RMU
REVISTA MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

**Revista Matemática Universitária, vol. 2, 2022**
**ISSN:** 2675-5254 — **DOI:** 10.21711/26755254/rmu202210

# FUNÇÕES COMPLEXAS HOLOMORFAS E CAMPOS CONFORMES

JOÃO FRANCISCO DA SILVA FILHO, LARISSA BRAGA FERNANDES
E MARINALDO BRAGA DA SILVA

Resumo. No presente trabalho, abordamos uma interessante relação entre funções complexas holomorfas e campos de vetores conformes (ou simplesmente, *campos conformes*) definidos em subconjuntos abertos do plano Euclidiano munido de uma métrica Riemanniana conforme à métrica canônica. Nesse sentido, provaremos que as únicas métricas Riemannianas no plano Euclidiano que admitem tal relação são conformes à métrica canônica.

## 1. Introdução

Dizemos que campos de vetores conformes (ou simplesmente, *campos conformes*) sobre um *aberto Riemanniano* (aberto de $\mathbb{R}^n$ munido de uma métrica Riemanniana) são campos de vetores, cuja derivada de Lie na sua direção nos fornece uma aplicação, expressa através do produto de uma função real suave (chamada de *fator conforme*) pela métrica Riemanniana. Estes campos de vetores representam generalizações dos campos de Killing e dos campos homotéticos, pois verifica-se que campos de Killing e homotéticos são campos conformes com fator conforme nulo e fator conforme constante, respectivamente. Convém ainda salientar que os campos conformes são assim designados em alusão às transformações conformes.

Diante do exposto, usamos a identificação dos planos complexo e Euclidiano para estudar relações entre as funções complexas holomorfas e os campos conformes, estabelecendo uma interessante identificação entre o espaço das funções complexas holomorfas definidas sobre um mesmo subconjunto aberto do plano complexo e o espaço dos campos conformes sobre abertos Riemannianos do plano Euclidiano munidos com uma métrica Riemanniana conforme à métrica canônica. Finalmente, provaremos que esta identificação é possível apenas para métricas Riemannianas conformes à métrica canônica do plano Euclidiano.

Data de aceitação: .

*Palavras chave.* Funções complexas holomorfas, Campos conformes, Métricas Riemannianas conformes.

Esta identificação ajuda a evidenciar a relação existente entre o caráter conforme das funções complexas holomorfas e o caráter conforme dos campos conformes em abertos Riemannianos do plano Euclidiano munidos com uma métrica Riemanniana conforme à métrica canônica. Devemos ressaltar que a referida identificação permite apresentar uma maneira bem simples de construir exemplos de campos conformes a partir de funções complexas holomorfas, bem como caracterizar os campos conformes definidos sobre abertos Riemannianos do plano Euclidiano munidos com métricas Riemannianas conformes à métrica canônica.

## 2. Preliminares

Nesta seção, apresentamos algumas preliminares do trabalho que encontram-se divididas em três subseções, onde abordamos as funções complexas holomorfas, abertos Riemannianos e os campos conformes, incluindo definições e resultados importantes na compreensão e demonstração dos resultados principais.

2.1. **Funções Complexas.** Recordamos aqui as funções complexas e alguns dos conceitos relacionados a estas, tais como limite, continuidade, derivada complexa e culminando com funções holomorfas. Estaremos admitindo noções elementares sobre topologia no plano complexo e análise complexa, bem como omitindo demonstrações, que podem ser encontradas em Ávila [1] ou Soares [16].

Primeiramente, devemos lembrar que dado um subconjunto $U \subset \mathbb{C}$ não vazio, dizemos que uma função complexa na variável complexa $z$ é uma correspondência, denotada por $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, que associa a cada elemento $z_0 \in U$ um único elemento $f(z_0) \in \mathbb{C}$.

Na sequência, introduzimos a noção de limite para funções complexas definidas em subconjuntos abertos.

**Definição 1.** *Sejam $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função definida num subconjunto aberto, $z_0 \in \mathbb{C}$ um ponto de acumulação do subconjunto $U$ e $w_0 \in \mathbb{C}$ um número complexo. Se dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ satisfazendo*

$$0 < |z - z_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(z) - w_0| < \epsilon,$$

*dizemos que $w_0$ é limite de $f$ com $z \in U$ tendendo a $z_0$ e denota-se $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$.*

De modo similar ao conceito de limite sobre funções reais em uma variável real, verifica-se que se o limite existe, então deve ser único (cf. Ávila [1] ou Soares [16]). Para além disso, dadas funções $f, g : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definidas num subconjunto aberto, $z_0 \in U$ um ponto de acumulação de $U$ e uma constante $c \in \mathbb{C}$, tais que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{z \to z_0} g(z) = w_2.$$

confirmam-se as seguintes propriedades:

(a) $\lim_{z \to z_0} (cf)(z) = cw_1$,

(b) $\lim_{z \to z_0} (f + g)(z) = w_1 + w_2$ e

(c) $\lim_{z \to z_0} (f \cdot g)(z) = w_1 w_2$.

A partir do conceito de limite, apresentamos a definição de continuidade de uma função complexa em um ponto do seu domínio.

**Definição 2.** *Seja $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função definida num subconjunto aberto, então dizemos que $f$ é contínua no ponto $z_0 \in U$ se satisfaz*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

*Quando $f$ é contínua em todos os pontos de $U$, dizemos apenas que $f$ é contínua.*

No que diz respeito à noção de continuidade de funções em uma variável complexa, verificam-se propriedades similares às presentes em funções reais de uma variável real (cf. Guidorizzi [7]). De fato, dadas funções $f, g : U_1 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $h : U_2 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definidas em subconjuntos abertos com $f(U_1) \subset U_2$, $f$ e $g$ contínuas em $z_0 \in U_1$ e $h$ contínua em $f(z_0)$, valem as afirmações:

(a) As funções complexas, dadas por

$$cf : U_1 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f + g : U_1 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad \text{e} \quad f \cdot g : U_1 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

são contínuas em $z_0$;

(b) A função composta $h \circ f : U_1 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é contínua em $z_0$.

Nesse momento, definimos a derivada complexa em um ponto do domínio de uma função complexa de uma variável complexa.

**Definição 3.** *Seja $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função definida num subconjunto aberto, então $f$ é derivável em um ponto $z_0 \in U$ se existe o limite*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

*que será chamado de derivada de $f$ em $z_0$.*

Na sequência, apresentamos algumas das propriedades da derivada de funções complexas que se assemelham com as propriedades da derivada real.

**Proposição 1.** *Sejam $f, g : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funções definidas num subconjunto aberto e deriváveis em $z_0 \in U$ e $c \in \mathbb{C}$ uma constante arbitrária, então as seguintes funções $cf, f + g, f \cdot g : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ são deriváveis em $z_0$ e valem as igualdades:*

(a) $(cf)'(z_0) = c \cdot f'(z_0)$;

(b) $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$;

(c) $(f \cdot g)'(z_0) = f(z_0)g'(z_0) + g(z_0)f'(z_0)$.

O próximo resultado estende mais uma conclusão que é válida para funções reais de uma variável real.

