RMU
REVISTA MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Revista Matemática Universitária, vol. 2, 2022
ISSN: 2675-5254 — **DOI:** 10.21711/26755254/rmu20229

O CONTEÚDO GEOMÉTRICO DE FOURIER

PEDRO ANTONIO SOARES DE ALCÂNTARA

Resumo. Como forma de introduzir tópicos de Análise Harmônica em espaços homogêneos, este texto apresenta a série de Fourier de funções periódicas na reta e a decomposição de funções na esfera em harmônicos esféricos como consequência das simetrias dos espaços em questão.

1. Introdução

O objetivo deste texto é, em primeira instância, apresentar a série de Fourier de funções periódicas na reta e a decomposição de funções na esfera em esféricos harmônicos como uma manifestação das simetrias desses espaços. Via de regra, esse tópico é ensinado em cursos de Física e Matemática a partir de soluções de equações diferenciais – por exemplo, a equação do calor no caso de Fourier e a equação de Schrödinger para o átomo de hidrogênio no caso dos harmônicos esféricos –, o que é mais próximo do seu desenvolvimento histórico. Aqui vamos oferecer um olhar de outro ângulo que serve como um guia simplificado para um primeiro contato com Análise Harmônica, focando especificamente em espaços homogêneos por grupos compactos. Assim, em última instância, este é um texto didático em português, com indicações de leituras em inglês, dedicado a discentes de graduação e de pós-graduação que pretendem iniciar estudos em Análise Harmônica.

Veremos como uma variedade suave M com boas simetrias apresenta um espaço $L^2(M)$ com decomposição amigável e compatível com as tais simetrias. Lançaremos mão de alguns poucos resultados para que possamos explorar melhor o conteúdo de outros mais reveladores das consequências de simetrias.

As seções 2 e 3 são dedicadas a tornar preciso e compreensível o conceito de *boas simetrias* que queremos. Na primeira, discutiremos algumas propriedades de grupos de Lie compactos, especialmente suas representações. Na segunda, vamos ver uma caracterização de espaços homogêneos a partir de suas simetrias, o que traz implicações para a maneira como realizamos suas funções.

Data de aceitação: 1 de outubro de 2019.
Palavras chave. Análise Harmônica; grupo compacto; série de Fourier; harmônicos esféricos.

Por fim, a seção 4 traz a aplicação da teoria desenvolvida ao círculo S^1 e à esfera S^2. O caso do círculo nos dá a série de Fourier canônica, enquanto que o caso da esfera nos dá os harmônicos esféricos.

2. Grupos de Lie compactos e suas representações

2.1. **Um pouco do caso geral.** Falar de simetrias é falar de grupos. Aqui queremos falar de simetrias em variedades suaves, então é importante usar uma estrutura de diferenciabilidade além da estrutura de grupo. Um *grupo de Lie* é um grupo G que é também uma variedade suave cujos mapeamentos de produto $G \times G \to G : (g, h) \mapsto gh$ e inversão $G \to G : g \mapsto g^{-1}$ são suaves.

Para $\mathbb{K}$ igual a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, seja $GL(n, \mathbb{K})$ o grupo linear geral de ordem n sobre $\mathbb{K}$. Além de ser obviamente um grupo com o produto de matrizes, $GL(n, \mathbb{K})$ também herda a estrutura de variedade de $\mathbb{K}^{n\times n}$. Sendo o produto e a inversão funções racionais nas entradas das matrizes, esse é um exemplo de grupo de Lie. Em particular, temos que $GL(1, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^* := \mathbb{K}\backslash\{0\}$ é um grupo de Lie. Outro exemplo talvez um pouco mais óbvio é $\mathbb{K}^n$ com a soma.

Doravante, sejam G e H grupos de Lie. Para manter coerência com a estrutura suave, todas as definições algébricas usuais recebem alguns acréscimos. Dizemos, por exemplo, que H é um *subgrupo de Lie* de G se é um subgrupo e é também uma subvariedade imersa de G, ou seja, a inclusão $H \hookrightarrow G$ é uma imersão.

Uma vez que abertos em variedades são subvariedades mergulhadas, i.e., herdam de forma direta a estrutura diferenciável, todo subgrupo aberto de um grupo de Lie é um subgrupo de Lie. Então $\mathbb{R}^+$ é um subgrupo de Lie de $\mathbb{R}^*$. É possível também mostrar que todo subgrupo fechado de um grupo de Lie é um subgrupo de Lie mergulhado[1], resultado esse que recebe o nome de *Teorema do Subgrupo Fechado*, cf. [4, Theorem 20.12]. Disso segue que $SL(n, \mathbb{K}) = \{A \in GL(n, \mathbb{K}) : \det(A) = 1\}$ é um subgrupo de Lie de $GL(n, \mathbb{K})$.

Um *homomorfismo de grupos de Lie* $\varphi : G \to H$ é um homomorfismo de grupos que é também um mapeamento suave; se φ é um difeomorfismo, dizemos que é um *isomorfismo de grupos de Lie*. Vejamos, por exemplo, $\det : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$. Sabemos que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ para quaisquer $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$. Ou seja, det é um homomorfismo de grupos. Mas é também suave, pois é racional nas entradas das matrizes. Então det é um exemplo de homomorfismo de grupos de Lie. Como exemplo de isomorfismo, temos $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : t \mapsto e^t$, que tem como inversa a função $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : t \mapsto \ln(t)$.

