

MODELAGEM DE TEMPERATURA NO DISCO

CLEUBER SILVA

RESUMO. Este texto tem o intuito de apresentar uma proposta de solução para o problema de distribuição de temperatura no disco. É apresentada solução através do método de separação de variáveis por coordenadas polares, complementando com o Software Mathematica com condição de simetria trigonal e borda com temperatura nula.

1. INTRODUÇÃO

O problema da transferência de calor no disco se mostra bastante interessante do ponto de vista matemático, pois além do envolvimento de coordenadas polares, aparecem as funções de Bessel não comuns em problemas de uma placa retangular, por exemplo. O conhecimento do comportamento dessas funções é de extrema importância para a solução deste problema, visto que se ganha tanto a análise quando $r \rightarrow 0$ quanto em relação ao tamanho do disco de raio $r = b$ através dos Zeros de Bessel. Falando especificamente das funções de Bessel, elas são obtidas a partir de uma equação diferencial de segunda ordem do tipo:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2)y = 0$$

cujas soluções de 1° e 2° espécies são dadas, respectivamente, por

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m} \text{ e } Y_m(x) = \frac{J_m(x) \cos m\pi - J_{-m}(x)}{\sin m\pi}.$$

Desse modo, sob o viés destas funções, pode-se chegar a resultados bastante concretos. Com ajuda do Software de álgebra computacional **Mathematica**, com a condição de simetria trigonal e borda com temperatura nula. A saber, tomando-se as $u_0(r, \theta) = J_3(\zeta_3 r) \cos(3\theta)$ e $u_0^*(r, \theta) = \sin(r) \sin(r-1) \cos(3\theta)$ como condições iniciais, obteremos a solução do problema.

Palavras chave. Modelagem Matemática, Separação de Variáveis, Funções de Bessel.

2. SITUAÇÃO PROBLEMA

O problema consiste uma placa circular de raio b , homogeneamente constituída de um material de difusividade térmica α . Considerando as condições de fronteira do disco $u(b, \theta, t) = 0$ e $u(r, \theta, t) = u\left(r, \theta + \frac{2n\pi}{3}, t\right)$, $n \in \mathbb{N}$ e $r < b$. Sob as seguintes condições iniciais descritas:

i)

$$u_0(r, \theta) = J_3(\zeta_3 r) \cos(3\theta)$$

ii)

$$u_0^*(r, \theta) = \sin(r) \sin(r - 1) \cos(3\theta)$$

Admitindo-se que este problema não possui fonte interna de calor pode-se dizer que a formulação do problema é dada por:

$$(1) \quad \alpha \nabla^2 u(r, \theta, t) = \frac{\partial u}{\partial t}$$

donde,

$$(2) \quad \nabla^2 u(r, \theta, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{r \partial r} + \frac{\partial^2 u}{r^2 \partial \theta^2}$$

Através desta formulação, pretende-se estudar o comportamento radial e angular da temperatura ao longo do tempo.

3. METODOLOGIA

De posse do método de separação de variáveis pode-se ter,

$$(3) \quad u(r, \theta, t) = f(r)\omega(\theta)g(t)$$

Podemos escrever a equação 1, da seguinte forma:

$$(4) \quad \frac{g'}{\alpha g} = \frac{f''}{f} + \frac{f'}{rf} + \frac{\omega''}{r^2 \omega} = -\lambda$$

Reescrendo a equação 4,

$$(5) \quad \frac{r^2}{f} \left(f'' + \frac{f'}{r} + \lambda f \right) = -\frac{\omega''}{\omega} = \mu$$

E assim resume-se o problema em resolver o sistema,

$$\begin{cases} g' + \alpha \lambda g = 0 \\ \omega'' + \mu \omega = 0 \\ r^2 f'' + r f' + (\lambda r^2 - \mu) f = 0 \end{cases}$$

Para a primeira equação, obtém-se a solução geral,

$$(6) \quad g(t) = c_1 e^{-\alpha t}$$

Para que se possa solucionar a segunda equação do sistema, tem-se os seguintes casos:

3.1. Caso 1. $\mu = 0$

Isso implica em:

$$(7) \quad \omega(\theta) = c_2 \theta + c_3 = \omega\left(\theta + \frac{2n\pi}{3}\right) = c_2\left(\theta + \frac{2n\pi}{3}\right) + c_3 = c_2 \theta + \frac{c_2 2n\pi}{3} + c_3$$

Portanto, $c_2 = 0$ e determina-se,

$$(8) \quad \omega(\theta) = c_3$$

3.2. Caso 2. $\mu = \beta^2 > 0$

$$\omega(\theta) = c_4 \cos \beta \theta + c_5 \sin \beta \theta = \omega\left(\theta + \frac{2n\pi}{3}\right)$$

Que equivalente a escrever:

$$\begin{aligned} \omega\left(\theta + \frac{2n\pi}{3}\right) &= c_4 (\cos(\beta\theta) \cos(\beta 2n\pi/3)\theta - \sin(\beta\theta) \sin(\beta 2n\pi/3)\theta) + \\ &+ c_5 (\sin(\beta\theta) \cos(\beta 2n\pi/3)\theta + \cos(\beta\theta) \sin(\beta 2n\pi/3)\theta) \end{aligned}$$

Igualando estas equações, obtém-se

$$\begin{cases} \cos \beta \frac{2n\pi}{3} = 1 \\ \sin \beta \frac{2n\pi}{3} = 0 \end{cases}$$

Portanto,

$$(9) \quad \beta \frac{2n\pi}{3} = 2k\pi \iff \beta = \frac{3k}{n}$$

Então:

$$(10) \quad \omega(\theta) = c_4 \cos \frac{3k}{n} \theta + c_5 \sin \frac{3k}{n} \theta$$

3.3. **Caso 3.** $\mu = -\beta^2 < 0$, pode-se escrever:

$$(11) \quad \omega(\theta) = c_6 e^{\beta\theta} + c_7 e^{-\beta\theta} = c_6 e^{\beta(\theta + \frac{2n\pi}{3})} + c_7 e^{-\beta(\theta + \frac{2n\pi}{3})}$$

Segue portanto que equação 11 é válida se $\beta = 0$ e assim $\mu = 0$ que é justamente o caso 1, já analisado anteriormente.

Finalmente vamos analisar a terceira equação do sistema com os seguintes casos:

3.4. **Caso 4.** $\mu = 0$ e $\lambda = 0$

A equação se tornará:

$$(12) \quad r^2 f'' + r f' = 0$$

Cuja solução geral é dada por:

$$(13) \quad f(r) = c_8 \ln r + c_9$$

Tomando $r = b$ tem-se:

$$(14) \quad f(b) = 0 = c_8 \ln b + c_9, \quad c_9 = -c_8 \ln b$$

Segue portanto,

$$(15) \quad f(r) = c_8 \ln \frac{r}{b}$$

3.5. **Caso 5.** $\lambda = 0$ e $\mu > 0$

Portanto a terceira equação do sistema se tornará:

$$(16) \quad r^2 f'' + r f' - \mu f = 0$$

Façamos uma análise da solução usando-se série de potência, definindo-se:

$$(17) \quad f(r) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i r^{i+j}$$

donde as respectivas derivadas são:

$$(18) \quad f'(r) = \sum_{i=0}^{\infty} (i+j) a_i r^{i+j-1}$$

$$(19) \quad f''(r) = \sum_{i=0}^{\infty} (i+j)(i+j-1) a_i r^{i+j-2}$$

Substituindo as equações 17, 18, 19 em 16 tem-se:

$$(20) \quad \sum_{i=0}^{\infty} a_i((i+j)^2 - \mu)r^{i+j} = 0$$

Logo $a_i = 0, \forall i = 1, 2, 3, \dots$

3.6. **Caso 6.** $\lambda = \gamma^2 > 0$ e $\mu = 0$

$$(21) \quad r^2 f'' + r f' + (\gamma r)^2 f = 0$$

Cujo solução é dada por:

$$(22) \quad f(r) = c_{10} J_0(\gamma r) + c_{11} Y_0(\gamma r)$$

Quando $r \rightarrow 0^+$ tem-se que $Y_0(\gamma r) \rightarrow -\infty$, logo:

$$(23) \quad f(r) = c_{10} J_0(\gamma r)$$

Como $f(b) = 0$, temos que $J_0(\gamma b) = 0$. Seja x_i alguma raiz de $J_0(\gamma b)$, tem-se:

$$\gamma_i = \frac{x_i}{b}$$

Portanto,

$$(24) \quad f(r) = c_{10} J_0\left(\frac{x_i r}{b}\right)$$

3.7. **Caso 7.** $\lambda = \gamma^2$ e $\mu = \left(\frac{3k}{n}\right)^2$

a solução dada por:

$$(25) \quad f(r) = c_{12} J_{\frac{3k}{n}}(\gamma r)$$

Novamente, fazendo-se $f(b) = 0$ e seja z_i a raiz de $J_{\frac{3k}{n}}(\gamma r)$ tem-se:

$$\gamma_i = \frac{z_i}{b}$$

A equação 25 se tornará:

$$(26) \quad f(r) = c_{12} J_{\frac{3k}{n}}\left(\frac{z_i}{b} r\right)$$

3.8. Caso 8. $\lambda = -\gamma^2$ e $\mu = 0$

Essa análise é análoga ao caso 6. A modificação geral se dá pela equação de Bessel modificada que nós representaremos por I_n . De fato a solução geral deste caso é dada por:

$$(27) \quad f(r) = c_{13} I_0 \left(\frac{s_i}{b} r \right)$$

Cujo s_i é raiz $I_0(\gamma r)$ em $r = b$

3.9. Caso 9. $\lambda = -\gamma^2$ e $\mu = \left(\frac{3k}{n}\right)^2$

análogo o caso 7 tem-se

$$(28) \quad f(r) = c_{14} I_{\frac{3k}{n}} \left(\frac{t_i}{b} r \right)$$

Agora finalmente aglomerando todas as soluções usando-se o fato de $u(\theta, r, t) = f(r)g(t)\omega(\theta)$, temos:

$$\begin{aligned} u(\theta, r, t) = & a_{0,0} \ln \frac{r}{b} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{0,i} J_0 \left(\frac{x_i r}{b} \right) e^{-\alpha t \left(\frac{x_i}{b} \right)^2} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{k,i} J_{\frac{3k}{n}} \left(\frac{z_i}{b} r \right) \cos \left(\frac{3k}{n} \theta \right) e^{-\alpha t \left(\frac{z_i}{b} \right)^2} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} b_{k,i} J_{\frac{3k}{n}} \left(\frac{z_i}{b} r \right) \sin \left(\frac{3k}{n} \theta \right) e^{-\alpha t \left(\frac{z_i}{b} \right)^2} + \sum_{i=1}^{\infty} c_{0,i} I_0 \left(\frac{s_i r}{b} \right) e^{\alpha t \left(\frac{s_i}{b} \right)^2} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} d_{k,i} I_{\frac{3k}{n}} \left(\frac{t_i}{b} r \right) \cos \left(\frac{3k}{n} \theta \right) e^{\alpha t \left(\frac{t_i}{b} \right)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} f_{k,i} I_{\frac{3k}{n}} \left(\frac{t_i}{b} r \right) \sin \left(\frac{3k}{n} \theta \right) e^{\alpha t \left(\frac{t_i}{b} \right)^2} \end{aligned}$$

Supondo $t = 0$ tem-se $u(r, \theta, 0) = u_0(r, \theta)$

Segue que:

$$\begin{aligned} u_0(\theta, r) = & a_{0,0} \ln \frac{r}{b} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{0,i} J_0 \left(\frac{x_i r}{b} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{k,i} J_{\frac{3k}{n}} \left(\frac{z_i}{b} r \right) \cos \left(\frac{3k}{n} \theta \right) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} b_{k,i} J_{\frac{3k}{n}} \left(\frac{z_i}{b} r \right) \sin \left(\frac{3k}{n} \theta \right) + \sum_{i=1}^{\infty} c_{0,i} I_0 \left(\frac{s_i r}{b} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} d_{k,i} I_{\frac{3k}{n}} \left(\frac{t_i}{b} r \right) \cos \left(\frac{3k}{n} \theta \right) \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} f_{k,i} I_{\frac{3k}{n}} \left(\frac{t_i}{b} r \right) \sin \left(\frac{3k}{n} \theta \right) \end{aligned}$$