**Proposição 2.** *Sejam $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função definida num subconjunto aberto e derivável em $z_0 \in U$, então $f$ é contínua em $z_0$.*

Dando prosseguimento, apresentamos a seguir uma versão da Regra da Cadeia para funções complexas em uma variável complexa.

**Proposição 3** (Regra da Cadeia)**.** *Sejam $f : U_1 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $g : U_2 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definidas em subconjuntos abertos com $f(U_1) \subset U_2$. Se $f$ é derivável em $z_0 \in U_1$ e $g$ é derivável em $f(z_0) \in U_2$, então $g \circ f : U_1 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é derivável em $z_0$ e vale a igualdade*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Agora vamos definir função holomorfa que será de grande importância para a compreensão dos resultados principais desse trabalho.

**Definição 4.** *Dizemos que uma função complexa $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida num subconjunto aberto é holomorfa, quando existe a derivada $f'(z)$ para todo $z \in U$.*

Devemos lembrar que comumente identifica-se o conjunto dos números complexos com o plano Euclidiano, através da bijeção $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, definida por $\pi(x, y) = x+yi$. Usando essa identificação, podemos escrever uma função complexa $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida em um subconjunto aberto na forma

$$f(z) = u(z) + iv(z),$$

ou alternativamente,

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y),$$

onde as funções $u$ e $v$ correspondem às partes real e imaginária de $f$, respectivamente (cf. Ávila [1] ou Soares [16]).

Diante do exposto, apresentamos dois resultados que apresentam as condições de Cauchy-Riemann como uma condição necessária e suficiente para que uma função complexa seja derivável.

**Proposição 4.** *Seja $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função complexa definida sobre um subconjunto aberto e escrita na forma $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Suponha que $f$ é derivável num ponto $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$, então são satisfeitas as condições de Cauchy-Riemann, dadas por*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad e \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Encerrando a subseção, apresentamos um resultado que corresponde à recíproca da Proposição 4, possibilitando a caracterização das funções complexas holomorfas através das condições de Cauchy-Riemann.

**Proposição 5.** *Seja $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função complexa definida sobre um aberto e escrita na forma $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, tal que as derivadas parciais de $u$ e $v$ existem em $U$ e são contínuas em $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$. Suponha que as condições de Cauchy-Riemann são satisfeitas em $z_0$, então $f$ é derivável nesse ponto.*

2.2. **Abertos Riemannianos.** Nesta segunda subseção, introduzimos importantes conceitos de Geometria Riemanniana restritos a subconjuntos abertos do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$. No decorrer do trabalho, usaremos as notações $C^\infty(U)$ e $\mathfrak{X}(U)$ para denotar os conjuntos das funções reais suaves e dos campos de vetores suaves, respectivamente, definidos sobre um subconjunto aberto não vazio $U$ de $\mathbb{R}^n$.

No intuito de estabelecer notações, vamos fixar um aberto não vazio $U \subset \mathbb{R}^n$ e definir os campos de vetores suaves $\partial_{x_i} : U \to \mathbb{R}^n$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ da seguinte forma

$$\partial_{x_i}(p) = e_i,$$

onde $e_i \in \mathbb{R}^n$ é o vetor que possui $i$-ésima coordenada igual a 1 e as demais nulas. Dados $X \in \mathfrak{X}(U)$ arbitrário, uma função $f \in C^\infty(U)$ e um ponto $p \in U$, definimos

$$X(f)(p) = \sum_{i=1}^{n} X_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \tag{1}$$

onde $X_1, X_2, \ldots, X_n : U \to \mathbb{R}$ denotam as funções coordenadas de $X$.

Esta relação nos permite identificar qualquer $X \in \mathfrak{X}(U)$ como uma aplicação $X : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ que associa cada $f \in C^\infty(U)$ à função suave $X(f) : U \to \mathbb{R}$, definida conforme (1). Inspirado nessa ideia, enunciamos a próxima definição.

**Definição 5.** *Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ definidos sobre um aberto não vazio $U \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que $\langle X, Y \rangle : U \to \mathbb{R}$ é a função suave, dada por*

$$\langle X, Y \rangle(p) = \langle X(p), Y(p) \rangle,$$

*onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ no 2º membro denota o produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$.*

**Observação 1.** *Diante da Definição 5, observa-se que:*

(a) *As funções coordenadas de $X \in \mathfrak{X}(U)$ podem ser expressas por $X_i = \langle X, \partial_{x_i} \rangle$, onde $1 \leq i \leq n$.*

(b) *Podemos adotar as aplicações $dx_i dx_j, dx_i^2 : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to C^\infty(U)$, dadas por*

$$dx_i dx_j(Y, Z) = \langle \partial_{x_i}, Y \rangle \langle \partial_{x_j}, Z \rangle \quad e \quad dx_i^2(Y, Z) = \langle \partial_{x_i}, Y \rangle \langle \partial_{x_i}, Z \rangle,$$

*onde $1 \leq i, j \leq n$.*

Nesse momento, revisitamos um resultado que permite introduzir uma operação entre campos vetores.

**Proposição 6.** *Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ definidos sobre um aberto não vazio $U \subset \mathbb{R}^n$, existe um único campo de vetores $Z \in \mathfrak{X}(U)$ que satisfaz*

$$Z(f) = XY(f) - YX(f),$$

*para toda função $f \in C^\infty(U)$.*

*Demonstração.* Inicialmente, vamos escrever

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \partial_{x_i} \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{n} Y_j \partial_{x_j},$$

onde $X_i, Y_j \in C^\infty(U)$ denotam funções coordenadas. Dessa forma, podemos definir

$$Z = \sum_{k=1}^{n} Z_k \partial_{x_k}, \tag{2}$$

onde $Z_k = \sum_{l=1}^{n} \left( X_l \frac{\partial Y_k}{\partial x_l} - Y_l \frac{\partial X_k}{\partial x_l} \right)$.

Nessas condições, observa-se que

$$XY(f) = \sum_{i,j=1}^{n} X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} X_i Y_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{3}$$

bem como,

$$YX(f) = \sum_{i,j=1}^{n} Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} X_i Y_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{4}$$

portanto decorre de (2), (3) e (4) que $Z(f) = XY(f) - YX(f)$. □

Diante da Proposição 6, podemos agora introduzir mais um importante conceito, chamado *colchete de Lie* (ou simplesmente, *colchete*).

**Definição 6.** *Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ definidos sobre um aberto não vazio $U \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que o colchete de $X$ e $Y$ é o campo de vetores suave denotado por $[X,Y]$ e que satisfaz*

$$[X,Y](f) = XY(f) - YX(f),$$

*para toda função $f \in C^\infty(U)$.*

Agora apresentamos o conceito de métrica Riemanniana em subconjuntos abertos não vazios do espaço Euclidiano.

**Definição 7.** *Uma métrica Riemanniana definida num aberto não vazio $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação $g = \langle \cdot, \cdot \rangle_g$ que associa a cada $p \in U$, um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ em $\mathbb{R}^n$, de modo que a função*

$$p \in U \quad \longmapsto \quad \langle X(p), Y(p) \rangle_p$$

*é suave para todo par de campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$.*

Na sequência, trazemos um exemplo bem elementar de métrica Riemanniana no espaço Euclidiano.