Para dar mais concretude a um grupo de Lie, é pertinente realizá-lo como um grupo de operadores contínuos em espaços vetoriais. Uma *representação* de G sobre um espaço vetorial topológico complexo[2] V é um homomorfismo de grupos[3] $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ tal que $G \times V \to V : (g, v) \mapsto \rho(g)v$ é um mapeamento contínuo; a *dimensão* da representação é a dimensão de V. Usaremos (ρ, V) para indicar uma

[1] Na verdade, isso é uma equivalência: um subgrupo de um grupo de Lie é fechado se, e só se, é um subgrupo de Lie mergulhado, cf. [4, Corollary 20.13]. Veja que $\mathbb{R}^+$ é também fechado em $\mathbb{R}^*$.

[2] A princípio, não há necessidade da restrição aos complexos, mas assim é mais simples e suficiente para o que vamos fazer.

[3] Denotamos por $\mathrm{Aut}(V)$ o grupo dos homeomorfismos lineares de V.

representação sobre V, onde ρ é o homomorfismo de grupos sobre $\mathrm{Aut}(V)$, ou apenas ρ caso o espaço vetorial esteja subentendido ou seja irrelevante.

Em particular, se V é um espaço vetorial normado de dimensão finita, então uma representação sobre V é um homomorfismo de grupos contínuo entre grupos de Lie. Ocorre que *todo homomorfismo de grupos contínuo entre grupos de Lie é suave*. Afinal, se $\varphi : G \to H$ é um homomorfismo de grupos contínuo, o gráfico $F = \mathrm{graf}(\varphi) = \{(g, \varphi(g)) : g \in G\} \subset G \times H$ é um subgrupo fechado de $G \times H$, o que implica que F é um subgrupo de Lie de $G \times H$. Por fim, basta usar a projeção $F \to G$ para verificar que $G \to F : g \mapsto (g, \varphi(g))$ é um isomorfismo de grupos de Lie, cuja composição com a projeção $F \to H$, que também é homomorfismo de grupos de Lie, resulta em φ.

Por outro lado, se $\rho : G \to GL(n, \mathbb{C})$ é um homomorfismo de grupos de Lie, então é uma representação sobre $\mathbb{C}^n$ com a topologia canônica, pois $G \times \mathbb{C}^n \to GL(n, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n : (g, v) \mapsto (\rho(g), v)$ e $GL(n, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n : (T, v) \mapsto Tv$ são mapeamentos contínuos.

À luz dessa discussão, enunciamos o seguinte fato:

Teorema 2.1. *Uma representação de G sobre $\mathbb{C}^n$ com a topologia canônica é equivalente a um homomorfismo de grupos de Lie $G \to GL(n, \mathbb{C})$.*

Temos ainda que duas representações (ρ_1, V_1) e (ρ_2, V_2) de G são *equivalentes* se existe um homeomorfismo linear $T : V_1 \to V_2$ tal que $\rho_2(g)T = T\rho_1(g)$ para todo $g \in G$. Na prática, podemos pensar que duas representações equivalentes diferem apenas por uma mudança de base.

Devido à estrutura linear, podemos somar representações de forma a obter uma nova representação ou, em contrapartida, podemos eventualmente encontrar *sub-representações*. Dada uma representação (ρ, V) de G, dizemos que um subespaço $W \subset V$ é *invariante* se $\{\rho(g)w : g \in G,\ w \in W\} \subset W$. A representação é dita *irredutível* se existem exatamente dois subespaços invariantes: os triviais V e $\{0\}$; se há mais que dois, ρ é dita *redutível*. Se V pode ser escrito como soma direta (topológica) de subespaços invariantes não triviais, dizemos que ρ é *completamente redutível*.

Representações irredutíveis são, em alguma medida, blocos de construções para representações maiores. Existe uma classe especial de representações para as quais isso é particularmente importante: uma representação $(\rho, \mathcal{H})$ de G sobre um espaço de Hilbert é dita *unitária* se $\rho(g)$ é um operador unitário para todo $g \in G$. Não é difícil verificar que, nesses casos, complementos ortogonais de subespaços invariantes são também subespaços invariantes. Logo, se uma representação unitária $(\rho, \mathcal{H})$ possui um subespaço invariante fechado não trivial, então ela é completamente redutível. Porque todo subespaço de dimensão finita de um espaço de Hilbert é fechado, concluímos:

Lema 2.2. *Toda representação unitária de dimensão finita é irredutível ou completamente redutível.*

A seguir, trazemos um importante resultado sobre possíveis relações entre representações irredutíveis.

Lema 2.3 (Lema de Schur)**.** *Se (ρ_1, V_1) e (ρ_2, V_2) são representações irredutíveis de G e $T : V_1 \to V_2$ é um operador que satisfaz $\rho_2(g)T = T\rho_1(g)$ para todo $g \in G$, então T é inversível ou identicamente nulo.*

Esboço de demonstração. O resultado decorre do fato de que a imagem e o núcleo de T são subespaços invariantes. □

A primeira consequência do Lema de Schur é que todo operador limitado num espaço de Banach que comuta com uma dada representação é múltiplo da identidade. Para ver isso, consideremos uma representação (ρ, V) de G num espaço de Banach e um operador limitado $T : V \to V$ satisfazendo $\rho(g)T = T\rho(g)$ para todo $g \in G$. É sabido que o espectro de T é não vazio, de onde segue que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $T - \lambda\mathbb{1}$ é não invertível. Pelo Lema de Schur, $T - \lambda\mathbb{1}$ deve ser o operador nulo. Em particular, temos o seguinte:

Lema 2.4. *Se G é abeliano e ρ é uma representação irredutível de G num espaço de Banach, então ρ é unidimensional.*

2.2. **Particularidades dos grupos compactos.** Suponhamos, de agora em diante, que G é um grupo de Lie compacto. Existe uma única integral em G, chamada de *integral de Haar*, que satisfaz[4]

i) Invariância:

$$\int_G f(g)\, dg = \int_G f(hg)\, dg = \int_G f(gh)\, dg = \int_G f(g^{-1})\, dg$$

para todo $h \in G$ e toda função $f \in C(G)$;

ii) Normalização:

$$|G| = \int_G 1\, dg = 1\ .$$

Mais detalhes sobre a integral de Haar podem ser encontrados em [1, 3].

