



ISSN: 2675-5254

Ano 2022, Volume 2

Índice

Nivaldo G. Grulha Jr., Dahisy V. S. Lima, Denilson Tenório <i>Índice de Conley para Fluxos Gutierrez-Sotomayor</i>	114
Pedro A. S. de Alcântara <i>O Conteúdo Geométrico de Fourier</i>	131
João F. S. Filho, Larissa B. Fernandes, Marinaldo B. da Silva <i>Funções Complexas Holomorfas e Campos Conformes</i>	114
Cleuber Silva <i>Modelagem de Temperatura no Disco</i>	166
Pedro F. da Silva Júnior <i>Sobre a Integrabilidade de Formas Pfaffianas no \mathbb{R}^n</i>	176



SOBRE A RMU

A Matemática Universitária é uma publicação da Sociedade Brasileira de Matemática semestral de divulgação de ideias e estímulos ao estudo e à curiosidade intelectual, dirigida a todos que se interessam pelo ensino e estudo da Matemática em nível Superior. É direcionada a professores, pesquisadores, alunos de graduação e pós graduação, promovendo e fortalecendo o intercâmbio entre os membros dessa comunidade.

Comitê Editorial

- Editor-chefe:
 - Paolo Piccione (USP)
- Editores:
 - Humberto Bortolossi (UFF)
 - Daniel Gonçalves (UFSC)
 - Fernando Manfio (USP)
 - Michel Spira (UFMG)

Periodicidade

Semestral

Contato

Endereço:

Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina, 110 sala 109
Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro – RJ

Email: rmu@sbm.org.br

Página web: <https://rmu.sbm.org.br/>

ÍNDICE DE CONLEY PARA FLUXOS GUTIERREZ-SOTOMAYOR

NIVALDO G. GRULHA JR., DAHISY V. S. LIMA, DENILSON TENÓRIO

RESUMO. Neste artigo introduzimos o leitor, por meio de exemplos, à teoria do índice de Conley e à teoria dos fluxos Gutierrez-Sotomayor. Apresentamos também importantes resultados de Montúfar e de Rezende, sobre o cálculo do índice de Conley para fluxos GS e uma fórmula para a característica de Euler-Poincaré por meio do índice de Conley.

1. INTRODUÇÃO

Charles Cameron Conley⁽¹⁾, foi um matemático estadunidense que trabalhou na área de sistemas dinâmicos. De forma inovadora, Conley introduziu um índice para campos vetoriais que agrega, além de informações numéricas, informações topológicas relacionadas a homotopia. Este é o chamado índice de Conley ([2]) um dos seus objetivos com este índice era generalizar o índice de Morse.

Jorge Manuel Sotomayor Tello^(2a) foi um matemático peruano e naturalizado brasileiro que trabalhou com equações diferenciais. Carlos Teobaldo Gutierrez Vidalon^(2b), também foi um matemático peruano e foi orientando de doutorado do próprio Sotomayor.

No ano de 1982, Gutierrez e Sotomayor ([4]) estenderam os resultados de Marília Peixoto e Maurício Peixoto sobre estabilidade estrutural de campos de vetores tangentes a variedades 2-dimensionais ([9], [10]).



FIGURA 1. C. C. Conley 1933-1984

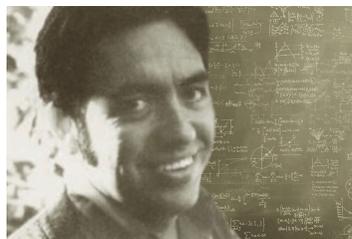
Fonte: www-users.cse.umn.edu

Data de aceitação: 24 de junho de 2023.

Palavras chave. Fluxo contínuo, Fluxos Gutierrez-Sotomayor, Índice de Conley, Singularidades.



(A) J. M. Sotomayor 1942-2022
 Fonte: impa.br



(B) C. T. Gutierrez 1944-2008
 Fonte: www.icmc.usp.br

FIGURA 2. Sotomayor e Gutierrez

Em seu trabalho Gutierrez e Sotomayor consideraram uma classe especial de conjuntos que foi chamado por eles de variedades 2-dimensionais com singularidades simples, atualmente chamamos esses conjuntos de variedades Gutierrez-Sotomayor ou apenas variedades GS. Além de definir as variedades GS, eles consideraram alguns fluxos especiais sobre essas variedades, hoje chamados de fluxos Gutierrez-Sotomayor ou fluxos GS. Na Seção 3, apresentamos alguns exemplos desses fluxos.

Apesar de definido para todo fluxo contínuo o índice de Conley ainda não havia sido calculado para os fluxos GS, mas recentemente com os trabalhos de Montúfar, de Rezende, Grulha, Lima, Raminere e Zigart essas duas teorias puderam ser relacionadas e os índices devidamente calculados ([3], [5], [8]). Neste artigo, através de alguns exemplos podemos ver um pouco dessa ligação entre as duas teorias.

2. ÍNDICE DE CONLEY

Nesta seção apresentamos o índice de Conley por meio de exemplos, mas antes precisamos ter em mente duas definições que são muito importantes para o entendimento do índice de Conley.

Considere φ_t um fluxo contínuo definido sobre um espaço topológico M . Diremos que um subconjunto compacto $N \subset M$ é uma **vizinhança isolante** se

$$Inv(N) := \{x \in N \mid \varphi_t(x) \in N, \forall t\} \subset int(N),$$

onde $int(N)$ denota o interior de N . Isto é, $N \subset M$ é uma vizinhança isolante quando a parte invariante pelo fluxo de N está contida no interior de N . Dizemos que S é um **conjunto invariante isolado** quando $S = Inv(N)$, para alguma vizinhança isolante N .