4. **CONDIÇÃO** $u_0(r, \theta) = J_3(\zeta_3 r) \cos(3\theta)$

Dado que $u_0(r, \theta) = J_3(\zeta_3 r) \cos(3\theta)$ temos que:

$$(29) \quad u_0(r, \theta) = J_3(\zeta_3 r) \cos(3\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{k,i} J_{\frac{3k}{n}}\left(\frac{z_i}{b} r\right) \cos\left(\frac{3k}{n} \theta\right)$$

Façamos primeiro o caso $n = 1$ e fazendo $b = 1$ a equação 34 se tornará:

$$u_0(r, \theta) = J_3(\zeta_3 r) \cos(3\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{k,i} J_{3k}(z_i r) \cos(3k\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,1} J_{3k}(z_1 r) \cos(3k\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,2} J_{3k}(z_2 r) \cos(3k\theta) + \dots$$

Pela lei de formação de $u_0(r, \theta)$, toma-se o valor de $k = 1$ em cada somatório e portanto:

$$(30) \quad u_0(r, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{1,i} J_3(z_i r) \cos(3\theta)$$

Usando-se a ortogonalidade da função J podemos escrever:

$$(31) \quad a_{1,i} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^1 u_0(r, \theta) J_3(z_i r) \cos(3\theta) r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^1 [J_3(z_i r) \cos(3\theta)]^2 r dr d\theta}$$

5. **CONDIÇÃO** $u_0^*(r, \theta) = \sin(r) \sin(r - b) \cos(3\theta)$

De maneira análoga a seção anterior, tem-se

$$(32) \quad u_0^*(r, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{1,i} J_3(z_i r) \cos(3\theta) + \sum_{j=1}^{\infty} d_{1,j} I_{3k}(t_j r) \cos(3\theta)$$

Logo, como $t_j = 0$ é raiz única de I_3 , tem-se que $\sum_{j=1}^{\infty} d_{1,j} I_{3k}(t_j r) \cos(3\theta) = 0$.

Usando-se a ortogonalidade da função J pode-se escrever:

$$(33) \quad a_{1,i} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^1 u_0^*(r, \theta) J_3(z_i r) \cos(3\theta) r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^1 [J_3(z_i r) \cos(3\theta)]^2 r dr d\theta}$$

Portanto,

$$(34) \quad u(r, \theta, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^1 u_0^*(r, \theta) J_3(z_i r) \cos(3\theta) r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^1 [J_3(z_i r) \cos(3\theta)]^2 r dr d\theta} J_3(z_i r) \cos(3\theta) e^{-\alpha t (z_i)^2}$$

6. RESULTADOS OBTIDOS

Para uma modelagem computacional deste problema foi utilizado o Software **Mathematica** tendo como referência o alumínio cuja difusividade térmica $\alpha = 98,8 \frac{mm^2}{s}$ e raio $b = 1$. Tomando-se a condição $u_0(r, \theta) = J_3(\zeta_3 r) \cos(3\theta)$ foram obtidos os resultados mostrados na figura 1 considerando um tempo de 0 a 0,0002s com intervalos de $\Delta t = 0,00005s$ e escala para $u(r, \theta, t)$ entre $-0,5K$ e $0,5K$ representada no eixo vertical.

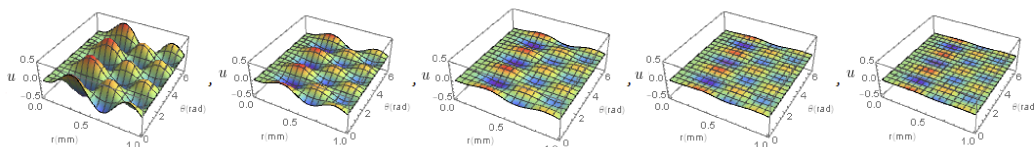


FIGURA 1. Evolução do perfil de temperatura da Placa

É importante notar que no instante inicial o perfil de $u(r, \theta, t)$ obedece a condição $J_3(\zeta_3 r) \cos(3\theta)$, e, portanto, é periódico. Dado que $u(b, \theta, t) = 0$, de certo o perfil de temperatura da placa irá convergir para 0 no regime permanente. É fato que tal resultado diante da boa difusividade térmica do alumínio tem convergência rápida e em pouco tempo como se vê a figura 1.