Uma aplicação dessa medida é a construção de um produto interno invariante em representações de G. Se $(\rho, \mathcal{H})$ é uma representação de G sobre um espaço de Hilbert com produto interno $\langle\,|\,\rangle_0$, então[5]

$$\langle v|w\rangle = \int_G \langle \rho(g)v|\rho(g)w\rangle_0\, dg \tag{1}$$

é um produto interno em $\mathcal{H}$ tal que

$$\langle \rho(g)v|\rho(g)w\rangle = \langle v|w\rangle \tag{2}$$

para quaisquer $g \in G$ e $v, w \in \mathcal{H}$. Se $\mathcal{H}$ tem dimensão finita, podemos adotar $\langle\,|\,\rangle$ no lugar de $\langle\,|\,\rangle_0$ de modo que ρ se torna uma representação unitária sobre um espaço de Hilbert. Com isso, concluímos que *toda representação de dimensão finita de G é unitária.*

[4]Mais precisamente, existe uma única medida de Radon bi-invariante μ tal que $\mu(G) = 1$.

[5]O integrando é composição de funções contínuas, portanto é integrável.

Outra coisa que conseguimos fazendo uso da integral de Haar é a construção de operadores contínuos que comutam com uma representação unitária $(\rho, \mathcal{H})$ de G: fixado $w \in \mathcal{H}$, tomamos $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dado por

$$Tv = \int_G \langle \rho(g)w|v\rangle \, \rho(g)w \, dg \ . \tag{3}$$

Em [5], operadores dessa forma são usados para provar o seguinte:

Teorema 2.5. *Toda representação unitária irredutível de G tem dimensão finita.*

Apesar do argumento para demonstração do teorema acima ser simples, não o reproduziremos aqui para mantermos um texto conciso.

Vamos, agora, ver uma maneira simples de decompor $L^2(G)$. Comecemos definindo um tipo especial de funções em G: um *coeficiente* de uma representação unitária[6] $(\rho, \mathcal{H})$ de G é uma função da forma

$$\psi^{\rho}_{v,w} : G \to \mathbb{C} : g \mapsto v^*(\rho(g)w) = \langle v|\rho(g)w\rangle \ , \tag{4}$$

onde $v, w \in \mathcal{H}$ e $v^* \in \mathcal{H}^*$ é a dualização de v pelo produto interno. Os coeficientes de duas representações equivalentes geram o mesmo espaço de funções e só precisaremos lidar com representações irredutíveis, por isso escolhemos uma representante de cada classe de equivalência de representações unitárias irredutíveis de G, denotando por $\hat{G}$ o conjunto das representantes escolhidas.

Para cada $\rho \in \hat{G}$, seja $\mathcal{A}_\rho$ o espaço gerado pelos coeficientes de ρ. Seja também $\mathcal{A}$ o espaço gerado por combinações lineares finitas de $\bigcup_{\rho\in\hat{G}} \mathcal{A}_\rho$. Em virtude dos Teoremas 2.1 e 2.5, coeficientes de representações unitárias irredutíveis são não só funções contínuas, como são também funções suaves de G em $\mathbb{C}$, o que significa que $\mathcal{A} \subset C^\infty(G) \subset L^2(G)$.

Dada $(\rho, \mathcal{H}) \in \hat{G}$, uma maneira simples de construir uma base para $\mathcal{A}_\rho$ é tomar uma base ortonormal $\{e_k : k = 1, ..., \dim \rho\}$ de $\mathcal{H}$ e fazer

$$\rho_{k,l} : G \to \mathbb{C} : g \mapsto e^*_k(\rho(g)e_l) = \langle e_k|\rho(g)e_l\rangle \ . \tag{5}$$

Cada $\rho_{k,l}(g)$ é a entrada (k, l) da matriz de $\rho(g)$ com respeito à base $\{e_k : k = 1, ..., \dim \rho\}$. O lema a seguir nos garante que $\{\rho_{k,l} : k, l = 1, ..., \dim \rho\}$ é base ortogonal de $\mathcal{A}_\rho$ e nos diz como normalizá-la.

Lema 2.6 (Relações de ortogonalidade de Schur)**.** *Dadas $(\rho, \mathcal{H}), (\rho', \mathcal{H}') \in \hat{G}$, vale:*

i) Se ρ e ρ' não são equivalentes, então $\mathcal{A}_\rho \perp \mathcal{A}_{\rho'}$;

ii) O conjunto

$$\mathcal{B}_\rho = \{\sqrt{\dim \rho}\, \rho_{k,l} : k, l = 1, ..., \dim \rho\} \ , \tag{6}$$

com cada $\rho_{k,l}$ dada por (5), é uma base ortonormal de $\mathcal{A}_\rho$.

Esboço de demonstração. Podemos recorrer a um operador similar a (3): fixados $w \in \mathcal{H}$ e $w' \in \mathcal{H}'$, fazemos $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ dado por

$$Tv = \int_G \langle \rho(g)w|v\rangle \, \rho(g)w' dg \, , \tag{7}$$

[6] Evidente que essa definição faz sentido para qualquer representação de qualquer grupo sobre qualquer espaço com produto interno.

que satisfaz as hipóteses do Lema de Schur e vale ainda $\langle \psi^{\rho'}_{w',v'} | \psi^{\rho}_{w,v} \rangle = \langle v' | T v \rangle$. O resultado segue da aplicação do Lema de Schur nos casos de interesse. $\square$

Mas isso não é tudo, podemos dizer ainda mais sobre $\mathcal{A}$ em $C^\infty(G)$ e em $L^2(G)$.

