos analisando o caso de recorrências lineares de coeficientes constantes, mostrando no Teorema 2.1 como resolvê-las rigorosamente;

em seguida, aplicamos esse resultado à análise de progressões aritméticas de ordem superior.

No que concerne o caso não linear, mostramos como argumentos de análise real elementar, juntamente com a teoria de funções de uma variável complexa fornecem uma demonstração simples (e, tanto quanto saibamos, nova) da clássica *fórmula de inversão lagrangiana*. Para os menos familiarizados com o tema, ilustramos sua importância mostrando como ela resolve a famosa recorrência de Catalan.

## 2. RECORRÊNCIAS LINEARES DE COEFICIENTES CONSTANTES

Uma sequência  $(a_n)_{n \geq 1}$  é dita *recorrente linear* (de coeficientes constantes), se existirem um inteiro positivo  $k$  e números complexos  $u_0, \dots, u_{k-1}$ , nem todos nulos, tais que

$$(1) \quad a_{n+k} = u_{k-1}a_{n+k-1} + \dots + u_0a_n,$$

para todo inteiro  $n \geq 1$ .

O natural  $k$  é denominado a *ordem* da recorrência linear e a equação (1) é a *relação de recorrência* ou, simplesmente, a *recorrência* satisfeita pela sequência. Neste caso,  $(a_n)_{n \geq 1}$  é também denominada uma *recorrência linear de ordem  $k$* .

Dados  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ , é imediato verificar que há exatamente uma sequência  $(a_n)_{n \geq 1}$  satisfazendo (1) e tal que  $a_j = \alpha_j$ , para  $1 \leq j \leq k$ . Portanto, uma recorrência linear de ordem  $k$  fica totalmente determinada quando conhecemos a relação de recorrência linear por ela satisfeita e os valores de seus  $k$  primeiros termos.

Se  $(a_n)_{n \geq 1}$  satisfaz (1), definimos seu *polinômio característico* como o polinômio

$$(2) \quad f(X) = X^k - u_{k-1}X^{k-1} - \dots - u_1X - u_0.$$

Nosso propósito, aqui, é dar uma demonstração elementar do seguinte resultado.

**Teorema 2.1.** *Seja  $(a_n)_{n \geq 1}$  uma sequência satisfazendo, para  $n \geq 1$ , a recorrência linear (1), onde  $u_0, \dots, u_{k-1}$  são números complexos dados, com  $u_0 \neq 0$ . Sejam  $z_1, \dots, z_l$  as raízes duas a duas distintas do polinômio característico de  $(a_n)_{n \geq 1}$ , com multiplicidades respectivamente iguais a  $m_1, \dots, m_l$ . Então, para  $n \geq 1$  temos*

$$a_n = p_1(n-1)z_1^{n-1} + \dots + p_l(n-1)z_l^{n-1},$$

onde  $p_1, \dots, p_l \in \mathbb{C}[X]$  são polinômios de graus menores ou iguais a  $m_1 - 1, \dots, m_l - 1$ , respectivamente, os quais são totalmente determinados pelos valores de  $a_1, \dots, a_k$ .

Em linhas gerais, a dinâmica da demonstração é a seguinte: inicialmente, mostramos que a série de potências

$$F(z) = \sum_{n \geq 1} a_n z^n$$

converge em um disco do plano complexo centrado em 0. Em seguida, sendo  $f$  o polinômio característico da sequência e  $h(X) = -u_0X^k - u_1X^{k-1} - \dots - u_{k-1}X + 1$  seu recíproco, mostramos que

$$(3) \quad h(z)F(z) = zp(z),$$

para um certo polinômio  $p \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ , de grau  $\partial p \leq k - 1$ . Por fim, expandimos  $\frac{zp(z)}{h(z)}$  em um disco centrado em 0 e de raio possivelmente menor, e aplicamos a (3) a unicidade da expansão em série de potências. Vejamos os detalhes.