Agora, vamos exemplificar estas duas definições. Considere N um retângulo fechado ao redor da sela $S^{(3)}$. Perceba que $S = Inv(N) \subset int(N)$, pois o único ponto que não deixa o conjunto N pelo fluxo é justamente o ponto de sela. Assim, o ponto S é um conjunto invariante isolado e N é uma vizinhança isolante. Já se considerarmos um centro S no plano⁽³⁾, temos que este ponto não é um conjunto invariante isolado, pois para qualquer compacto N tal que $S \in int(N)$ temos que $inv(N) \neq S$.

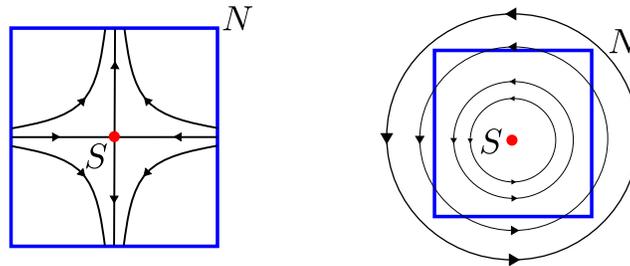
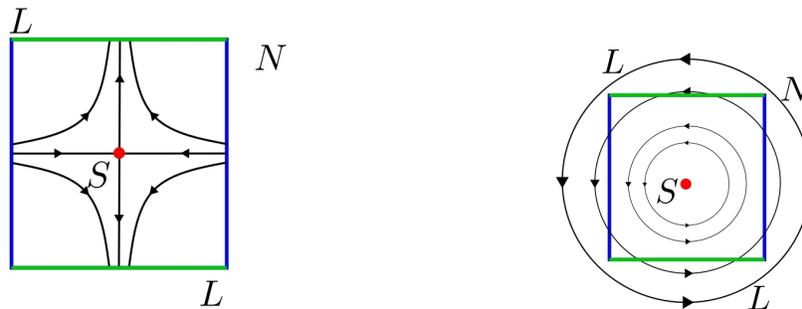


FIGURA 3. À esquerda temos uma singularidade do tipo sela e à direita uma singularidade do tipo centro.

A próxima definição é essencial para a definição e cálculo do Índice de Conley. Considere S um conjunto invariante isolado qualquer. Um par (N, L) de conjuntos compactos $L \subset N$ é dito um **par-índice** para S se satisfaz:

- (i) $S = \text{Inv}(\overline{N \setminus L})$;
- (ii) L é **positivamente invariante** em N , ou seja, dado $x \in L$ com $\varphi_t(x) \in N$ para $t \in [0, t_0]$, então $\varphi_t(x) \in L$ para $t \in [0, t_0]$.
- (iii) L é um **conjunto de saída** para N , isto é, dado $x \in N$ e $t_1 > 0$ tal que $\varphi_{t_1}(x) \notin N$, então existe $t_0 \in [0, t_1]$ de modo que $\varphi_t(x) \in N$, para $t \in [0, t_0]$ e $\varphi_{t_0}(x) \in L$.



(A) Ponto de Sela no plano

(B) Ponto de centro no plano

FIGURA 4. Exemplos

Agora, para fixarmos o que seria um par-índice, vamos exibir alguns exemplos. Na Figura 4a, perceba que $\overline{N \setminus L} = N$ e já vimos que N é uma vizinhança isolante, L é positivamente invariante e é um conjunto de saída para o fluxo, portanto o par (N, L) é um par-índice para o conjunto invariante S . Na Figura 4b, já vimos que $\text{inv}(\overline{N \setminus L}) = \text{inv}(N) \neq S$. Logo, não é um par-índice para o centro.

Um par (X, y) formado por um espaço topológico X e um ponto $y \in X$ é chamado de espaço pontuado e denotado por $(X, *)$. Indicamos por $[X, *]$ o **tipo de homotopia do par** $(X, *)$. De maneira menos técnica e mais lúdica, $[X, *]$ representa o conjunto de todos os espaços que podem ser contraídos ou esticados continuamente até ficarem iguais a $(X, *)$. Dado um conjunto invariante isolado S e um par-índice

(N, L) para S , vamos denotar por $(N/L, *)$ o espaço pontuado obtido pelo espaço quociente N/L , este espaço é obtido pela relação de equivalência $x \sim y \Leftrightarrow x = y$ ou $x, y \in L$, e $*$ é a classe de equivalência do conjunto L , que pode ser visto como um ponto.

O **índice de Conley homotópico** de um conjunto invariante isolado S é definido como o tipo de homotopia:

$$h(S) := [N/L, *],$$

onde (N, L) é um par-índice de S . Já o **índice de Conley homológico** de S é definido como:

$$CH_*(S) := \tilde{H}_*(h(S)),$$

onde \tilde{H}_* denota a homologia singular reduzida sobre \mathbb{Z} ¹. Os **índices de Conley numéricos** de S são definidos como o rank dos grupos de homologia $H_*(h(S))$, e denotados por:

$$h_*(S) = \text{rank } CH_*(S).$$

Note que as definições acima dependem, a priori, do par-índice escolhido. Porém Conley provou que, sempre existe um par-índice para um conjunto invariante isolado e que o índice independe da escolha do par-índice, mais precisamente:

Teorema 2.1 (Conley [2]). *Dado um conjunto invariante isolado S , sempre existe um par-índice associado a este conjunto. Além disso, se (N_1, L_0) e (M_1, M_0) são pares-índice para o conjunto invariante isolado S , então*

$$[N_1/L_0, *] = [M_1/M_0, *].$$

A prova completa é um pouco técnica e foge do objetivo do artigo, mas o leitor pode encontrar a demonstração no artigo do Conley ([2]). Aqui vamos apresentar um roteiro para demonstração, ou seja, os passos principais da prova.