Teorema 2.7 (Teorema de Peter-Weyl)**.** *$\mathcal{A}$ é uniformemente denso em $C(G)$ e, portanto, é também denso em $L^2(G)$. Em particular, $\bigcup_{\rho \in \hat{G}} \mathcal{B}_\rho$, com $\mathcal{B}_\rho$ dado por (6), é uma base ortonormal de $L^2(G)$.*

Esboço de demonstração. Basta usar o Teorema de Stone-Weierstrass, ou seja, é suficiente verificar que $\mathcal{A}$ é uma álgebra estrela unital que separa pontos.

Dadas $(\rho, \mathcal{H}), (\rho', \mathcal{H}') \in \hat{G}$, tomemos $\rho_{k,l} \in \mathcal{B}_\rho$ e $\rho'_{m,n} \in \mathcal{B}_{\rho'}$. O produto $\rho_{k,l}\rho'_{m,n}$ é um coeficiente da representação $(\rho \otimes \rho', \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}')$, que é uma representação unitária de dimensão finita e, portanto, pelo Lema 2.2, é irredutível ou completamente redutível. Em ambos os casos, $\rho_{k,l}\rho'_{m,n}$ pode ser escrito como combinação linear finita de coeficientes de representações unitárias irredutíveis, então pertence a $\mathcal{A}$. Isso prova que $\mathcal{A}$ é uma álgebra. A função constante igual a 1 é coeficiente da representação trivial de G sobre $\mathbb{C}$, portanto também pertence a $\mathcal{A}$, o que prova que $\mathcal{A}$ é uma álgebra unital. Além disso, a representação $(\rho^*, \mathcal{H}^*)$ dada por[7]

$$\rho^*(g)v^*(w) = v^*(\rho(g)^{-1}w) = \left\langle v \middle| \rho(g)^{-1} w \right\rangle = \overline{\langle w | \rho(g) v \rangle} \ , \tag{8}$$

é unitária irredutível e gera os complexos conjugados de $\mathcal{A}_\rho$. Isso prova que $\mathcal{A}$ é fechada por complexo conjugado, finalizando a demonstração de que é uma álgebra estrela unital.

A prova de que $\mathcal{A}$ separa pontos pode ser executada por meio de convoluções como feito em [8, Theorem 7]. Esse resultado, no entanto, é válido mesmo que o grupo em questão não seja compacto e recebe o nome de Teorema de Gelfand-Raikov, cf. [1, (3.34) The Gelfand-Raikov Theorem]. $\square$

Por fim, notemos que para cada $(\rho, \mathcal{H}) \in \hat{G}$, o espaço $\mathcal{A}_\rho$ realiza uma representação unitária φ_ρ de G dada por

$$\varphi_\rho(g) f = f^g \ , \quad f^g(h) = f(g^{-1}h) \ . \tag{9}$$

Ocorre que toda representação dessa forma é completamente redutível e se decompõe como representações equivalentes à ρ^* com multiplicidade igual a $\dim \rho$. Com efeito, se $\{e_1, \ldots, e_{\dim \rho}\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}$, então

$$\mathcal{H}^* \to \{\psi^\rho_{v,e_k} : v \in \mathcal{H}\} : v^* \mapsto \psi^\rho_{v,e_k} \ , \tag{10}$$

onde ψ^ρ_{v,e_k} é dada por (4), fornece uma equivalência entre ρ^* e φ_ρ restrita ao subespaço $\{\psi^\rho_{v,e_k} : v \in \mathcal{H}\}$. Para se convencer dessa equivalência, basta comparar

$$\varphi_\rho(g)\psi^\rho_{v,e_k}(h) = \left\langle v \middle| \rho(g^{-1}h) e_k \right\rangle = \langle \rho(g) v | \rho(h) e_k \rangle = \overline{\langle \rho(h) e_k | \rho(g) v \rangle} \tag{11}$$

com (8).

[7] A representação ρ^* é chamada de *contragradiente* ou *dual* de ρ.

Uma vez que $\dim \rho = \dim \rho^*$, obtemos

(12) $$(\varphi_\rho, \mathcal{A}_\rho) \simeq \bigoplus_{1}^{\dim \rho^*} (\rho^*, \mathcal{H}^*) \ .$$

Em suma:

Corolário 2.7.1.

(13) $$L^2(G) = \bigoplus_{\rho \in \hat{G}} \mathcal{A}_\rho \simeq \bigoplus_{\rho \in \hat{G}} \bigoplus_{1}^{\dim \rho} (\rho, \mathcal{H}) \, .$$

3. Espaços homogêneos por grupos de Lie compactos

3.1. **Caracterização de espaços homogêneos genéricos.** Sejam M uma variedade compacta e G um grupo de Lie com identidade e. Uma *ação à esquerda* de G em M é um mapeamento suave $\Phi : G \times M \to M : (g, p) \mapsto g \cdot p$ que satisfaz:

i) $e \cdot p = p$ para todo $p \in M$;
ii) $(gh) \cdot p = g \cdot (h \cdot p)$ para todos $g, h \in G$ e $p \in M$.

De maneira análoga, podemos definir *ação à direita* por meio de $(g, p) \mapsto p \cdot g$, de modo que $p \cdot (gh) = (p \cdot g) \cdot h$. Se G age em M, dizemos que M é um *G-espaço*.