**Prova.** Afirmamos inicialmente que existe uma constante  $R_0 > 0$  tal que  $|a_n| \leq R^n$ , para todos  $n \geq 1$  e  $R > R_0$ . De fato, se  $|a_n| \leq R^n$  para  $1 \leq n < m$ , com  $m > k$ , então a desigualdade triangular fornece

$$\begin{aligned} |a_m| &\leq |u_{k-1}|R^{m-1} + \cdots + |u_1|R^{m-k+1} + |u_0|R^{m-k} \\ &= R^{m-k}(|u_{k-1}|R^{k-1} + \cdots + |u_1|R + |u_0|). \end{aligned}$$

Portanto, se  $g(X) = X^k - |u_{k-1}|X^{k-1} - \cdots - |u_1|X - |u_0|$  e  $R_0 > 0$  for tal que  $g(R) > 0$  para  $R > R_0$ , então, para cada um de tais  $R$ s, temos pelos cálculos acima que  $|a_m| \leq R^{m-k} \cdot R^k = R^m$ . Basta, pois, escolhermos de início  $R_0 > 0$  tal que  $|a_1|, \dots, |a_k| \leq R_0$  e  $g(R) > 0$ , para todo  $R > R_0$ .

Uma vez que  $|a_n| \leq R^n$  para todo inteiro  $n \geq 1$  e todo  $R > R_0$ , o teste da comparação garante a convergência de  $F$  no disco aberto  $D(0; \frac{1}{R})$  do plano complexo. Para mostrar que (3) vale em tal disco, temos primeiramente que

$$\begin{aligned} h(z)F(z) &= - \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{n \geq k-j+1} u_j a_{n-k+j} z^n + \sum_{n \geq 1} a_n z^n \\ &= - \sum_{n \geq k+1} u_0 a_{n-k} z^n - \sum_{n \geq k} u_1 a_{n-k+1} z^n \\ &\quad - \sum_{j=2}^{k-1} \sum_{n \geq k} u_j a_{n-k+j} z^n + \sum_{n \geq k} a_n z^n \\ &= - \sum_{j=2}^{k-1} \sum_{n=k-j+1}^{k-1} u_j a_{n-k+j} z^n + \sum_{n=1}^{k-1} a_n z^n. \end{aligned}$$

Agora, segue de (1) que

$$\begin{aligned} &- \sum_{j=2}^{k-1} \sum_{n \geq k} u_j a_{n-k+j} z^n + \sum_{n \geq k} a_n z^n = \sum_{n \geq k} \left( - \sum_{j=2}^{k-1} u_j a_{n-k+j} + a_n \right) z^n \\ &= \left( - \sum_{j=2}^{k-1} u_j a_j + a_k \right) z^k + \sum_{n \geq k+1} (u_0 a_{n-k} + u_1 a_{n-k+1}) z^n. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
 h(z)F(z) &= - \sum_{n \geq k+1} u_0 a_{n-k} z^n - \sum_{n \geq k} u_1 a_{n-k+1} z^n \\
 &\quad + \left( - \sum_{j=2}^{k-1} u_j a_j + a_k \right) z^k + \sum_{n \geq k+1} (u_0 a_{n-k} + u_1 a_{n-k+1}) z^n \\
 &\quad - \sum_{j=2}^{k-1} \sum_{n=k-j+1}^{k-1} u_j a_{n-k+j} z^n + \sum_{n=1}^{k-1} a_n z^n \\
 &= \left( a_k - \sum_{j=1}^{k-1} u_j a_j \right) z^k - \sum_{j=2}^{k-1} \sum_{n=k-j+1}^{k-1} u_j a_{n-k+j} z^n + \sum_{n=1}^{k-1} a_n z^n,
 \end{aligned}$$

e basta escrever a última expressão acima como  $zp(z)$ .

Como  $h(0) = 1 \neq 0$ , aumentando  $R$ , se necessário, podemos supor que  $h(z) \neq 0$  para  $z \in D(0; \frac{1}{R})$ . Por outro lado, sendo  $z_1, \dots, z_l$  as raízes complexas de  $f$ , com multiplicidades respectivamente iguais a  $m_1, \dots, m_l$ , temos

$$h(X) = (1 - z_1 X)^{m_1} \dots (1 - z_l X)^{m_l},$$

de sorte que

$$(4) \quad F(z) = \frac{zp(z)}{(1 - z_1 z)^{m_1} \dots (1 - z_l z)^{m_l}},$$

para todo  $z \in D(0; \frac{1}{R})$ .