**Exemplo 1.** *A aplicação $g_0 = \sum_{i=1}^{n} dx_i^2$ que associa todo ponto do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ ao produto interno canônico é uma métrica Riemanniana, chamada de métrica Euclidiana canônica (ou simplesmente, métrica canônica).*

O próximo exemplo nos mostra uma maneira de construir métricas Riemannianas sobre um aberto de $\mathbb{R}^n$, partindo de uma função suave positiva e da métrica canônica.

**Exemplo 2.** *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto não vazio e $\rho \in C^\infty(U)$ uma função positiva, então a aplicação $g = \rho^2 g_0$ é uma métrica Riemanniana sobre $U$.*

Diante da definição de métrica Riemanniana, introduzimos a seguir o conceito de aberto Riemanniano.

**Definição 8.** *Um aberto Riemanniano é um subconjunto aberto não vazio $U \subset \mathbb{R}^n$, munido com uma métrica Riemanniana $g$, denotado simplesmente por $(U, g)$.*

Descrevemos a seguir, dois exemplos de abertos Riemanianos.

**Exemplo 3.** *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto não vazio, então $(U, g_0)$ é um aberto Riemanniano.*

**Exemplo 4.** *O subconjunto aberto $U = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$ munido com a métrica Riemanniana $g = x_n^{-2} g_0$ é um aberto Riemanniano, conhecido por espaço hiperbólico e comumente denotado por $\mathbb{H}^n$.*

Em analogia ao conceito de base ortonormal, apresentamos a noção de referencial ortonormal.

**Definição 9.** *Um referencial ortonormal sobre um aberto Riemanniano $(U, g)$ é um conjunto de campos de vetores $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\} \subset \mathfrak{X}(U)$ satisfazendo a condição*

$$\langle E_i, E_j \rangle_g = \delta_{ij} \text{ (delta de Kronecker)},$$

*para todos $1 \leq i, j \leq n$.*

Para ilustrar a definição anterior, trazemos um exemplo bastante conhecido de referencial ortonormal.

**Exemplo 5.** *Dado um aberto não vazio $U \subset \mathbb{R}^n$, verifica-se que o subconjunto*

$$\{\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \ldots, \partial_{x_n}\} \subset \mathfrak{X}(U)$$

*é um referencial ortonormal em $(U, g_0)$.*

Na sequência, apresentamos a definição de campo gradiente definido sobre abertos Riemannianos.

**Definição 10.** *Sejam $(U, g)$ um aberto Riemanniano e $f \in C^\infty(U)$ uma função, então o gradiente de $f$ é o campo de vetores $\nabla f$ que satisfaz a condição*

$$\langle \nabla f, X \rangle_g = X(f),$$

*para todo $X \in \mathfrak{X}(U)$.*

O próximo exemplo mostra que a definição de gradiente anteriormente apresentada coincide com a definição usual, quando consideramos um subconjunto aberto não vazio munido com a métrica canônica.

**Exemplo 6.** *Sejam $(U, g_0)$ um aberto Riemanniano e $f \in C^\infty(U)$ uma função, então o gradiente de $f$ é dado por*

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \partial_{x_i}.$$

De fato, primeiro escrevemos o gradiente de $f$ na forma

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} Y_i \partial_{x_i},$$

onde $Y_i \in C^\infty(U)$ com $1 \leq i \leq n$. Usando a Definição 10, obtemos

$$\langle \nabla f, X \rangle_{g_0} = X(f) = \sum_{j=1}^{n} \langle X, \partial_{x_j} \rangle \frac{\partial f}{\partial x_j},$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(U)$.

Combinando as relações obtidas, verifica-se que $Y_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, donde concluímos que

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \partial_{x_i},$$

conforme enunciado.

Deve-se ressaltar que a escolha de uma métrica Riemanniana acaba determinando uma importante aplicação, chamada *conexão Riemanniana* (ou alternativamente, *conexão de Levi-Civita*). Nesse sentido, introduzimos o conceito de conexão afim.

**Definição 11.** *Uma conexão afim num aberto Riemanniano* $(U, g)$ *é uma aplicação* $\nabla : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)$, *que associa cada par* $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ *a um campo de vetores* $\nabla_X Y$ *e satisfaz as propriedades*

(a) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

(b) $\nabla_{fX+hY} Z = f\nabla_X Y + h\nabla_Y Z$ e

(c) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

*para quaisquer* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$ *e* $f, h \in C^\infty(U)$.

Dando prosseguimento, mostraremos que a escolha de uma métrica Riemanniana em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ determina uma única conexão afim simétrica e compatível com a métrica.

**Proposição 7.** *Seja* $(U, g)$ *um aberto Riemanniano, então existe uma única conexão afim* $\nabla$ *(conexão de Levi-Civita) definida em* $U$, *tal que*

(a) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ *(simetria)* e

(b) $X\langle Y, Z\rangle_g = \langle \nabla_X Y, Z\rangle_g + \langle Y, \nabla_X Z\rangle_g$ *(compatibilidade com a métrica)*,

*para quaisquer* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$.

*Demonstração.* Primeiro, admitimos a existência de uma conexão como enunciado, obtendo

$$X\langle Y, Z\rangle_g = \langle \nabla_X Y, Z\rangle_g + \langle Y, \nabla_X Z\rangle_g,$$

bem como,

$$Y\langle Z, X\rangle_g = \langle \nabla_Y Z, X\rangle_g + \langle Z, \nabla_Y X\rangle_g \quad \text{e} \quad Z\langle X, Y\rangle_g = \langle \nabla_Z X, Y\rangle_g + \langle X, \nabla_Z Y\rangle_g.$$

Na sequência, somamos as duas primeiras igualdades e subtraímos a terceira, resultando em

$$\begin{aligned} &X\langle Y, Z\rangle_g + Y\langle Z, X\rangle_g - Z\langle X, Y\rangle_g \\ &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle_g + \langle Y, \nabla_X Z\rangle_g + \langle \nabla_Y Z, X\rangle_g + \langle Z, \nabla_Y X\rangle_g - \langle \nabla_Z X, Y\rangle_g - \langle X, \nabla_Z Y\rangle_g, \end{aligned}$$

daí usamos o item (a) para chegar à relação

$$\begin{aligned} & X\langle Y, Z\rangle_g + Y\langle Z, X\rangle_g - Z\langle X, Y\rangle_g \\ = \ & \langle [X, Y], Z\rangle_g + \langle Y, [X, Z]\rangle_g + \langle [Y, Z], X\rangle_g + 2\langle Z, \nabla_Y X\rangle_g. \end{aligned}$$

Reorganizando os termos da última igualdade, deduzimos a fórmula

$$\begin{aligned}\langle \nabla_Y X, Z\rangle_g &= \frac{1}{2}(X\langle Y, Z\rangle_g + Y\langle Z, X\rangle_g - Z\langle X, Y\rangle_g \\ &- \langle [X, Y], Z\rangle_g - \langle Y, [X, Z]\rangle_g - \langle [Y, Z], X\rangle_g) \text{ (Fórmula de Koszul),}\end{aligned}$$

que define $\nabla_Y X$ de maneira única, visto que $Z$ é arbitrário e a métrica $g$ é uma aplicação não degenerada.