Consideremos uma ação qualquer $\Phi : G \times M \to M$. Dizemos que Φ é *transitiva* se para quaisquer dois pontos $p, q \in M$ existe $g \in G$ tal que $q = \Phi(g, p)$; se a ação é transitiva, dizemos que M é *homogênea*. Se para todo $p \in M$ vale a implicação

(14) $$\Phi(g, p) = p \implies g = e \ ,$$

então a ação é dita *livre*. A nível de exemplo, todo grupo de Lie age transitiva e livremente sobre si mesmo. A ação de $SO(2)$ em $\mathbb{R}^2$ é livre, mas não transitiva.

Tais definições podem ser melhor compreendidas através dos conceitos de órbitas e isotropias. A *órbita* de um ponto $p \in M$ qualquer é o conjunto

(15) $$G(p) = \{\Phi(g, p) : g \in G\} \ ,$$

enquanto que seu *grupo de isotropia* é o subgrupo

(16) $$G_p = \{g \in G : \Phi(g, p) = p\} \ .$$

Assim, M é um G-espaço homogêneo se for a órbita de qualquer um de seus pontos, ao passo que a ação Φ é livre se todo grupo de isotropia for trivial. Além disso, é fácil ver também que para espaços homogêneos todos os grupos de isotropia são isomorfos entre si: dados $p, q \in M$, se existe $g \in G$ tal que $\Phi(g, p) = q$, então a conjugação por g gera um isomorfismo entre G_p e G_q.

É conveniente notar que todo grupo de isotropia é um subgrupo fechado, uma vez que é pré-imagem de um ponto por uma função contínua. Mais uma vez pelo Teorema do Subgrupo Fechado, todo grupo de isotropia é um subgrupo de Lie mergulhado. Outrossim, órbitas definem relações de equivalência em M:

(17) $$p \sim q \iff q \in G(p) \ .$$

Denotamos por M/G o quociente de M por essa relação de equivalência, que nada mais é do que o espaço das órbitas de M. O teorema abaixo fornece condições suficientes para que M/G seja uma variedade.

Teorema 3.1 (Teorema da Variedade Quociente)**.** *Se a ação de G em M é livre e própria*[8]*, então M/G possui uma única estrutura suave tal que a projeção $M \to M/G$ é uma submersão suave.*

A demonstração desse fato não é essencialmente complicada – as condições sobre a ação são usadas para mostrar que toda órbita é uma subvariedade mergulhada, cartas são construídas artesanalmente tomando, localmente, subvariedades perpendiculares a órbitas e a unicidade da estrutura diferenciável segue da suavidade da identidade –, mas é longa e trabalhosa, por isso nos restringimos a referenciar [4, Theorem 21.10].

O importante aqui é que toda ação à direita $H \times G \to G : (h, g) \mapsto gh$ de um subgrupo fechado $H \subset G$ sobre G é própria e livre. Ademais, o espaço das órbitas em G pela ação de H coincide com o espaço das coclasses à esquerda de H em G, de modo que a notação G/H faz sentido. Como corolário, temos o seguinte:

Corolário 3.1.1 (Construção de espaços homogêneos[9])**.** *Se $H \subset G$ é um subgrupo fechado, então G/H é um G-espaço homogêneo pela ação $G \times G/H : (g, \tilde{g}H) \to (g\tilde{g})H$ e a projeção $\pi : G \to G/H$ é uma submersão suave.*

Voltando a ação $\Phi : G \times M \to M$, consideremos que se trata de uma ação à esquerda. Dado um ponto $p \in M$ qualquer, a função

$$\begin{aligned} F : G/G_p &\to G(p) \\ gG_p &\mapsto g \cdot p \end{aligned} \tag{18}$$

é bijetora. Temos que $g \cdot p = h \cdot p$ equivale a $g^{-1}h \in G_p$, que por sua vez equivale a $gG_p = hG_p$, então F está bem definida e é injetora. A sobrejeção é óbvia. Em particular, se M é homogêneo, então cada um de seus pontos corresponde a uma coclasse de um mesmo subgrupo de isotropia em G. Na verdade, F serve para caracterizar espaços homogêneos:

Teorema 3.2 (Caracterização de espaços homogêneos)**.** *Se M é um G-espaço homogêneo e $p \in M$, então F dada como em (18) é um difeomorfismo equivariante.*

Esboço de demonstração. Sejam $\pi : G \to G/G_p$ a projeção canônica e $\varphi_p : G \to M : g \mapsto g \cdot p$. Então $\varphi_p = F \circ \pi$. Uma vez que φ_p é suave e π é uma submersão sobrejetora, temos que F é suave. Também temos que

$$F(ghG_p) = (gh) \cdot p = g \cdot (h \cdot p) = g \cdot F(hG_p)\ . \tag{19}$$

Uma vez que as ações do elemento g em G/G_p e em M são difeomorfismos, a diferencial de F tem posto constante. Como F é bijetora, é um difeomorfismo. □

[8]A ação é *própria* se o mapeamento $G \times M \to M \times M : (g, p) \mapsto (\Phi(g, p), p)$ é próprio.

[9]Mais detalhes em [4, Theorem 21.17].

3.2. **Funções em espaços homogêneos por grupos compactos.** Muito do que virá a seguir nesta seção pode ser encontrado com mais detalhes em [2].