Roteiro da demonstração.

- Existência:
 - (1) Defina $N^t := \{x \in N \mid x \cdot [-t, 0] \subset N\}$, prove que N^t é compacto e positivamente invariante em N ;
 - (2) Encontre um $T \geq 0$ adequado para $N_1 = N^T$;
 - (3) Defina $N_0 := N_1 \cap ((N_1 \cap \partial N) \cdot [0, T])$;
 - (4) Prove que (N_1, N_0) é um par-índice.
- Equivalência homotópica entre os espaços pontuados:
 - (1) Defina funções $f_{(t,u,v)} : M_1/M_0 \rightarrow N_1/N_0$;
 - (2) Com algumas hipóteses sobre (t, u, v) , podemos provar que as funções $f_{(t,u,v)}$ são duas a duas homotópicas;
 - (3) Conseguimos, a partir dessas f 's, construir uma equivalência homotópica entre $[M_1/M_0, *]$ e $[N_1/N_0, *]$.

¹A teoria de homologia singular associa a cada espaço topológico uma sequência de grupos abelianos. Neste artigo faremos uso apenas de cálculos elementares da homologia singular reduzida da esfera.

□

O próximo resultado mostra um pouco de como utilizar o índice de Conley para investigar um conjunto invariante isolado de um fluxo.

Proposição 2.1. *Seja S um conjunto invariante isolado. Se $h(S) \neq \bar{0}$, então $S \neq \emptyset$.*

Demonstração. Suponha que $S = \emptyset$. Como (\emptyset, \emptyset) é um par-índice para S , então $h(S) = \bar{0}$. Assim, provamos a contrapositiva □

A proposição anterior nos diz que, se o índice de Conley de um conjunto invariante isolado S não é a classe de um ponto, então estamos diante de um conjunto S não vazio, ou seja, temos ao menos um ponto que é invariante pelo fluxo.

3. FLUXOS GUTIERREZ-SOTOMAYOR

O objetivo dessa seção é entender através de exemplos o que seria um fluxo Gutierrez-Sotomayor. Estes fluxos foram apresentados pela primeira vez por Gutierrez e Sotomayor em ([4]). Eles definiram campos vetoriais em uma classe especial de conjuntos que chamaram de "variedades 2-dimensionais com singularidades simples". Posteriormente, Montúfar e de Rezende ([8]) denominaram tais conjuntos de variedades GS. Como na Teoria de Singularidade o termo "singularidade simples" tem outro significado, optamos por denominá-las singularidades controladas. Em homenagem aos grandes matemáticos Gutierrez e Sotomayor, abreviamos ao longo do texto por variedades, campos e fluxos GS.

Antes de definir os fluxos GS precisamos lembrar ou ver pela primeira vez alguns conceitos básicos de Sistemas Dinâmicos. Considere $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^k , onde $k \geq 1$. Além disso, considere $p \in U$ e $\varphi_p(t) = \varphi(t, p)$ o fluxo que passa pelo ponto p e é definida no intervalo máximo $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$. Se $\omega_+(p) = +\infty$, podemos definir o seguinte conjunto:

$$\omega(p) := \{q \in U \mid \exists \{t_n\} \subset \mathbb{R} \mid t_n \rightarrow \infty \text{ e } \varphi_p(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

Do mesmo modo, se $\omega_-(p) = -\infty$, podemos definir o seguinte conjunto:

$$\alpha(p) := \{q \in U \mid \exists \{t_n\} \subset \mathbb{R} \mid t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \varphi_p(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

Estes conjuntos são chamados, respectivamente, de ω -limite e α -limite de p .

Considere p uma singularidade do campo X , ou seja, $X(p) = 0$. Definimos a **variedade estável e instável de p** , respectivamente por:

$$W_p^s := \{q \in U \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, q) = p\},$$

$$W_p^u := \{q \in U \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, q) = p\}.$$

Um ponto singular p de um campo vetorial X de classe C^k , onde $k \geq 1$, é dito **hiperbólico** se todos os autovalores de $DX(p)$ têm parte real diferente de zero. Com essas definições vamos conseguir entender os fluxos GS.

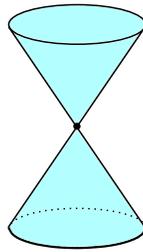
Uma **variedade 2-dimensional com singularidades controladas** ou variedade Gutierrez-Sotomayor ou simplesmente variedade GS é um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ tal que, para todo $p \in M$, existe uma vizinhança V_p de p em M e um difeomorfismo

$\psi : \tilde{V}_p \rightarrow \mathcal{P}$ de classe C^∞ , com $\psi(p) = 0$, onde \tilde{V}_p é uma extensão do aberto V_p para o espaço euclidiano e \mathcal{P} é um dos seguintes subconjuntos de \mathbb{R}^3 :

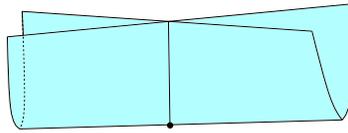
- (1) **Plano** $\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$;



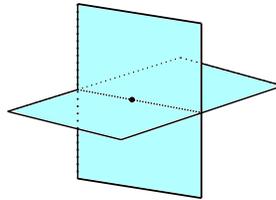
- (2) **Cone** $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z^2 - y^2 - x^2 = 0\}$;



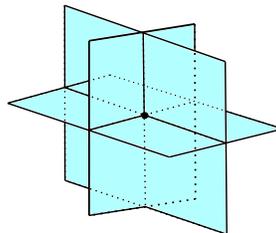
- (3) **Cross-cap** $\mathcal{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | zx^2 - y^2 = 0 \text{ e } z \geq 0\}$;



- (4) **Ponto duplo** $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | xy = 0\}$;



- (5) **Ponto triplo** $\mathcal{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | xyz = 0\}$.