Para garantir a existência, basta definir $\nabla$ por meio da fórmula de Koszul acima e verificar diretamente, que assim definida, esta satisfaz as propriedades (a) e (b), concluindo a demonstração. $\square$

Apresentamos a seguir a conexão Riemanniana sobre abertos não vazios de $\mathbb{R}^n$ munidos com a métrica canônica.

**Exemplo 7.** *Dado um aberto não vazio $U \subset \mathbb{R}^n$ munido da métrica canônica $g_0$, temos que a conexão Riemanniana de $(U, g_0)$ é expressa por*

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^{n} X(Y_i)\partial_{x_i},$$

*onde $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ e $Y_1, Y_2, \ldots Y_n : U \to \mathbb{R}$ são as funções coordenadas de $Y$.*

Fazendo um cálculo direto e usando as propriedades da conexão Riemanniana, obtemos

$$\nabla_X Y = \sum_{i,j=1}^{n} X_j \nabla_{\partial_{x_j}}(Y_i\partial_{x_i}) = \sum_{i,j=1}^{n} X_j Y_i \nabla_{\partial_{x_j}}\partial_{x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} X_j \partial_{x_j}(Y_i)\partial_{x_i},$$

onde $X = \sum_{j=1}^{n} X_j\partial_{x_j}$. Deduz-se da fórmula de Koszul que $\nabla_{\partial_{x_j}}\partial_{x_i} = 0$ e assim

$$\nabla_X Y = \sum_{i,j=1}^{n} X_j\partial_{x_j}(Y_i)\partial_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} X(Y_i)\partial_{x_i},$$

concluindo o exemplo.

A partir da noção de conexão Riemanniana, podemos introduzir a definição de divergente de um campo de vetores sobre um aberto Riemanniano.

**Definição 12.** *Sejam $(U, g)$ um aberto Riemanniano e $X \in \mathfrak{X}(U)$ campo de vetores, então o divergente de $X$ é a função $div\, X : U \to \mathbb{R}$ dada por*

$$div\, X = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, E_i\rangle_g,$$

*onde $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ denota um referencial ortonormal em $U$.*

**Observação 2.** *Devemos ressaltar que a definição de divergente não depende do referencial ortonormal escolhido* (cf. Carmo [5]).

O próximo exemplo mostra que a definição de divergente apresentada coincide com a definição usual, quando consideramos subconjuntos abertos não vazios munidos com a métrica canônica.

**Exemplo 8.** *Seja* $(U, g_0)$ *um aberto Riemanniano e* $X \in \mathfrak{X}(U)$ *um campo de vetores, então o divergente de* $X$ *é dado por*

$$divX = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i},$$

*onde* $X_1, X_2, \ldots X_n : U \to \mathbb{R}$ *são as funções coordenadas de* $X$*.*

Usamos diretamente a Definição 12 e os Exemplos 5 e 7 para deduzir que

$$div\, X = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{\partial_{x_i}} X, \partial_{x_i} \rangle_{g_0} = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \partial_{x_i}(X_j)\partial_{x_j}, \partial_{x_i} \rangle_{g_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i},$$

coincidindo com a definição usual de divergente (cf. Guidorizzi [8]).

De modo análogo, apresentamos a definição de laplaciano de funções reais suaves definidas sobre abertos Riemannianos.

**Definição 13.** *Sejam* $(U, g)$ *um aberto Riemanniano e* $f \in C^\infty(U)$ *uma função real, então o laplaciano de* $f$ *é a função real* $\Delta f : U \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\Delta f = div\, (\nabla f).$$

**Observação 3.** *Sabendo que as definições de gradiente e divergente sobre abertos Riemannianos munidos da métrica canônica coincidem com suas definições usuais* (cf. Exemplos 6 e 8)*, consequentemente o mesmo ocorre com o laplaciano.*

O conceito de conexão Riemanniana também nos permite definir o hessiano de uma função real suave definida sobre abertos Riemannianos.

**Definição 14.** *Sejam* $(U, g)$ *um aberto Riemanniano e* $f \in C^\infty(U)$ *uma função real, então o hessiano de* $f$ *é a aplicação* $Hess\, f : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to C^\infty(U)$ *dada por*

$$Hess\, f(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle_g.$$

No exemplo a seguir, explicitamos a expressão do hessiano de uma função real suave definida em um aberto Riemanniano munido com a métrica canônica.

**Exemplo 9.** *Seja* $(U, g_0)$ *um aberto Riemanniano e* $f \in C^\infty(U)$ *uma função real, então o seu hessiano é dado por*

$$Hess\, f = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j} dx_i dx_j.$$

Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ arbitrários, vamos escrever

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \partial_{x_i}$$

então segue-se da Definição 14 e dos Exemplos 6 e 7 que

$$\begin{aligned} Hess\, f(X, Y) &= \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle_{g_0} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} X_i \partial_{x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \langle \partial_{x_j}, Y \rangle_{g_0} + \sum_{i,j=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_j} \langle \nabla_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j}, Y \rangle_{g_0}. \end{aligned}$$

Decorre da fórmula de Koszul que $\nabla_{\partial_{x_i}}\partial_{x_j} = 0$, portanto

$$Hess\, f(X,Y) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}\langle \partial_{x_i}, X\rangle\langle \partial_{x_j}, Y\rangle,$$

implicando pela Observação 1(b) que

$$Hess\, f = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j} dx_i dx_j,$$

conforme enunciado.

Na sequência, introduzimos a noção de derivada de Lie da métrica de um aberto Riemanniano na direção de um campo de vetores.

**Definição 15.** *Sejam $(U,g)$ um aberto Riemanniano e $X \in \mathfrak{X}(U)$ campo de vetores, então a aplicação $\mathcal{L}_X g : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to C^\infty(U)$, dada por*

$$\mathcal{L}_X g(Y,Z) = \langle \nabla_Y X, Z\rangle_g + \langle Y, \nabla_Z X\rangle_g$$

*é a derivada de Lie de $g$ na direção de $X$.*

Para finalizar a subseção, deduzimos a expressão da direivada de Lie de um aberto Riemanniano munido da métrica canônica.

**Exemplo 10.** *Seja $(U, g_0)$ um aberto Riemanniano e $X \in \mathfrak{X}(U)$ um campo de vetores, então a derivada de Lie de $g_0$ na direção de $X$ é dada por*

$$\mathcal{L}_X g_0 = \sum_{i,j=1}^{n} \left( \frac{\partial X_j}{\partial x_i} + \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j,$$

*onde $X_1, X_2, \ldots X_n : U \to \mathbb{R}$ são as funções coordenadas de $X$.*

Dados $Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$ arbitrários, tem-se que

$$\mathcal{L}_X g_0(Y,Z) = \langle \nabla_Y X, Z\rangle_{g_0} + \langle Y, \nabla_Z X\rangle_{g_0}$$

então segue do Exemplo 7 que

$$\mathcal{L}_X g_0(Y,Z) = \sum_{j=1}^{n} Y(X_j)\langle \partial_{x_j}, Z\rangle + \sum_{i=1}^{n} Z(X_i)\langle Y, \partial_{x_i}\rangle,$$

onde $X_k = \langle X, \partial_{x_k}\rangle$ para todo índice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Escrevendo $Y = \sum_{i=1}^n \langle Y, \partial_{x_i}\rangle \partial_{x_i}$ e $Z = \sum_{j=1}^n \langle Z, \partial_{x_j}\rangle \partial_{x_j}$, podemos escrever a última igualdade na forma

$$\mathcal{L}_X g_0(Y,Z) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\langle \partial_{x_i}, Y\rangle\langle \partial_{x_j}, Z\rangle + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\langle \partial_{x_j}, Z\rangle\langle \partial_{x_i}, Y\rangle,$$

implicando pela Observação 1(b) que

$$\mathcal{L}_X g_0 = \sum_{i,j=1}^{n} \left( \frac{\partial X_j}{\partial x_i} + \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j,$$

conforme enunciado.