Sejam G um grupo de Lie compacto e $H \subset G$ um subgrupo fechado. Como é de se esperar, existe uma única integral em G/H que satisfaz[10]

$$\int_{G/H} f(gH)d(gH) = \int_G \tilde{f} \circ \pi(g)dg \;. \tag{20}$$

para toda $f \in C(G/H)$, onde $\pi : G \to G/H$ é a projeção canônica, cf. [1, (2.49) Theorem]. O espaço $L^2(G/H)$ pode, então, ser entendido como um subespaço de $L^2(G)$ composto por funções *invariantes à direita* por H, i.e., funções $f \in L^2(G)$ tais que $g \mapsto f(gh)$ coincide com f quase sempre para todos $h \in H$. De igual maneira, $C(G/H)$ pode ser encarado como um subespaço de $C(G)$.

Pelo Teorema de Peter-Weyl e a discussão que teve lugar após ele (cf. Teorema 2.7 e Corolário 2.7.1), $f \in C(G)$ é invariante à direita por H se, e somente se, suas componentes em cada um dos espaços $\mathcal{A}_\rho$, com $\rho \in \hat{G}$, é invariante à direita por H. Vamos, então, descrever $\mathcal{A}_\rho^H$, o subespaço de $\mathcal{A}_\rho$ composto por funções invariantes à direita por H.

Se $\psi^\rho_{v,w} \in \mathcal{A}_\rho$ é um coeficiente não nulo invariante à direita por H, vale

$$\langle v|\rho(g)\rho(h)w\rangle = \psi^\rho_{v,w}(gh) = \psi^\rho_{v,w}(g) = \langle v|\rho(g)w\rangle \tag{21}$$

para todos $h \in H$ e $g \in G$. Disso segue que w se mantém fixo pelas transformações de H. Em contrapartida, se w se mantém fixo por H, então $\psi^\rho_{v,w}$ é invariante à direita. Logo, o espaço $\mathcal{A}_\rho^H$ é não nulo se, e somente se, a representação possui um vetor não nulo fixo por H.

Seja $\hat{G}_H$ o subconjunto de $\hat{G}$ composto somente por representações com vetores não nulos fixos por H. De todo o exposto, concluímos o seguinte:[11]

Teorema 3.3.

$$L^2(G/H) = \bigoplus_{\rho \in \hat{G}_H} \mathcal{A}_\rho^H. \tag{22}$$

4. Redescobrindo Fourier e os harmônicos esféricos

4.1. **A série de Fourier clássica.** Nesta seção, vamos determinar explicitamente a decomposição fornecida pelo Corolário 2.7.1 para o caso $G = S^1$, o círculo – um tratamento similar é executado em [3]. É fácil ver que $S^1 = U(1)$, o grupo das transformações lineares unitárias em $\mathbb{C}$, com elementos dados genericamente por $e^{i\theta}$, onde $\theta \in \mathbb{R}$ e vale $e^{i(\theta+2\pi n)} = e^{i\theta}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. A integral de Haar neste caso pode ser expressa por uma integral em $[-\pi, \pi)$,

$$\int_{S^1} f(g)\, dg = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta \;,$$

[10] Novamente, existe uma única medida de Radon invariante ν em G/H tal que $\nu(G/H) = 1$.

[11] A decomposição de $\mathcal{A}_\rho^H$ – e, por conseguinte, de $L^2(G/H)$ – em representações unitárias irredutíveis de G fica de exercício.

considerando funções em S^1 como funções 2π-periódicas em $\mathbb{R}$, da mesma forma que toda função 2π-periódica em $\mathbb{R}$ pode ser vista como uma função em S^1.

Proposição 4.1. *Para $G = S^1$, temos que $\hat{G} \equiv \mathbb{Z}$, onde $n \in \mathbb{Z}$ equivale a representação de S^1 em $\mathbb{C}$ dada pelo homomorfismo de grupos de Lie $S^1 \to S^1 : e^{i\theta} \mapsto e^{in\theta}$.*

Demonstração. Seja ρ uma representação unitária irredutível de S^1. Uma vez que S^1 é abeliano, pelo Lema 2.4, ρ é unidimensional e, portanto, é um homomorfismo de grupos de Lie de S^1 em $U(1) = S^1$. Ou seja, $\rho(e^{i\theta}) = e^{i\alpha(\theta)}$. Para $\theta_m = 2\pi/m$, com $m \in \mathbb{N}$, temos que $(e^{i\theta_m})^m = 1$, o que implica que $\rho(e^{i\theta_m})^m = (e^{i\alpha(\theta_m)})^m = 1$, de onde segue que $\alpha(\theta_m) = n\theta_m$ para algum $n \in \mathbb{Z}$. A princípio, n parece depender de m, mas $\{e^{i2\pi q} : q \in \mathbb{Q}\}$ é denso em S^1, então $\rho(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$ para todo $e^{i\theta} \in S^1$ e um certo n fixo. E, claro, se $n_1 \neq n_2$, as representações $e^{i\theta} \mapsto e^{in_1\theta}$ e $e^{i\theta} \mapsto e^{in_2\theta}$ não são equivalentes. $\square$

Logo, o Teorema de Peter-Weyl nos diz que $\{e^{in\theta} : n \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormal de $L^2(S^1)$,

$$L^2(S^1) = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} \{c_n e^{in\theta} : c_n \in \mathbb{C}\} \ . \tag{23}$$

Assim, dada qualquer função 2π-periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que satisfaz

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 \, d\theta < \infty \ , \tag{24}$$

temos que

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{in\theta} \ , \tag{25}$$

onde

$$c_n = \left\langle e^{in\theta} \middle| f \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} \, d\theta \ . \tag{26}$$

4.2. **Harmônicos esféricos.** Vejamos, agora, a forma que o Teorema 3.3 assume no caso da esfera S^2 como variedade homogênea pela ação de $G = SU(2)$, o grupo das transformações unitárias especiais em $\mathbb{C}^2$ – um tratamento similar é executado em [6]. Para isso, vamos seguir alguns passos.