Um exemplo de variedade GS é o **toro pinçado**⁽⁵⁾, que é "parecido" com um toro a diferença é que um dos círculos meridianos foi contraído, de forma contínua, a um ponto. Neste ponto, temos uma vizinhança que é difeomorfa ao cone, os demais pontos ainda são localmente difeomorfos ao plano.

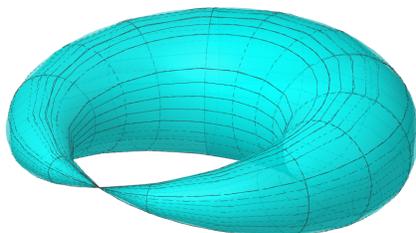


FIGURA 5. Toro pinçado

Agora, definimos o que é um **campo vetorial de Gutierrez-Sotomayor** que abreviamos apenas por **campo GS**. Ao longo do texto, usamos $\mathcal{X}^r(M)$ para denotar o conjunto de todos os campos vetoriais de classe r em uma variedade M . Dada M uma variedade GS, dizemos que $X \in \mathcal{X}^r(M)$ é um **campo Gutierrez-Sotomayor** se satisfaz:

- (1) X tem um número finito de singularidades e de órbitas periódicas e todas elas são hiperbólicas;
- (2) Os ciclos limites singulares de X são simples e X não tem conexão de sela²;
- (3) Os conjuntos α -limite e ω -limite de toda trajetória de X são formado por pontos singulares, órbitas periódicas ou ciclos singulares.

O fluxo φ_t induzido por um campo GS é chamado de fluxo Gutierrez-Sotomayor ou **fluxo GS**. No nosso trabalho consideramos um campo GS mais restrito, onde o fluxo GS não admite órbitas periódicas nem ciclos limites. Isto é, consideramos campos $X \in \mathcal{X}^r(M)$ tais que:

- (1) X tem um número finito de singularidades e todas elas são hiperbólicas;
- (2) X não tem conexão de sela;
- (3) Os conjuntos α -limite e ω -limite de toda trajetória de X são pontos singulares.

Agora, para fixarmos as ideias das últimas definições apresentamos alguns exemplos de fluxos GS. Além disso, esses exemplos são aproveitados na Seção 4.

Começamos por uma singularidade do **tipo plano** de **natureza sela** como mostra a Figura 6.

²Uma trajetória $\gamma \subset M(\mathcal{R})$ é uma conexão de sela se existem duas singularidades hiperbólicas p e q de X tais que $W^u(p) \cap W^s(q) \supset \gamma$ e $W^u(p) \cup W^s(q)$ é constituído de um número finito de trajetórias, onde $W^u(p)$ e $W^s(q)$ denotam os conjuntos instável de p e estável de q , respectivamente.

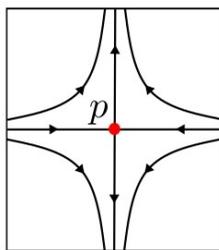


FIGURA 6. Singularidade de tipo plano e natureza sela

Agora, a Figura 7 apresenta singularidades do **tipo cone** e de **naturezas atratora, sela e repulsora**.

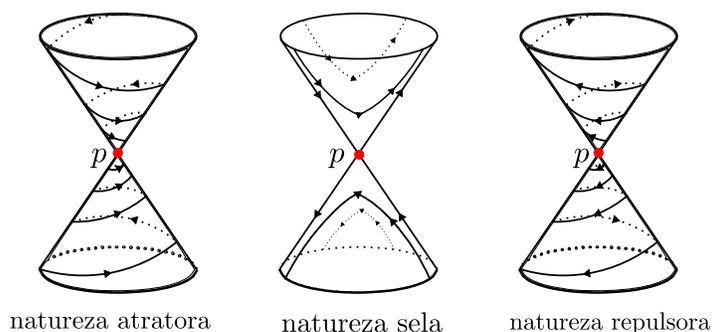


FIGURA 7. Singularidades do tipo cone

A Figura 8 a seguir representa uma singularidade do **tipo cross-cap** e de **natureza repulsora**.

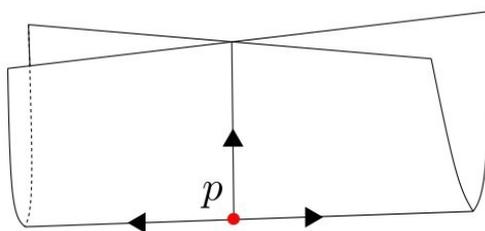
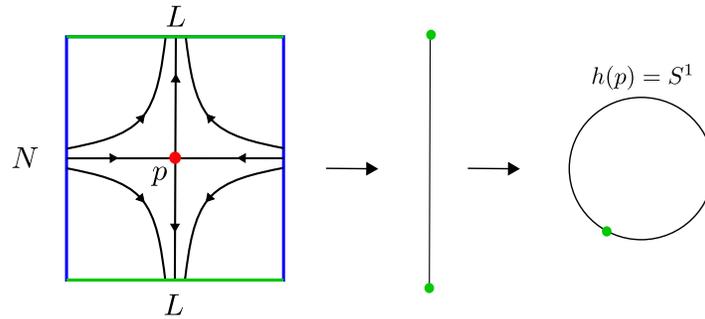


FIGURA 8. Singularidade do tipo cross-cap e natureza repulsora

4. ÍNDICE DE CONLEY DE ALGUNS FLUXOS GS

Nesta seção, apresentamos os cálculos dos índices de Conley das singularidades presentes nos fluxos GS que analisamos na Seção 3. Este e os demais casos foram devidamente calculados por de Rezende e Montúfar [8].