2.3. **Campos Conformes.** Nesta subseção, recordamos os campos conformes sobre abertos Riemannianos junto com diversos conceitos relacionados a estes, exemplos encontrados na literatura e alguns casos particulares bem interessantes dessa classe de campos de vetores, tais como: campos de Killing, campos homotéticos, campos conformes gradientes, campos conformes fechados e campos paralelos.

**Definição 16.** *Um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(U)$ sobre um aberto Riemanniano $(U, g)$ é conforme, quando ocorre a igualdade*

$$\mathcal{L}_X g = 2\psi g,$$

*onde $\psi$ é uma função real suave definida sobre $U$, chamada fator conforme.*

Decorre diretamente da definição de derivada de Lie que a condição $\mathcal{L}_X g = 2\psi g$ equilvale a afirmar que $X$ satisfaz a equação de Killing

$$\langle \nabla_Y X, Z\rangle_g + \langle Y, \nabla_Z X\rangle_g = 2\psi\langle Y, Z\rangle_g,$$

para todos $Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$. Nesse mesmo contexto, deduz-se da Definição 12 que

$$\psi = \frac{1}{n} div\, X,$$

onde *div* denota o divergente.

**Observação 4.** *A derivada de Lie de um campo de vetores gradiente sobre um aberto Riemanniano $(U, g)$ é o dobro do hessiano. Mais precisamente, tem-se que*

$$\mathcal{L}_{\nabla\varphi} g = 2Hess\, \varphi,$$

*onde $\varphi : U \to \mathbb{R}$ é uma função suave.*

Na sequência, apresentamos três exemplos de campos conformes gradientes sobre abertos Riemannianos, bem conhecidos na literatura (cf. [2] e [11]).

**Exemplo 11.** *Considere $\mathbb{R}^n$ munido da métrica canônica $g_0$ e a função $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por $\pi_i(x) = x_i$ com $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Sendo assim, verifica-se que o gradiente*

$$\nabla\pi_i = \partial_{x_i}$$

*é um campo conforme sobre $(\mathbb{R}^n, g_0)$ com fator conforme $\psi \equiv 0$.*

**Exemplo 12.** *Considere o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ munido da métrica canônica $g_0$ e a função $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por*

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}|x|^2,$$

*então $\nabla\varphi$ é um campo conforme sobre $(\mathbb{R}^n, g_0)$ com fator conforme $\psi \equiv 1$.*

**Exemplo 13.** *Considere o subconjunto aberto $U = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$ munido da métrica $g = x_n^{-2} g_0$ e a função $\varphi : U \to \mathbb{R}$, dada por*

$$\varphi(x) = \frac{1}{2x_n}|x|^2,$$

*então $\nabla\varphi$ é um campo conforme sobre $(U, g)$ com fator conforme $\psi \equiv \varphi$.*

Apresentamos mais dois exemplos de campos conformes no espaço Euclidiano, sendo estes não gradientes.

**Exemplo 14.** *O campo de vetores* $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$*, definido por*

$$X = (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y$$

*é conforme sobre* $(\mathbb{R}^2, g_0)$ *com fator conforme dado por* $\psi(x, y) = 2x$*.*

**Exemplo 15.** *O campo de vetores* $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$*, definido por*

$$X = x(x^2 - 3y^2)\partial_x + y(3x^2 - y^2)\partial_y$$

*é conforme sobre* $(\mathbb{R}^2, g_0)$ *com fator conforme dado por* $\psi(x, y) = 3(x^2 - y^2)$*.*

Convém ressaltar que um campo conforme $X$ sobre um aberto Riemanniano $(U, g)$ é dito *homotético* (respectivamente, *Killing*), quando seu fator conforme é constante (respectivamente, identicamente nulo). Um caso particular bem interessante ocorre quando um campo de vetores suave $X$ satisfaz

$$\nabla_Y X = \psi Y,$$

para todo $Y \in \mathfrak{X}(U)$ e nesse caso, dizemos que $X$ é um campo *conforme fechado*. Recordamos ainda que um campo conforme fechado é dito ser *paralelo*, quando seu fator conforme é identicamente nulo.

**Observação 5.** *Todo campo conforme gradiente* $X = \nabla\varphi$ *num aberto Riemanniano* $(U, g)$ *é conforme fechado. De fato, observe que*

$$\langle \nabla_Y X, Z\rangle = \langle \nabla_Y \nabla\varphi, Z\rangle = Hess\,\varphi(Y, Z) = \langle \psi Y, Z\rangle,$$

*portanto* $\nabla_Y X = \psi Y$ *para todo* $Y \in \mathfrak{X}(U)$*.*

Para concluir, apresentamos a definição de métrica Riemanniana conforme.

**Definição 17.** *Sejam* $(U, g)$ *um aberto Riemanniano e* $\rho : U \to \mathbb{R}$ *uma função suave positiva, então dizemos que a métrica Riemanniana* $\overline{g} = \rho^2 g$ *é conforme a* $g$ *(ou vice-versa).*

**Observação 6.** *Nos Exemplos* 2 e 4 *podem ser encontradas métricas Riemannianas conformes à métrica canônica.*

No contexto da Definição 17, pode-se deduzir da definição da derivada de Lie (cf. Definição 15) e das propriedades da conexão Riemanniana (cf. Definição 11 e Proposição 7) que

$$\mathcal{L}_X\overline{g} = \mathcal{L}_X(\rho^2 g) = X(\rho^2)g + \varphi^2\mathcal{L}_X g, \tag{5}$$

ou ainda,

$$\mathcal{L}_X\overline{g} - \varphi^2\mathcal{L}_X g = 2\varphi X(\rho)g = \frac{2}{\rho}X(\rho)\overline{g}, \tag{6}$$

então $X$ é conforme com respeito a $g$ se, e somente se, é conforme com respeito a $\overline{g}$, ou seja, o caráter conforme de $X$ é invariante por mudança conforme de métrica.

## 3. Relacionando Funções Holomorfas e Campos Conformes

Nesta última seção, vamos apresentar os resultados principais do nosso trabalho, que relacionam funções complexas holomorfas e campos conformes definidos sobre uma interessante classe de abertos Riemannianos, bem como diversas aplicações dos referidos resultados.

3.1. **Resultados Principais.** Inicialmente, enunciamos um teorema que revisita uma conhecida relação entre funções complexas holomorfas e campos conformes sobre abertos do plano Euclidiano munidos com métrica conforme à métrica canônica (cf. [3] e [10]) e apresenta uma prova elementar.