Primeiro, vamos verificar que $SU(2) \simeq S^3$, a 3-esfera. Com efeito,

$$U = \begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ z_2 & z_4 \end{pmatrix} \in SU(2)$$

se, e somente se, $UU^* = I$ e $\det U = 1$, o que significa que

$$\begin{cases} |z_1|^2 + |z_3|^2 = |z_2|^2 + |z_4|^2 = 1 \\ z_1\overline{z_2} + z_3\overline{z_4} = 0 \\ z_1 z_4 - z_2 z_3 = 1 \end{cases} . \tag{27}$$

Disso, obtemos que $z_4 = \overline{z_1}$ e $z_3 = -\overline{z_2}$, *i.e.*, os elementos de $SU(2)$ são da forma

$$U = \begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z_2} \\ z_2 & \overline{z_1} \end{pmatrix} \tag{28}$$

com $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$. Então $SU(2) \simeq S^3$, onde o produto em S^3 é expresso por

$$(z_1, z_2)(w_1, w_2) = (z_1 w_1 - w_2 \overline{z_2}, z_2 w_1 + w_2 \overline{z_1}) \ , \tag{29}$$

que equivale ao produto de quatérnios $\mathbb{H} = \mathbb{C}^2$.

Agora, vamos descrever $S^3 \simeq SU(2)$ usando coordenadas especiais que facilitarão a descrição da sua ação sobre S^2. É fácil verificar que todo ponto de S^3 pode ser escrito como

$$(e^{-i\xi} \cos(\omega), e^{-i\zeta} \operatorname{sen}(\omega)) \ , \quad \xi, \zeta, \omega \in \mathbb{R} \, .$$

Fazendo $\alpha = \xi - \zeta$, $\gamma = \xi + \zeta$ e $\beta = 2\omega$, obtemos que todo $U \in SU(2)$ pode ser escrito como

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\gamma+\alpha}{2}} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) & -e^{i\frac{\gamma-\alpha}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ e^{-i\frac{\gamma-\alpha}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) & e^{i\frac{\gamma+\alpha}{2}} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{pmatrix} = e^{-\frac{i\alpha}{2}\sigma_3} e^{-\frac{i\beta}{2}\sigma_2} e^{-\frac{i\gamma}{2}\sigma_3} \ , \tag{30}$$

onde σ_2 e σ_3 são as matrizes de Pauli

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

De posse disso, construímos um homomorfismo sobrejetor de grupos de Lie

$$SU(2) \to SO(3) : U(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto R(\alpha, \beta, \gamma) \ , \tag{31}$$

onde $R(\alpha, \beta, \gamma)$ é a rotação em $\mathbb{R}^3$ descrita pela composição da rotação de ângulo γ em torno do eixo z com a rotação de ângulo β em torno do eixo y com a rotação de ângulo α em torno do eixo z novamente[12]. Desse modo, temos uma ação à esquerda transitiva de $SU(2) \simeq S^3$ em $S^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ por meio de rotações.

Finalmente, notemos que o grupo de isotropia do polo norte $\mathbf{n}_0 = (0, 0, 1) \in S^2$ é o $U(1) = S^1$ gerado por $e^{-i\frac{\gamma}{2}\sigma_3}$ em $SU(2)$ e por $(e^{-i\gamma/2}, 0)$ em S^3. Logo, pelo Teorema 3.2, $S^2 \simeq S^3/S^1 \simeq SU(2)/U(1)$. A projeção canônica $\pi : S^3 \to S^1$ é dada por

$$\pi(z_1, z_2) = (x, y, z) \ , \quad \begin{cases} x + iy = 2\overline{z_1} z_2 \\ z = |z_1|^2 - |z_2|^2 \end{cases} \ , \tag{32}$$

e recebe o nome de *mapa de Hopf*. Estendendo-o para $SU(2)$ sem mudança na notação, um cálculo direto nos mostra que

$$\pi(U(\alpha, \beta, \gamma)) = (\cos(\alpha) \operatorname{sen}(\beta), \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta), \cos(\beta)) \ , \tag{33}$$

então os ângulos (α, β) em $SU(2)$ estão em correspondência com as coordenadas esféricas[13] (θ, ϕ) em S^2 através do mapa de Hopf. Dessa escolha de coordenadas, a integral de Haar em S^2 é expressa como

$$\int_{S^2} f(\mathbf{n}) \, d\mathbf{n} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi f(\theta, \phi) \operatorname{sen}(\phi) \, d\theta d\phi \ . \tag{34}$$

[12] Tais ângulos são comumente chamados de *ângulos de Euler*.

[13] Aqui usamos θ para azimute e ϕ para colatidude.

Por fim, precisamos determinar as representações unitárias irredutíveis de $SU(2)$ – o que não é tão elementar como no caso de $U(1)$ – e descobrir quais delas possuem vetores não nulos fixos por $U(1) = \{e^{-i\frac{\gamma}{2}\sigma_3} : \gamma \in \mathbb{R}\}$. O jeito mais simples de executar essa tarefa é por meio do estudo da *álgebra de Lie* de $SU(2)$. Como isso foge do escopo deste texto, vamos nos limitar a enunciar o resultado abaixo e apenas indicar a leitura de [6], que constrói explicitamente essas representações usando polinômios complexos em duas variáveis.