Por outro lado, na figura 2, tem-se um exemplo do perfil de temperatura no instante inicial para $\theta = 0$, ou seja $u(r, 0, 0)$. É importante notar que os valores máximos e mínimos da u correspondem as cores vermelho e azul na figura 1. Enquanto a cor verde corresponde a uma faixa intermediária de temperatura.

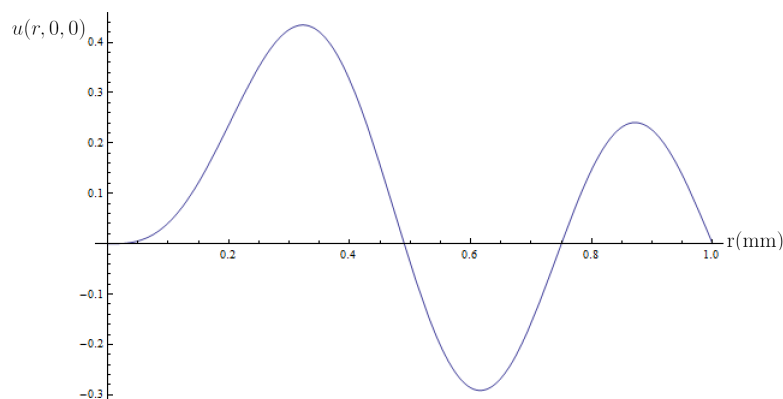


FIGURA 2. Perfil de temperatura $u(r, 0, 0)$

Na figura 3 encontra uma tabela de temperatura para $\theta = 0$. É importante notar a a convergência para 0 em todas as análises para diferentes raios sejam eles mais perto do centro ou mais afastados.

Cada resultado mostrado na tabela 4 foi definido para 20 termos da série de $u(r, \theta, t)$. Como teste aumentou-se para 40 termos e os resultados continuaram convergindo. Isso acontece pelo fato dos coeficientes da série de u serem muito pequenos quando $n \rightarrow \infty$ acarretando uma convergência para os valores da tabela.

$\theta = 0$	$t = 0$	$t = 0,00005s$	$t = 0,0001s$	$t = 0,00015s$	$t = 0,0002s$
$r = 0,1$	0,0412699	0,0178735	0,0077408	0,00335245	0,00145191
$r = 0,3$	0,425319	0,184201	0,0797753	0,0345497	0,0149631
$r = 0,5$	-0,0375571	-0,0162655	-0,00704442	-0,00305086	-0,00132129
$r = 0,7$	-0,157435	-0,0681833	-0,0295294	-0,0127888	-0,0055387
$r = 0,9$	0,22589	0,0978301	0,0423691	0,0183496	0,00794698

FIGURA 3. Tabela de Temperatura do disco em $\theta = 0$

Em seguida, para $u_0^*(r, \theta) = \sin(r) \sin(r-1) \cos(3\theta)$ a figura 4 tem-se a evolução de temperatura considerando a mesma placa de alumínio com raio $b = 1$. Foi analisado um tempo de 0 a 0,0008s com intervalos de $\Delta t = 0,00005s$.