**Teorema 1.** *Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto munido com uma métrica $g$ conforme à métrica canônica. Nessas condições, temos que as afirmações a seguir são equivalentes:*

(a) *A função complexa $f = u + iv : \pi(U) \to \mathbb{R}$ é holomorfa;*
(b) *O campo de vetores $X = u\partial_x + v\partial_y \in \mathfrak{X}(U)$ é conforme com respeito a $g$.*

*Demonstração.* Primeiramente, escrevemos $g = \rho^2 g_0$ e usamos as relações (5) e (6) para deduzir que

$$\mathcal{L}_X g = 2\rho X(\rho) g_0 + \rho^2 \mathcal{L}_X g_0,$$

onde $\rho : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ denota uma função suave positiva.

Decorre da expressão da derivada de Lie da métrica canônica que

$$\mathcal{L}_X g = 2\rho X(\rho) g_0 + \rho^2 \left[ 2\left( \frac{\partial u}{\partial x} dx^2 + \frac{\partial v}{\partial y} dy^2 \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)(dxdy + dydx) \right].$$

podendo ser reescrita na forma

$$\mathcal{L}_X g = 2\left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} X(\rho) \right] g - \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)(dxdy + dydx).$$

Por outro lado, segue das Proposições 4 e 5 que $f$ é holomorfa se, e somente se, verificam-se as condições de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

equivalente a afirmar que a expressão da derivada de Lie resume-se a

$$\mathcal{L}_X g = 2\left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} X(\rho) \right] g,$$

isto é, $X$ é um campo conforme com respeito à métrica $g$. □

Como consequência da demonstração do Teorema 1, obtemos o seguinte resultado.

**Corolário 1.** *Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto e $X = u\partial_x + v\partial_y \in \mathfrak{X}(U)$ um campo conforme com respeito a uma métrica conforme $g = \rho^2 g_0$, então o fator conforme de $X$ é dado por*

$$\psi = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left( u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} \right).$$

Usando diretamente o Teorema 1, obtemos uma caracterização para os campos conformes no plano Euclidiano munido com a métrica canônica.

**Corolário 2.** *Uma função complexa $f = u + iv : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é holomorfa, se e somente se, o campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$, definido por*

$$X = u\partial_x + v\partial_y$$

*é conforme sobre o plano $\mathbb{R}^2$ munido com a métrica canônica. Nesse contexto, tem-se que o fator conforme é dado por $\psi = \frac{\partial u}{\partial x}$.*

*Demonstração.* Fazendo $\rho \equiv 1$ no Teorema 1, obtemos $g = g_0$ e o resultado segue diretamente do referido teorema e do Corolário 1. $\square$

Diante do Corolário 2 anteriormente enunciado, apresentamos um exemplo de campo conforme, obtido a partir da função holomorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = e^z$.

**Exemplo 16.** *O campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$, definido por*

$$X = (e^x \cos y)\partial_x + (e^x \operatorname{sen} y)\partial_y$$

*é conforme sobre $(\mathbb{R}^2, g_0)$ com fator conforme dado por $\psi(x, y) = e^x \cos y$.*

Novamente aplicando o Teorema 1, obtemos uma caracterização para campos conformes no plano hiperbólico, onde adotamos a notação $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C}; Im(z) > 0\}$.

**Corolário 3.** *Uma função complexa $f = u + iv : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ será holomorfa, se e somente se, o campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2)$, definido por*

$$X = u\partial_x + v\partial_y$$

*for conforme sobre $\mathbb{H}^2$. Nesse contexto, tem-se que o fator conforme é dado por*

$$\psi = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{y}v = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{y}v.$$

*Demonstração.* Supondo $\rho(x, y) = y^{-1}$ no Teorema 1, obtemos $g = y^{-2}g_0$ e o resultado segue diretamente do referido teorema e do Corolário 1. $\square$

Aplicando o Corolário 3, apresentamos um exemplo de campo conforme a partir da função holomorfa $f : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \frac{1}{z}$.

**Exemplo 17.** *O campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2)$ definido por*

$$X = \frac{x}{x^2 + y^2}\partial_x - \frac{y}{x^2 + y^2}\partial_y$$

*é conforme com fator conforme $\psi : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}$, dado por $\psi(x, y) = \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}$.*

No intuito de apresentar uma recíproca do primeiro teorema, provamos a seguir que métricas conformes à métrica canônica são as únicas métricas Riemanniana no plano Euclidiano que permitem estabelecer a mesma equivalência descrita no Teorema 1.

**Teorema 2.** *Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto do plano Euclidiano munido de uma métrica $g$. Suponha que toda função complexa holomorfa $f = u + iv : \pi(U) \to \mathbb{C}$ implica que o campo de vetores $X = u\partial_x + v\partial_y \in \mathfrak{X}(U)$ é conforme com relação a $g$, então $g$ é conforme à métrica canônica.*

*Demonstração.* Devemos lembrar que uma métrica $g$ definida em um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ pode ser escrita na forma

$$g = Adx^2 + B(dxdy + dydx) + Cdy^2,$$

onde $A, B, C : U \to \mathbb{R}$ são funções suaves, tais que

$$A, C > 0 \qquad \text{e} \qquad AC - B^2 > 0,$$

que correspondem aos coeficientes da primeira forma fundamental.

Sabendo que $A$ é suave e positiva, então a função $\rho = \sqrt{A}^{-1}$ é suave e positiva, permitindo-nos definir a métrica conforme

$$\overline{g} = \rho^2 g = dx^2 + BA^{-1}(dxdy + dydx) + CA^{-1}dy^2,$$

que pode ser reescrita na forma

$$\overline{g} = dx^2 + F(dxdy + dydx) + Gdy^2,$$

onde $F = BA^{-1}$ e $G = CA^{-1}$.

Por um cálculo direto, verifica-se que os campos de vetores

$$E_1 = \partial_x \qquad \text{e} \qquad E_2 = \frac{1}{\sqrt{G - F^2}}\left(\partial_y - F\partial_x\right) \tag{7}$$

constituem um referencial ortonormal, cujos colchetes de Lie satisfazem

$$[E_1, E_1] = [E_2, E_2] = 0 \ \text{ e } \ [E_1, E_2] = -[E_2, E_1] = -\frac{F_x}{\sqrt{G - F^2}}E_1 - \frac{G_x - 2FF_x}{2(G - F^2)}E_2,$$

onde $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$ e $G_x = \frac{\partial G}{\partial x}$.

Usando a fórmula de Koszul (cf. Carmo [5]), obtemos as conexões Riemannianas

$$\overline{\nabla}_{E_1} E_1 = \frac{F_x}{\sqrt{G - F^2}}E_2, \qquad \overline{\nabla}_{E_2} E_2 = -\frac{G_x - 2FF_x}{2(G - F^2)}E_1,$$
$$\overline{\nabla}_{E_1} E_2 = -\frac{F_x}{\sqrt{G - F^2}}E_1 \quad \text{e} \quad \overline{\nabla}_{E_2} E_1 = \frac{G_x - 2FF_x}{2(G - F^2)}E_2,$$

expressas em termos dos campos de vetores que constituem o referencial ortonormal $\{E_1, E_2\}$, conforme descrito por (7).