Começamos analisando as singularidades do tipo plano e natureza sela. Aqui, tomamos o par-índice (N, L) composto pelo retângulo N , em torno da singularidade p , e por L que é formado pelos dois segmentos de reta em verde na fronteira de N .

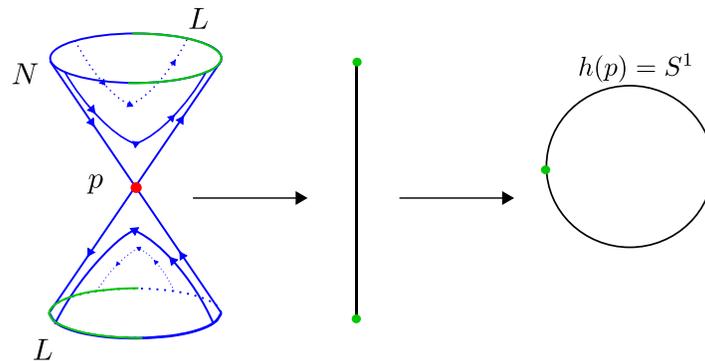


Neste caso o índice homotópico pode ser obtido da seguinte forma: primeiro fazemos um processo de contração na horizontal, isto é, ao longo da variedade estável de p , em seguida fazemos a identificação dos pontos assinalados e paramos por aí porque essa já é uma figura conhecida, a 1-esfera S^1 . Agora, o índice de Conley homológico desta singularidade é:

$$\tilde{H}_n(S^1) = \tilde{H}_n(S^1; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 1; \\ 0, & n \neq 1. \end{cases}$$

Donde, o índice de Conley numérico para esta singularidade é $(0, 1, 0)$.

Agora, vamos analisar as singularidades do tipo cone. O primeiro caso que vamos apresentar são as singularidade de natureza sela. Aqui, tomamos o par-índice (N, L) composto pelo cone N , em torno da singularidade p , e L formado pelos dois segmentos em verde na fronteira de N .

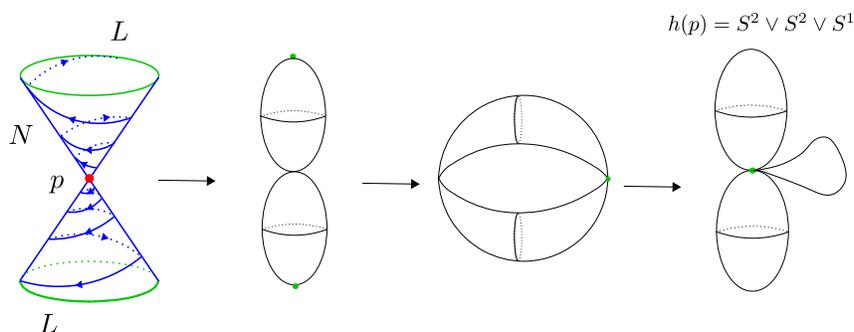


No primeiro passo, fizemos uma contração na horizontal, pois tanto N quanto L "não registram buracos". No segundo passo, fizemos o processo de quociente N/L e mais uma vez obtemos \mathbb{S}^1 . Novamente, calculamos o índice de Conley homológico desta singularidade:

$$\tilde{H}_n(\mathbb{S}^1) = \tilde{H}_n(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 1; \\ 0, & n \neq 1. \end{cases}$$

Donde, o índice de Conley numérico para esta singularidade é $(0, 1, 0)$.

O segundo caso desse tipo de singularidade são as de natureza repulsora. Neste caso, tomamos um par-índice (N, L) formado pelo cone N , em torno da singularidade p , e L composto de duas circunferências no bordo do cone N .

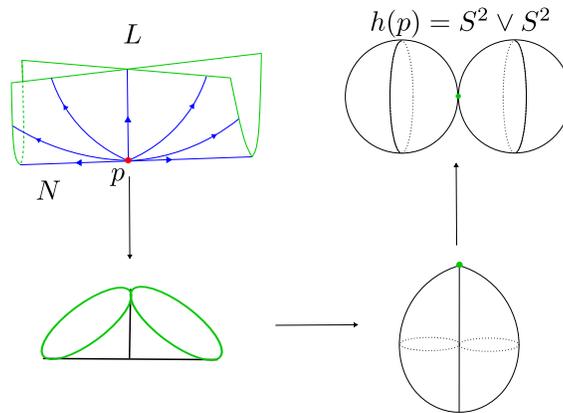


Perceba que neste caso o conjunto L é composto de duas partes conexas e cada uma delas registra buracos. No primeiro passo fizemos a identificação de cada uma das componentes conexas de L a um ponto, e teremos duas "sacolas unidas pelo ponto p ". No segundo passo fizemos o processo de quociente N/L . Como ainda não chegamos em uma figura conhecida precisamos realizar algumas contrações no terceiro passo. Perceba que a conexão entre as duas sacolas é um "laço", e que este laço não pode ser solto porque ele registra buracos, mas podemos deslizar continuamente as sacolas até o ponto L mantendo esse laço de ligação e foi justamente o que fizemos no terceiro passo. Agora, chegamos em uma figura conhecida o buquê de duas \mathbb{S}^2 e uma \mathbb{S}^1 coladas no mesmo ponto. Matematicamente isso corresponde a $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$. Também conseguimos calcular a homologia reduzida desse buquê,

$$\tilde{H}_n(\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n = 2; \\ \mathbb{Z}, & n = 1; \\ 0, & n \neq 1, 2. \end{cases}$$

Assim, o índice de Conley numérico desta singularidade é dado por $(0, 1, 2)$.