Agora, como  $p$  tem grau menor que o do denominador de (4), aplicando a fórmula de decomposição em frações parciais a (4), concluímos pela existência, para  $1 \leq j \leq l$  e  $1 \leq n_j \leq m_j$ , de constantes  $d_{jn_j}$ , unicamente determinadas pelos coeficientes de  $p$  (e, portanto, por  $a_1, a_2, \dots, a_k$  e  $u_0, u_1, \dots, u_{k-1}$ ), tais que

$$(5) \quad F(z) = z \sum_{j=1}^l \sum_{n_j=1}^{m_j} \frac{d_{jn_j}}{(1 - z_j z)^{n_j}},$$

para todo  $z \in D(0; \frac{1}{R})$ .

Para continuar, precisamos do seguinte fato, o qual pode ser mostrado facilmente a partir do caso  $m = 1$ , por indução sobre  $m$  ou por derivação termo a termo: se  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  e  $m \in \mathbb{N}$ , então

$$(6) \quad \frac{1}{(1 - az)^m} = \sum_{n \geq 0} \binom{n + m - 1}{m - 1} a^n z^n,$$

para todo  $z \in D(0; \frac{1}{|a|})$ .

Em particular, se  $r = \min \{ \frac{1}{R}, \frac{1}{|z_1|}, \dots, \frac{1}{|z_l|} \}$ , então (6) permite escrever

$$\frac{1}{(1 - z_j z)^{n_j}} = \sum_{n \geq 0} \binom{n + n_j - 1}{n_j - 1} z_j^n z^n,$$

para  $1 \leq j \leq l$ ,  $1 \leq n_j \leq m_j$  e  $z \in D(0; r)$ . Portanto, voltando a (5) e para  $|z| < r$ , temos

$$\begin{aligned} F(z) &= z \sum_{j=1}^l \sum_{n_j=1}^{m_j} \sum_{n \geq 0} d_{jn_j} \binom{n+n_j-1}{n_j-1} z_j^n z^n \\ &= \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{j=1}^l \sum_{n_j=1}^{m_j} d_{jn_j} \binom{n+n_j-2}{n_j-1} z_j^{n-1} \right) z^n. \end{aligned}$$

Por fim, uma vez que  $a_n$  é o coeficiente de  $z^n$  na série que define  $F$ , segue da última igualdade acima e da unicidade da expansão em série que

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{j=1}^l \sum_{n_j=1}^{m_j} d_{jn_j} \binom{n+n_j-2}{n_j-1} z_j^{n-1} \\ &= \sum_{j=1}^l \sum_{n_j=1}^{m_j} \frac{d_{jn_j}}{(n_j-1)!} (n+n_j-2)(n+n_j-3) \dots (n+1) n z_j^{n-1} \\ &= \sum_{j=1}^l p_j (n-1) z_j^{n-1}, \end{aligned}$$

onde

$$p_j(X) = \sum_{n_j=1}^{m_j} \frac{d_{jn_j}}{(n_j-1)!} (X+n_j-1)(X+n_j-2) \dots (X+1) z_j^{n-1}$$

é um polinômio de grau menor ou igual a  $m_j - 1$ . □

Concluimos esta seção apresentando uma aplicação interessante do Teorema 2.1, a qual também não é conhecida como deveria.

**Exemplo 2.2.** Dadas uma sequência  $(a_n)_{n \geq 1}$  e um inteiro  $m > 1$ , dizemos que  $(a_n)_{n \geq 1}$  é uma

- i. PA de ordem 1 se  $(a_n)_{n \geq 1}$  for uma PA (progressão aritmética).
- ii. PA de ordem  $m$  se a sequência  $(b_n)_{n \geq 1}$ , tal que  $b_n = a_{n+1} - a_n$  para  $n \geq 1$ , for uma PA de ordem  $m - 1$ .

Uma sequência  $(a_n)_{n \geq 1}$  é uma PA de ordem  $m$  se, e só se,

$$(7) \quad \binom{m+1}{0} a_{n+m+1} - \binom{m+1}{1} a_{n+m} + \dots + (-1)^{m+1} \binom{m+1}{m+1} a_n = 0,$$

para todo  $n \geq 1$ . Esse fato pode ser facilmente demonstrado por indução sobre  $m \geq 1$ , com o auxílio da relação de Stifel entre números binomiais.