Diante das equivalências enunciadas, tem-se para toda função complexa holomorfa $f = u + iv : \pi(U) \to \mathbb{C}$ que

$$V = u\partial_x + v\partial_y,$$

é um campo conforme (com relação a $g$ e $\overline{g}$), podendo ser reescrito na forma

$$V = (u + vF)E_1 + v\sqrt{G - F^2}E_2,$$

onde $\pi(U) \subset \mathbb{C}$ é o subconjunto aberto obtido da imagem de $U \subset \mathbb{R}^2$ por $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$.

Sendo $V$ um campo conforme, tem-se em particular que

$$\mathcal{L}_V \overline{g}(E_1, E_1) = \mathcal{L}_V \overline{g}(E_2, E_2) = 2\psi,$$

bem como,

$$\mathcal{L}_V \overline{g}(E_1, E_2) = \mathcal{L}_V \overline{g}(E_2, E_1) = 0,$$

onde $\psi$ denota o fator conforme de $V$.

Nessas condições, temos que

$$\mathcal{L}_V\overline{g}(E_1,E_1) \;=\; 2\langle\overline{\nabla}_{E_1}V,E_1\rangle_{\overline{g}} = 2[E_1\langle V,E_1\rangle_{\overline{g}} - \langle V,\overline{\nabla}_{E_1}E_1\rangle_{\overline{g}}],$$

ou ainda,

$$\mathcal{L}_V\overline{g}(E_1,E_1) = 2\left[E_1(u+vF) - vF_x\right] = 2\left(u_x + v_xF\right),$$

onde $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ e $v_x = \frac{\partial v}{\partial x}$.

De modo análogo, obtemos

$$\mathcal{L}_V\overline{g}(E_2,E_2) = \frac{1}{G-F^2}\left[2(G-F^2)(v_y - v_xF) + (G_x - 2FF_x)u + (G_y - 2FF_y)v\right],$$

bem como,

$$\mathcal{L}_V\overline{g}(E_1,E_2) = \mathcal{L}_V\overline{g}(E_2,E_1) = \frac{1}{\sqrt{G^2-F}}[u_y + v_x(G-2F^2) + uF_x + vF_y] = 0,$$

onde $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$ e $G_y = \frac{\partial G}{\partial y}$.

Em outras palavras, podemos afirmar que os coeficientes $F$ e $G$ da métrica $\overline{g}$ satisfazem as equações

$$4v_xF(G-F^2) = (G_x - 2FF_x)u + (G_y - 2FF_y)v,$$

e

$$u_y + v_x(G-2F^2) + uF_x + vF_y = 0,$$

sempre que a função complexa $f = u + iv : \pi(U) \to \mathbb{C}$ for holomorfa.

Em particular, estas equações valem para a função $f_1 : U \to \mathbb{C}$, dada por

$$f_1(z) = 1,$$

cujas partes real e imaginária são $u_1 \equiv 1$ e $v_1 \equiv 0$, respectivamente, implicando que

$$G_x - 2FF_x = 0 \qquad \text{e} \qquad F_x = 0,$$

portanto $F$ e $G$ não dependem de $x$.

De modo análogo, verifica-se o mesmo para a função $f_2 : U \to \mathbb{C}$, definida por

$$f_2(z) = iz,$$

que nos permite inferir

$$4F(G-F^2) = (G_y - 2FF_y)x \qquad \text{e} \qquad -1 + (G-2F^2) + xF_y = 0,$$

pois as partes real e imaginária são $u_2(x,y) = -y$ e $v_2(x,y) = x$, respectivamente.

Sabendo que $F$ e $G$ não dependem de $x$, então

$$4F(G-F^2) = (G_y - 2FF_y) = 0 \qquad \text{e} \qquad F_y = G - 2F^2 - 1 = 0,$$

ou ainda,

$$F = 0 \qquad \text{e} \qquad G = 1,$$

donde concluímos que $\overline{g} = dx^2 + dy^2$ e $g$ é conforme à métrica canônica. $\square$

**Observação 7.** *Os Teoremas 1 e 2 evidenciam a relação entre o caráter conforme das funções complexas holomorfas e o caráter conforme dos campos conformes em abertos Riemannianos munidos com uma métrica conforme à métrica canônica. Mais detalhes sobre o caráter conforme de funções holomorfas encontram-se em Ávila* [1], *Lins Neto* [9] *e Soares* [16].

3.2. **Algumas Aplicações.** Nesta última subseção, apresentamos mais algumas aplicações dos resultados principais em forma de corolários, os quais descrevem explicitamente os campos homotéticos e os campos conformes gradientes definidos sobre os planos Euclidiano e hiperbólico.

Nesse momento, aplicamos o Corolário 2 para descrever explicitamente os campos homotéticos definidos sobre o plano Euclidiano munido com a métrica canônica.

**Corolário 4.** *Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ um campo homotético sobre $(\mathbb{R}^2, g_0)$, então*

$$X = (\psi x + ay + b)\partial_x + (-ax + \psi y + c)\partial_y,$$

*onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $\psi$ denota o fator conforme de $X$.*

*Demonstração.* Inicialmente, definimos a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

onde $u = \langle X, \partial_x \rangle$ e $v = \langle X, \partial_y \rangle$. Decorre do Teorema 1 que $f$ é holomorfa, portanto

$$\psi = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{8}$$

onde usamos a Proposição 4 e o Corolário 1.

Sabendo que $X$ é homotético, então seu fator conforme $\psi$ é constante e assim

$$u(x, y) = \psi x + \sigma(y) \quad \text{e} \quad v(x, y) = \psi y + \phi(x),$$

onde $\sigma, \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dependem apenas de $y$ e $x$, respectivamente. Da segunda igualdade de (8), obtemos

$$\phi'(x) + \sigma'(y) = 0,$$

portanto $\phi(x) = -ax + c$ e $\sigma(y) = ay + b$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Diante do exposto, tem-se que

$$u(x, y) = \psi x + ay + b \quad \text{e} \quad v(x, y) = -ax + \psi y + c,$$

donde concluímos que

$$X = (\psi x + ay + b)\partial_x + (-ax + \psi y + c)\partial_y,$$

para $a, b, c \in \mathbb{R}$. □

Na sequência, obtemos a descrição explícita dos campos conformes gradiente sobre o plano Euclidiano que corresponde a um caso particular da descrição dos campos conformes gradiente no espaço Euclidiano (cf. Pigola et al. [17]).

**Corolário 5.** *Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ um campo conforme gradiente sobre $(\mathbb{R}^2, g_0)$, então $X$ é homotético e sua função potencial é dada por*

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}[\psi(x^2 + y^2) + 2ax + 2by + 2c],$$

*onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $\psi$ denota o fator conforme.*

*Demonstração.* Sabendo que $X = \nabla\varphi$ é conforme, então

$$\mathcal{L}_X g = 2Hess\,\varphi = 2\psi(dx^2 + dy^2),$$

no entanto, a definição de derivada de Lie nos fornece

$$\mathcal{L}_X g = 2Hess\,\varphi = 2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}dydx + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}dy^2\right),$$

consequentemente,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \psi.$$

Decorre da segunda igualdade acima que

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial^3\varphi}{\partial^2 y\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial^3\varphi}{\partial^2 x\partial y} = 0,$$

portanto $\psi$ é constante e $X$ é homotético. Nessas condições, podemos concluir que

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}[\psi(x^2 + y^2) + 2ax + 2by + 2c],$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $\psi$ denota o fator conforme. $\square$

Agora vamos utilizar o Corolário 3 para descrever explicitamente os campos homotéticos definidos sobre o plano hiperbólico.