Agora, vamos analisar as singularidades do tipo cross-cap e natureza repulsora. Neste caso, tomamos um par-índice (N, L) formado pelo cross cap N , em torno da singularidade p , e L é composto pelo bordo de N .



No primeiro passo fizemos apenas uma deformação contínua no conjunto L . No segundo passo fizemos o processo de quociente N/L , mas perceba que o conjunto L tem duas partes que registram buracos. Logo, ficamos com duas sacolas que estão unidas por uma reta. No terceiro passo deformamos continuamente até formar um buquê de duas esferas. Note que a reta que ligava as duas esferas não registrava buracos. Como nos outros casos de buquê, calculamos o índice de Conley homológico desta singularidade:

$$\tilde{H}_n(\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n = 2; \\ 0, & n \neq 2. \end{cases}$$

Assim, o índice de Conley numérico desta singularidade é dado por $(0, 0, 2)$.

5. CARACTERÍSTICA DE EULER-POINCARÉ

Nesta seção, vamos apresentar outra aplicação da teoria de Conley que é a sua ligação com a Característica de Euler-Poincaré. Como hoje sabemos a característica de Euler-Poincaré é um invariante topológico muito conhecido e importante na matemática. Foi introduzido por Euler em 1758, na famosa expressão $\chi(K) = V - A + F$, onde $K \subset \mathbb{R}^3$ é um poliedro, V o número de vértices, A é o número de arestas e F o número de faces. Por exemplo, vamos calcular a característica de Euler-Poincaré de um cubo como a da Figura 9. Pela Figura 10a temos que $V = 8$, pela Figura 10b temos que $F = 6$ e pela Figura 10c temos que $A = 12$. Assim, a característica de Euler-Poincaré do cubo é dada por $\chi(K) = 8 - 12 + 6 = 2$.

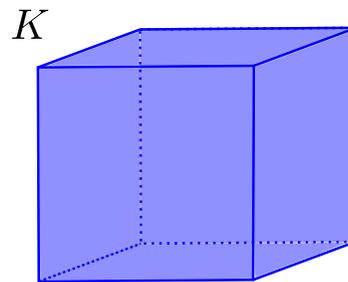


FIGURA 9. Cubo ou hexaedro regular

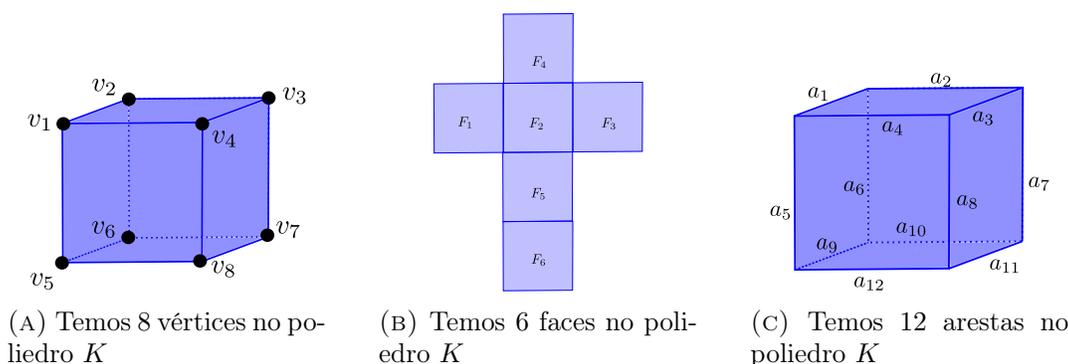


FIGURA 10. Característica de Euler-Poincaré do cubo

Já em 1893, Poincaré nos mostrou que se consideramos a homologia com coeficientes inteiros, então:

$$\chi(K) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \beta_r,$$

onde β_r são os números de Betti de K . Logo, temos um invariante topológico. Para os leitores que nunca viram, ou ainda não se aprofundaram no assunto, recomendamos a leitura do Capítulo 2 do livro do Brasselet [1] ou o artigo do Elon [7].

Para que tenhamos uma noção de como o índice de Conley é interessante, trouxemos o seguinte resultado:

Proposição 5.1 (Montúfar e de Rezende [8]). *Considere M uma variedade GS munida de um fluxo GS X_t , com um conjunto de singularidades $\mathcal{L} = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$. Se (h_0^i, h_1^i, h_2^i) é o índice de Conley numérico para p_i , então:*

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^m (h_0^i - h_1^i + h_2^i).$$

Demonstração. Sejam $G_k \subset M$ uma sequência de conjuntos tais que:

$$G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_m = M$$

e (G_i, G_{i-1}) é um par-índice para $L_i = \{p_i\}$, para todo $1 \leq i \leq m$. Podemos conseguir uma tal sequência de conjuntos graças aos resultados encontradas em [8]. Considere a sequência exata longa do par (G_i, G_{i-1}) :

$$\dots \xrightarrow{p_j} H_j(G_i, G_{i-1}) \xrightarrow{\partial_j} H_{j-1}(G_{i-1}) \xrightarrow{i_*} H_{j-1}(G_i) \xrightarrow{p_{j-1}} \dots$$