Se  $(a_n)_{n \geq 1}$  é uma PA de ordem  $m$ , então (7) vale para todo  $n \geq 1$ , de sorte que o polinômio característico de  $(a_n)_{n \geq 1}$  é

$$\begin{aligned} f(X) &= \binom{m+1}{0} X^{m+1} - \binom{m+1}{1} X^m + \dots + (-1)^{m+1} \binom{m+1}{m+1} \\ &= (X-1)^{m+1}. \end{aligned}$$

Assim, o Teorema 2.1 garante a existência de constantes  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$  tais que

$$a_n = \alpha_0 + \alpha_1(n-1) + \dots + \alpha_m(n-1)^m,$$

para todo  $n \geq 1$ . Avaliando a relação acima para  $n = 1$ , obtemos  $\alpha_0 = a_1$ ; avaliando-a para  $n = 2, \dots, m+1$ , obtemos  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  como soluções do sistema linear de equações

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m & = a_2 - a_1 \\ 2\alpha_1 + 2^2\alpha_2 + \dots + 2^m\alpha_m & = a_3 - a_1 \\ \dots & \dots \\ m\alpha_1 + m^2\alpha_2 + \dots + m^m\alpha_m & = a_{m+1} - a_1 \end{cases}.$$

### 3. A FÓRMULA DE INVERSÃO LAGRANGIANA

Conforme veremos mais adiante, a modelagem de situações combinatórias interessantes, como o clássico *problema de Catalan*, traduz-se na busca de soluções analíticas  $y = y(z)$  para uma equação da forma

$$(8) \quad y = z\phi(y),$$

em que  $\phi : D(0; r) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função analítica complexa satisfazendo  $\phi(0) \neq 0$ .

Uma tal solução  $y(z) = \sum_{k \geq 1} y_k z^k$  sempre existe num disco  $D(0; s)$ , para algum  $s > 0$ , e a fórmula de inversão lagrangiana explicita  $y_n$  em termos do coeficiente de  $z^{n-1}$  na expansão em série de potências da função  $z \mapsto \phi(z)^n$ . Mais precisamente, temos o seguinte

**Teorema 3.1** (Lagrange). *Seja  $\phi : D(0; r) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica complexa tal que  $\phi(0) \neq 0$ , e  $\phi(z) = \sum_{k \geq 0} \phi_k z^k$  sua expansão em série de potências em torno de 0. Então, existe  $s > 0$  tal que, para  $z \in D(0; s) \subset \mathbb{C}$ , a equação  $y = z\phi(y)$  admite uma única solução analítica  $y(z) = \sum_{k \geq 1} y_k z^k$ . Ademais,*

$$(9) \quad y_n = \frac{1}{n} [u^{n-1}] (\phi(u)^n)$$

para todo inteiro  $n \geq 1$ , onde  $[u^{n-1}] (\phi(u)^n)$  denota o coeficiente de  $u^{n-1}$  na expansão de  $u \mapsto \phi(u)^n$  centrada em 0.

A ideia da prova é, primeiramente, utilizar o teorema da aplicação implícita para mostrar que (8) admite uma única solução continuamente diferenciável  $y = y(z)$  numa vizinhança de 0, com  $y(0) = 0$ . Em seguida, mostramos que, vista com função complexa,  $y$  é analítica. Por fim, utilizamos a fórmula integral de Cauchy para obter (9). Vamos aos detalhes.

**Prova.** Consideremos a função  $F : \mathbb{C} \times D(0; r) \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $F(y, z) = y - z\phi(y)$ . Identificando (da maneira usual)  $\mathbb{C}$  com  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{C} \times D(0; r)$  com um aberto de  $\mathbb{R}^4$ , e calculando a derivada de Fréchet  $d_y F$  de  $F$  com respeito a  $y$ , obtemos

$$d_y F(y, z) = \text{Id} - z\phi'(y),$$

onde  $\phi'(y)$  denota a derivada complexa de  $\phi$  em  $y$  e identificamos  $z\phi'(y)$  com um operador linear em  $\mathbb{R}^2$ , da maneira usual.