**Corolário 6.** *Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2)$ um campo homotético, então $X$ é um campo de Killing dado por*

$$X = [a(x^2 - y^2) + bx + c]\partial_x + (2ax + b)y\partial_y,$$

*onde $a, b, c \in \mathbb{R}$.*

*Demonstração.* Inicialmente, definimos a função $f : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ por

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

onde $u = \langle X, \partial_x\rangle$ e $v = \langle X, \partial_y\rangle$. Decorre do Teorema 1 que $f$ é holomorfa, portanto

$$\psi = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{9}$$

onde usamos a Proposição 4 e o Corolário 1.

Sabendo que $X$ é homotético, então $\psi$ é constante e satisfaz

$$\psi = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{y}v = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{y}v,$$

implicando que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{y}\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{y}v\right) = \frac{1}{y}\psi. \tag{10}$$

Por outro lado, temos que

$$\frac{\partial(y^{-1}v)}{\partial y} = \frac{1}{y}\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{y}v\right) = \frac{1}{y}\psi,$$

que nos fornece

$$v(x,y) = \psi y \ln y + y\sigma(x),$$

onde $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ depende apenas de $x$.

Diante do exposto, tem-se que

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = \sigma'(x),$$

que juntamente com (10) nos permite obter

$$\sigma''(x) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y}\psi,$$

donde deduzimos que $\psi = 0$ e $\sigma'' \equiv 0$.

Nessas condições, podemos escrever

$$\sigma(x) = 2ax + b,$$

implicando que

$$v(x,y) = (2ax + b)y, \tag{11}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$.

Para além disso, vamos ter

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2ax + b \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2ay,$$

portanto $u(x,y) = a(x^2 - y^2) + bx + c$ e junto com a expressão (11), obtemos

$$X = [a(x^2 - y^2) + bx + c]\partial_x + (2ax + b)y\partial_y,$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$. □

Finalmente, obtemos a descrição explícita dos campos conformes gradiente sobre o plano hiperbólico que corresponde a um caso particular da descrição dos campos conformes gradiente no espaço hiperbólico (cf. Silva Filho [15]).

**Corolário 7.** *Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2)$ um campo conforme gradiente, então sua função potencial é dada por*

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2y}[a(x^2 + y^2) + 2bx + 2cy + 2d],$$

*onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e o fator conforme satisfaz $\psi \equiv \varphi - c$.*

*Demonstração.* Inicialmente, vamos definir uma função complexa $f : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ pela expressão

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$

onde $u = \langle X, \partial_x \rangle$ e $v = \langle X, \partial_y \rangle$. Decorre do Teorema 1 que $f$ é holomorfa, portanto

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

onde usamos a Proposição 4.

Por outro lado, usamos a fórmula do gradiente da mudança conforme de métrica (cf. Obata e Yano [12]) para obter

$$y^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = u \qquad \text{e} \qquad y^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v, \tag{12}$$

então definindo $\zeta : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}$ por $\zeta(x,y) = 2y\varphi(x,y)$, podemos reescrever as relações anteriores na forma

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{2}{y} u \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 2\varphi + \frac{2}{y} v.$$

Fazendo um cálculo direto, obtemos

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{2}{y} u_x \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 2\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{2}{y} v_y - \frac{2}{y^2} v = \frac{2}{y} v_y,$$

logo,

$$\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial y} = 0,$$

portanto $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = a$.

Diante do exposto, podemos escrever

$$\zeta(x,y) = a(x^2 + y^2) + 2bx + 2cy + 2d,$$

implicando que

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2y}[a(x^2+y^2) + 2bx + 2cy + 2d],$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Finalmente, aplicamos o Corolário 1 e usamos as expressões (12) para inferir

$$\psi = y^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - y \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tag{13}$$

no entanto,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{a}{y} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{y}\varphi(x,y) - \frac{ay + c}{y},$$

que substituídas em (13) nos permite concluir que $\psi \equiv \varphi - c$. □

**Agradecimentos:** Os autores agradecem ao parecerista pelas valiosas contribuições e à Revista Matemática Universitária pela oportunidade. Ademais, Larissa Braga Fernandes agradece ao programa BICT da Funcap pelo suporte financeiro durante sua Graduação, que possibilitou sua participação neste trabalho.

## Referências

[1] G. S. Ávila. *Variáveis Complexas e Aplicações*. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000.
[2] A. A. Barros e P. Sousa. Compact graphs over a sphere of constant second order mean curvature. *Proceedings of the American Mathematical Society*. **139**, n. 9 (2009), 3105-3114.
[3] F. Begun, A. Moroianu e L. Ornea. Essential points of conformal vector fields. *Journal of Geometry and Physics*, **61** (2011), 589-593.
[4] A. Besse. *Einstein manifolds*. Springer-Verlag, New York (2008).
[5] M. P. Carmo. *Geometria Riemanniana*. IMPA, Rio de Janeiro (2005).
[6] B. Chow, P. Lu e L. Ni. *Hamilton's Ricci Flow*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010.
[7] H. L. Guidorizzi. *Curso de Cálculo - Volume 1*. 5. ed. São Paulo: LTC, 2011.
[8] H. L. Guidorizzi. *Curso de Cálculo - Volume 3*. 5. ed. São Paulo: LTC, 2011.
[9] A. Lins Neto. *Funções de uma Variável Complexa*. 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
[10] G. Manno e G. Metafune. On the extendability of conformal vector fields of 2-dimensional manifolds. *Differential Geometry and its Applications*, **30** (2012), 365-369.
[11] A. C. Muniz Neto. The geometry of closed conformal vector fields on Riemann spaces. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society. (N.S.)*, **42** (2011), 277-300.
[12] M. Obata e K. Yano. Conformal changes of Riemannians metrics. *Journal of Differential Geometry,* **4** (1970), 53-72.
[13] B. O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry with Application to Relativity*. Academic Press, New York (1983).
[14] P. Petersen. *Riemannian Geometry*. New York: Springer-Verlag, 1998. (Graduate Texts in Mathematics.
[15] J. F. da Silva Filho. *Solitons de Ricci e Métricas Quasi-Einstein em Variedades Homogêneas*. 2013. 84 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Pós Graduação em Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.
[16] M. G. Soares. *Cálculo em uma Variável Complexa*. 5. ed. IMPA, Rio de Janeiro, 2014.
[17] S. Pigola, M. Rimoldi e A. Setti. Remarks on non-compact gradient Ricci solitons. *Mathematische Zeitschrift*, **258** (2011), 347-362.
[18] Y. Tashiro. Complete Riemannian manifolds and some vector fields. *Transaction of the American Mathematical Society,* **117** (1965), 251-275.

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Instituto de Ciências Exatas e da Natureza
Redenção - CE
*Email address*: `joaofilho@unilab.edu.br`

Universidade de São Paulo
Programa de Pós graduação em Matemática da FFCLRP
Ribeirão Preto - SP
*Email address*: `larissa.fernandes1234545@gmail.com`

Secretaria Municipal de Educação e Cultura
Barreira - CE
*Email address*: `marinaldobraga37@gmail.com`