Teorema 4.2. *Para $G = SU(2)$, temos que $\hat{G} \equiv \{j : 2j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$, onde cada $j \geq 0$ inteiro ou semi-inteiro equivale a uma representação ρ_j de $SU(2)$ em $\mathbb{C}^{2j+1}$ tal que $\rho_j(e^{-i\frac{\gamma}{2}\sigma_3}) = e^{-i\gamma J_3}$, sendo J_3 diagonal com autovalores $\{j, j-1, ..., -j+1, -j\}$. Em particular, $\mathbb{C}^{2j+1}$ possui vetores não nulos fixos por $U(1) = \{e^{-i\frac{\gamma}{2}\sigma_3} : \gamma \in \mathbb{R}\}$ via ρ_j se, e somente se, j é inteiro.*

Para cada $j \geq 0$ inteiro ou semi-inteiro podemos tomar a *base canônica de spin*[14] $\{u_m : m = j, j-1, ..., -j+1, -j\}$ de $\mathbb{C}^{2j+1}$ que satisfaz $J_3 u_m = m\, u_m$ de modo que, no caso em que j é inteiro, os coeficientes $\sqrt{2j+1}\,\langle u_m|\rho_j(g)u_0\rangle$ constituem uma base ortonormal de $\mathcal{A}_{\rho_j}^{U(1)}$ pelas relações de ortogonalidade de Schur (cf. Lema 2.6). Resta, então, escrever tais coeficientes de forma mais amigável usando nossas coordenadas angulares – por sorte, alguém já fez isso antes. As funções

$$D^j_{m,m'}(\alpha,\beta,\gamma) = \langle u_m|\rho_j(U(\alpha,\beta,\gamma))u_{m'}\rangle \tag{35}$$

são conhecidas como *D-funções de Wigner*. A expressão geral é feia e complicada:

$$D^j_{m,m'}(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-im\alpha} d^j_{m,m'}(\beta) e^{-im'\gamma}\ , \tag{36}$$

onde

$$\begin{aligned} d^j_{m,m'}(\beta) = &(-1)^{j-m'}\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!} \\ &\times \sum_k (-1)^k \frac{(\cos(\frac{\beta}{2}))^{m+m'+2k}(\operatorname{sen}(\frac{\beta}{2}))^{2j-m-m'-2k}}{k!(j-m-k)!(j-m'-k)!(m+m'+k)!}\ , \end{aligned} \tag{37}$$

com k varrendo todos os valores que fazem sentido, são as *d-funções de Wigner*, cf. [7]. Porém, quando $m' = 0$, que é nosso caso de interesse, temos que

$$d^j_{m,0}(\beta) = \sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!}} P^m_j(\cos(\beta))\ , \tag{38}$$

onde P^m_j são os polinômios associados de Legendre. Então

$$D^j_{m,0}(\alpha,\beta,\gamma) = \sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!}} P^m_j(\cos(\beta))\, e^{-im\alpha}\ . \tag{39}$$

[14] O nome se dá porque tais representações formalizam sistemas quânticos de *spin*.

Em face disso, retomando as coordenadas esféricas em S^2, definimos os *harmônicos esféricos*[15]

$$(40) \qquad Y_j^m(\theta,\phi) := \sqrt{2j+1}\,\overline{D^j_{m,0}(\theta,\phi,0)} = \sqrt{2j+1}\sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!}}P_j^m(\cos(\beta))\,e^{im\alpha}$$

para $j \geq 0$ inteiro e $m \in \{j, j-1, ..., -j+1, -j\}$.

Finalmente, temos que $\{Y_j^m : j \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ m = j, ..., -j\}$ é uma base ortonormal de $L^2(S^2)$,

$$(41) \qquad L^2(S^2) = \bigoplus_{j=0}^{\infty}\left\{\sum_{m=-j}^{j} a_j^m Y_j^m : a_j^m \in \mathbb{C}\right\}\ .$$

Assim, se $f : S^2 \to \mathbb{C}$ é tal que

$$(42) \qquad \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta,\phi)|^2\,\mathrm{sen}(\phi)\,d\theta d\phi < \infty\ ,$$

então

$$(43) \qquad f = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m=-j}^{j} a_j^m Y_j^m\ ,$$

onde

$$(44) \qquad a_j^m = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,\phi)\overline{Y_j^m}(\theta,\phi)\,\mathrm{sen}(\phi)\,d\theta d\phi\ .$$

Referências

[1] FOLLAND, G. *A course in abstract analysis.* CRC Press, 1995.
[2] HELGASON, S. *Groups and geometric analysis.* Academic Press, 1984.
[3] HSIANG, W. Y. Lectures on Lie groups. World Scientific, 2000.
[4] LEE, J. *Introduction to smooth manifolds.* 2 ed. Springer, 2013.
[5] NACHBIN, L. On the finite dimensionality of every irreducible unitary representation of a compact group. *Proc. Amer. Math. Soc.* 12 (1961), 11-12
[6] RIOS, P. de M.; STRAUME, E. *Symbol correspondences for spin systems.* Springer, 2014.
[7] VARSHALOVICH, D. A.; MOSKALEV, A. N.; KHERSONSKII, V. K. *Quantum theory of angular momentum.* World Scientific, 1988.
[8] TAO, T. Haar measure and the Peter-Weyl theorem. *What's new*, 2011. Disponível em: https://terrytao.wordpress.com/2011/09/27/254a-notes-3-haar-measure-and-the-peter-weyl-theorem/.

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo
São Carlos, SP
Email address: pedro.antonio.alcantara@usp.br

[15] Como mencionado na seção 1, tais funções aparecem quando resolvemos certas equações diferenciais. Mais especificamente, são autofunções do laplaciano na esfera, o que também tem relação com as simetrias tratadas aqui. Para mais informações sobre isso, ver [2, 6, 7].