Agora, tome  $s > 0$  tal que  $\phi(y) \neq 0$  para todo  $y \in D(0; s)$ , e note que  $F^{-1}(0) = \{(y, z); F(y, z) = 0\}$  é não vazio, pois contém pelo menos o ponto  $(0, 0)$ . Então, em  $F^{-1}(0) \cap (D(0; s) \times D(0; r))$ , temos que

$$d_y F(y, z) = \text{Id} - \frac{\phi'(y)}{\phi(y)} y.$$

(Aqui, novamente vemos  $\frac{\phi'(y)}{\phi(y)} y$  como um operador linear em  $\mathbb{R}^2$ .)

Mas como  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\phi'(y)}{\phi(y)} y = 0$ , podemos supor que  $s > 0$  foi tomado tão pequeno que  $\left| \frac{\phi'(y)}{\phi(y)} y \right| < 1$  para  $y \in D(0; s)$ . Portanto, em  $F^{-1}(0, 0) \cap (D(0; s) \times D(0; r))$  temos

$$d_y F(y, z) = \text{Id} - T_y,$$

onde  $T_y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um operador linear de norma  $\|T_y\| < 1$ .

Precisamos, agora, da afirmação a seguir, a qual é uma decorrência imediata do teorema do núcleo e da imagem.

Afirmação Se  $T : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  é um operador linear com norma  $\|T\| < 1$ , então o operador linear  $S = \text{Id} - T$  é invertível.

Pela afirmação, a derivada  $d_y F(y, z) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um operador invertível, e o teorema da aplicação implícita ([4], capítulo 5) garante que, diminuindo  $r$  e  $s$  um pouco mais, se necessário,  $F^{-1}(0)$  define o gráfico de uma aplicação diferenciável (real)  $y = y(z) : D(0; r) \rightarrow D(0; s)$ , tal que  $y(0) = 0$ ; em particular,  $y = y(z)$  é contínua.

Afirmamos que a função  $y$  é injetiva em  $D(0; r)$ . De fato, para  $z_1, z_2 \in D(0; r)$ , se  $y(z_1) = y(z_2) = w$ , então a relação  $y(z) = z\phi(y(z))$  dá-nos

$$z_1\phi(w) = z_1\phi(y(z_1)) = y(z_1) = y(z_2) = z_2\phi(y(z_2)) = z_2\phi(w);$$

mas, como  $\phi(w) \neq 0$  para  $w \in D(0; s)$ , segue que  $z_1 = z_2$ .

Mostremos agora que  $y$  é uma função analítica (complexa) de  $z \in D(0; r)$  (isso é uma decorrência imediata da teoria de funções de várias variáveis complexas, mas daremos uma demonstração elementar, para tornar a exposição acessível a um público mais amplo). Se  $z, z_0 \in D(0; r)$ , com  $z \neq z_0$ , então a injetividade de  $y$  garante que  $y(z) \neq y(z_0)$ , e daí

$$\begin{aligned} \frac{y(z) - y(z_0)}{z - z_0} &= \frac{z\phi(y(z)) - z_0\phi(y(z_0))}{z - z_0} \\ &= \frac{z\phi(y(z)) - z_0\phi(y(z))}{z - z_0} + \frac{z_0\phi(y(z)) - z_0\phi(y(z_0))}{z - z_0} \\ &= \phi(y(z)) + z_0 \frac{\phi(y(z)) - \phi(y(z_0))}{y(z) - y(z_0)} \cdot \frac{y(z) - y(z_0)}{z - z_0}. \end{aligned}$$

Logo,

$$(10) \quad \frac{y(z) - y(z_0)}{z - z_0} \left( 1 - z_0 \frac{\phi(y(z)) - \phi(y(z_0))}{y(z) - y(z_0)} \right) = \phi(y(z)).$$

Agora, a continuidade de  $y$  fornece  $\lim_{z \rightarrow z_0} y(z) = y(z_0)$ , de sorte que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} z_0 \frac{\phi(y(z)) - \phi(y(z_0))}{y(z) - y(z_0)} = \lim_{y(z) \rightarrow y(z_0)} z_0 \frac{\phi(y(z)) - \phi(y(z_0))}{y(z) - y(z_0)} = z_0 \phi'(y(z_0)),$$

o qual tende a 0 quando  $z_0 \rightarrow 0$ . Podemos, então, supor adicionalmente que  $r$  foi escolhido tão pequeno que  $z_0 \phi'(y(z_0)) \neq 1$  em  $D(0; r)$ . Portanto, fazendo  $z \rightarrow z_0$  em (10), concluímos que  $y'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{y(z) - y(z_0)}{z - z_0}$  existe e

$$y'(z_0) = \frac{\phi(y(z_0))}{1 - z_0 \phi'(y(z_0))}.$$

Em particular,  $y'(0) = \phi(0) = a_0 \neq 0$  e  $y$  é uma função analítica complexa de  $z$ , para  $z \in D(0; r)$ .