Pela exatidão da sequência, obtemos:

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im } p_j) &= \dim(\text{Ker } \partial_j) \\ &= \dim(H_j(G_i, G_{i-1})) - \dim(\text{Im } \partial_j) \\ (1) \quad &= \dim(H_j(G_i, G_{i-1})) - \dim(\text{ker } i_*). \end{aligned}$$

Novamente pela exatidão da sequência temos que:

$$(2) \quad \begin{aligned} \dim(\text{Im } p_{j-1}) &= -\dim(\text{Ker } p_{j-1}) + \dim(H_{j-1}(G_i)) \\ &= -\dim(\text{Im } i_*) + \dim(H_{j-1}(G_i)). \end{aligned}$$

Somando as equações (1) e (2):

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im } p_{j-1}) + \dim(\text{Im } p_j) &= \dim(H_j(G_i, G_{i-1})) - \dim(\text{ker } i_*) \\ &\quad + \dim(H_{j-1}(G_i)) - \dim(\text{Im } i_*) \\ &= \dim(H_j(G_i, G_{i-1})) + \dim(H_{j-1}(G_i)) \\ &\quad - (\dim(\text{Im } i_*) - \dim(\text{Ker } i_*)). \end{aligned}$$

Portanto, temos que:

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im } p_{j-1}) + \dim(\text{Im } p_j) &= \dim(H_j(G_i, G_{i-1})) + \dim(H_{j-1}(G_i)) \\ &\quad - \dim(H_{j-1}(G_{i-1})). \end{aligned}$$

Uma vez que $CH_*(L_i) \cong H_*(G_i, G_{i-1})$, teremos que $h_j(L_i) = \dim(H_j(G_i, G_{i-1}))$. Assim,

$$\dim(\text{Im } p_{j-1}) + \dim(\text{Im } p_j) = h_j(L_i) - \beta_{j-1}(G_{i-1}) + \beta_{j-1}(G_i).$$

Para i fixado, considere a soma alternada em j :

$$\sum_{j=0}^2 (-1)^j h_j(L_i) + \sum_{j=1}^3 (-1)^j [\beta_{j-1}(G_i) - \beta_{j-1}(G_{i-1})] = 0.$$

Agora, somando a expressão acima para $i = 1, \dots, m$, temos:

$$\sum_{i,j} (-1)^j h_j(L_i) + \sum_{j=1}^3 (-1)^j \beta_{j-1}(G_m) = 0.$$

Como $G_m = M$, temos:

$$\sum_{i,j} (-1)^j h_j(L_i) + \sum_{j=0}^2 (-1)^j \beta_j(M) = 0.$$

Assim,

$$\chi(M) = \sum_{i,j} (-1)^j h_j(L_i),$$

para $i = 1, \dots, m$ e $j = 0, 1, 2$. Portanto,

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^m (h_0^i - h_1^i + h_2^i).$$

□

Agora, vamos dar um exemplo de como utilizar a proposição anterior em conjunto com o cálculo do índice de Conley que fizemos anteriormente. Considere M como a variedade GS composta por exatamente duas singularidades do tipo cone, uma

singularidade p_1 de natureza repulsora e uma singularidade p_2 de natureza atratora, como na Figura 11.

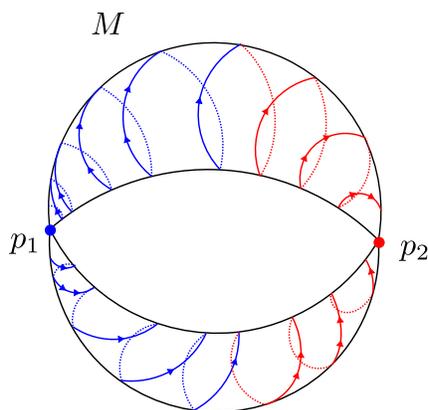


FIGURA 11. Fluxo GS na variedade M

Pelos exemplos de índice de Conley para fluxos GS, temos que o índice de Conley numérico de p_1 é dado por $(0, 1, 2)$ e da singularidade p_2 é dado por $(1, 0, 0)$. Pela Proposição 5.1, temos que a característica de Euler é igual a:

$$\begin{aligned}\chi(M) &= \sum_{i=1}^2 (h_0^i - h_1^i + h_2^i) \\ &= (0 - 1 + 2) + (1 - 0 + 0) \\ &= 2.\end{aligned}$$

Definimos um **bloco isolante** como uma vizinhança isolante N tal que o seguinte conjunto:

$$N^- := \{x \in N \mid x \cdot [0, T) \not\subset N, \forall T > 0\}$$

é um conjunto fechado. Além disso, (N, N^-) é um par-índice para $Inv(N) = \{p\}$. Montúfar e de Rezende [8] tratam mais detalhadamente de como construir os blocos isolantes, para cada tipo de singularidade, via teoria das alças generalizadas e analisando diferentes tipos de colagem.

Para finalizar nosso artigo, vamos apresentar um ótimo resultado que dá uma relação entre os números de Betti das subvariedades que são fronteiras do bloco isolante contendo p , com o número de componentes conexas da fronteira e o índice de Conley numérico (h_0, h_1, h_2) .