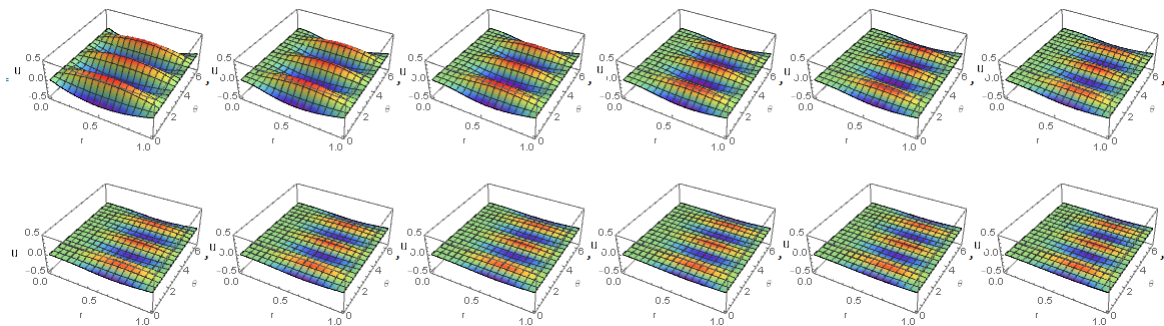


FIGURA 4. Evolução do mapa de Temperatura no tempo

É importante notar que, devido a $u_0^*(r, \theta)$, o mapa de temperatura na evolução temporal entrou em regime permanente em tempo superior ao analisado em u_0 . Notadamente os trechos de temperatura vermelha e azul representam, respectivamente, as máximas e mínimas de u , enquanto a cor verde, representa uma faixa intermediária. A figura 5 representa um exemplo de perfil de temperatura no instante inicial para $\theta = \frac{\pi}{3}$.

A convergência de temperaturas para o ângulo de $\frac{\pi}{3}$ são verificadas na figura 6. Todas as temperaturas calculadas são para os 20 primeiros termos da série de u . Aumentando-se a quantidade de termos para 40, os resultados mostraram uma convergência para os valores desta figura. De fato, cada coeficiente da série converge para 0 e, portanto, os valores de temperatura convergem para esta tabela.

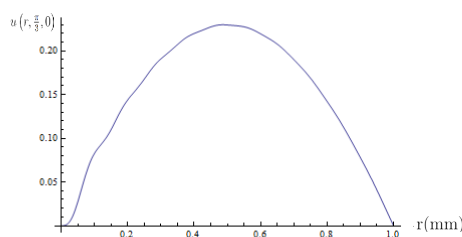


FIGURA 5. Perfil de temperatura para $u\left(r, \frac{\pi}{3}, 0\right)$

$\theta = \frac{\pi}{3}$	$t = 0s$	$t = 0,00005s$	$t = 0,0002s$	$t = 0,00015s$	$t = 0,0002s$
$r = 0,1$	0.08264787544	0.010062918410	0.004738020210	0.002884333192	0.001960508046
$r = 0,3$	0.190897	0.114705	0.0739043	0.051251	0.0373494
$r = 0,5$	0.229679	0.18311	0.144567	0.114001	0.090252
$r = 0,7$	0.19009	0.162463	0.137154	0.114781	0.0954223
$r = 0,9$	0.0780473	0.0649174	0.0547787	0.046334	0.0390918

FIGURA 6. Evolução da Temperatura no tempo para $\theta = \frac{\pi}{3}$

7. CONCLUSÃO

Verifica-se então, que o mapa de temperatura no disco com bordo nulo é bastante influenciado pela função $u_0(r, \theta)$ dada. De fato, para $u_0(r, \theta) = J_3(\zeta_3 r) \cos(3\theta)$, a função de Bessel exerce grande influência na convergência mais rápida em comparação a $u_0^*(r, \theta) = \sin(r) \sin(r-1) \cos(3\theta)$. Com a implementação computacional do problema foi possível verificar que essa convergência mais rápida foi decorrência de cada coeficiente da série ser da ordem de 10^{-16} .

No entanto, o alumínio precisa ser citado pelo fato de ter uma alta condutividade térmica. Mesmo com convergência diferente para as condições apontadas no problema, vê-se de fato uma boa convergência para ambos os métodos. Abre-se a possibilidade para trabalhos futuros, comparar convergência de temperatura para diferentes materiais acrescentando fonte térmica interna, modificando a solução da EDP original.

8. REFERÊNCIAS

- 1 ZILL, D.G; CULLEN M.R. **Matemática Avançada para Engenharia**.3.ed. Porto Alegre, Bookman, 2009.
- 2 DELYRA, JORGE L. **Funções de Bessel**

INSTITUTO FEDERAL FLUMINENSE - CENTRO
RUA DR. SIQUEIRA, 273, PQ. DOM BOSCO
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
Email address: cleuber.silva30@gmail.com,