Se  $y(z) = y_0 + y_1 z + \dots + y_n z^n + \dots$  é a expansão de  $y$  em série de potências de  $z$  em  $D(0; r)$ , então  $y'(z) = y_1 + 2y_2 z + \dots + n y_{n-1} z^{n-1} + \dots$ . A fórmula integral da Cauchy (veja [6], por exemplo) dá-nos

$$(11) \quad n y_n = [z^{n-1}](y') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{y'(z)}{z^n} dz,$$

onde  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow D(0; r)$  é uma qualquer curva  $C^1$  por partes tal que  $\text{Ind}(\gamma; 0) = 1$ . Mas  $y(z) = z\phi(y(z))$  fornece  $z = \frac{y(z)}{\phi(y(z))}$ , de maneira que

$$n y_n = [z^{n-1}](y') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\phi(y(z))^n y'(z) dz}{y(z)^n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{y \circ \gamma} \frac{\phi(w)^n dw}{w^n}.$$

Por fim, como  $y$  é um difeomorfismo conforme sobre sua imagem, com  $y(0) = 0$ , segue que

$$\text{Ind}(y \circ \gamma; 0) = \text{Ind}(\gamma; 0) = 1.$$

Assim, a igualdade acima nos dá, novamente por aplicação da fórmula integral de Cauchy,

$$n y_n = [u^{n-1}](\phi(u)^n).$$

□

**Exemplo 3.2.** Dado um inteiro  $n \geq 3$ , o problema de Catalan consiste em calcular o número  $a_n$  de maneiras distintas de particionar um polígono convexo de  $n$  lados dado em triângulos, utilizando diagonais que não se intersectem no interior do polígono.

Pondo  $a_1 = 0$  e  $a_2 = 1$ , é possível mostrar (cf. o capítulo 3 de [2], por exemplo) que a sequência  $(a_n)_{n \geq 1}$  satisfaz, para  $n \geq 3$ , a recorrência

$$(12) \quad a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k+1}.$$

Fazendo  $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_{n+2} z^n$ , um cálculo formal garante que (12) é satisfeita se, e só se,

$$f(z) - 1 = z f(z)^2.$$

Mas, com  $y(z) = f(z) - 1 = \sum_{n \geq 1} a_{n+2} z^n$ , a última relação acima é o mesmo que

$$(13) \quad y = z(y + 1)^2.$$

Então, pondo  $\phi(z) = (z + 1)^2$ , o Teorema 3.1 garante que (13) realmente admite uma única solução  $y = y(z)$ , analítica em um disco centrado em 0 e tal que

$$a_{n+2} = \frac{1}{n} [u^{n-1}] (u + 1)^{2n} = \frac{1}{n} \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

para  $n \geq 1$ .

O exemplo anterior é uma pequena ilustração do uso da fórmula de inversão lagrangiana em Combinatória. Para muitas outras, veja a referência [3], onde os autores também aplicam a fórmula de inversão para obter estimativas assintóticas para os números de configurações possíveis em várias situações combinatórias.

#### REFERÊNCIAS

- [1] T. Apostol. *Calculus, Volume I*. John Wiley & Sons, Nova Iorque, 1967.
- [2] A. Caminha. *An Excursion Through Elementary Mathematics III. Discrete Mathematics and Polynomial Algebra*. Springer Nature, Cham, 2018.
- [3] P. Flajolet e R. Sedgewick. *Analytic Combinatorics*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.
- [4] E. L. Lima. *Curso de Análise, vol. 2*. IMPA, Rio de Janeiro, 2000.
- [5] I. Niven. *Formal Power Series*. Amer. Math. Monthly **76** (1969), 871-889.
- [6] M. Soares. *Cálculo em uma Variável Complexa, Quinta Edição*. SBM, Rio de Janeiro, 2016.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
 Email address: caminha@mat.ufc.br