Teorema 5.1 (Montúfar e de Rezende [8]). (*Igualdade de Poincaré-Hopf*) Considere (N_1, N_0) um par-índice para uma singularidade $p \in M$ de $X \in \mathcal{X}^r(M)$, cujo índice de Conley numérico é (h_0, h_1, h_2) . Então

$$(3) \quad (h_2 - h_1 + h_0) - (h_2 - h_1 + h_0)^* = e^+ - \beta^+ - e^- + \beta^-,$$

onde:

- * indica o índice de Conley para o fluxo reverso;

- $e^+(e^-)$ é o número de componentes conexas da fronteira de entrada (respectivamente saída) de N_1 ;
- $\beta^+ = \sum_{k=1}^{e^+} b_k^+$ ($\beta^- = \sum_{k=1}^{e^-} b_k^-$), onde $b_k^+(b_k^-)$ é o primeiro número de Betti da k -ésima componente conexa do bordo de entrada (respectivamente saída) de N_1 .

Demonstração. Temos pela Proposição 5.1 que,

$$\chi((N_1, N_0)) = h_2 - h_1 + h_0.$$

Pela sequência longa exata do par (N_1, N_0) , temos que $\chi((N_1, N_0)) = \chi(N_1) - \chi(N_0)$.
Donde,

$$\chi(N_1) = \chi(N_0) + h_2 - h_1 + h_0.$$

Como $N_0 = \partial N_1^-$, ficamos com a seguinte igualdade:

$$(4) \quad \chi(N_1) = \chi(\partial N_1^-) + h_2 - h_1 + h_0.$$

Poderíamos provar também uma igualdade análoga para o fluxo reverso, isto é:

$$(5) \quad \chi(N_1) = \chi(\partial N_1^+) + (h_2 - h_1 + h_0)^*.$$

Subtraindo a igualdade (5) da igualdade (4), obtemos:

$$(h_2 - h_2 + h_0) - (h_2 - h_2 + h_0)^* + \chi(\partial N_1^-) - \chi(\partial N_1^+) = 0.$$

Donde,

$$(h_2 - h_2 + h_0) - (h_2 - h_2 + h_0)^* = \chi(\partial N_1^+) - \chi(\partial N_1^-).$$

Como podemos escrever

$$\begin{aligned} \partial N^+ &= \bigcup_{k=1}^{e^+} \partial N_k^+, \\ \partial N^- &= \bigcup_{k=1}^{e^-} \partial N_k^-, \end{aligned}$$

temos que:

$$\begin{aligned} \chi(\partial N^+) &= \sum_{k=1}^{e^+} \chi(\partial N_k^+) = \sum_{k=1}^{e^+} ((-1)^0 \cdot 1 - b_k^+); \\ \chi(\partial N^-) &= \sum_{k=1}^{e^-} \chi(\partial N_k^-) = \sum_{k=1}^{e^-} ((-1)^0 \cdot 1 - b_k^-). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \chi(\partial N^+) &= e^+ - \sum_{k=1}^{e^+} b_k^+ = e^+ - \beta^+; \\ \chi(\partial N^-) &= e^- - \sum_{k=1}^{e^-} b_k^- = e^- - \beta^-. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(h_2 - h_2 + h_0) - (h_2 - h_2 + h_0)^* = e^+ - \beta^+ - e^- + \beta^-.$$

□

6. CONCLUSÕES

Este trabalho destaca a importância e a beleza do índice de Conley e suas conexões com diferentes linhas da matemática como: topologia algébrica, sistemas dinâmicos e singularidades. Embora o índice de Conley esteja bem definido para uma gama muito grande de fluxos, o caso GS constitui um conjunto importante e ilustrativo para a teoria de Conley.

O índice de Morse pode ser usado no cálculo de homologia de uma variedade. O índice de Conley, como sua generalização, pode ser utilizado no cálculo da homologia de interseção no caso de variedade singular, gerando novas perspectivas na área. Além disso, muitos casos do cálculo do índice Conley ainda não foram propriamente calculados.

7. AGRADECIMENTOS

Gostaríamos de agradecer o (a) parecerista anônimo(a) pelos apontamentos de várias correções e sugestões que certamente contribuíram para melhorar o presente texto.

N. Grulha foi parcialmente financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo n^o 2019/21181-0. D. Lima foi parcialmente financiada pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processos n^o 2020/11326-8 e n^o 2019/21181-0. D. Tenório ressalta que o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

- [1] BRASSELET, J. P. **An introduction to Characteristic Classes**. IMPA, 2021.
- [2] CONLEY, C. C. **Isolated Invariant Sets and the Morse Index**. 1978. CBMS vol. 38. Amer. Math. Soc., Providence.
- [3] DE REZENDE, K. A.; GRULHA, N. G. Jr.; LIMA, D. V. S.; ZIGART, M. A. J. **Gutierrez-Sotomayor flows on singular surfaces**. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, v. 60, n.1, p. 221-265, 2022.
- [4] GUTIERREZ, C. T.; SOTOMAYOR, J. M. **Stable vector fields on manifolds with simple singularities**. *Proceedings of the London Mathematical Society*, v. 3, n. 1, p. 97-112, 1982.
- [5] LIMA, D. V. S.; RAMINELLI, S. A.; DE REZENDE, K. A. **Homotopical cancellation theory for Gutierrez-Sotomayor singular flows**. *Journal of Singularities*, v. 23, p. 33-91, 2021.
- [6] LIMA, E. L. **Homologia básica**. IMPA, 2009.
- [7] LIMA, E. L. **A característica de Euler-Poincaré**. *Revista Matemática Universitária*, Rio de Janeiro, n. 1, p. 47-62, 1985.
- [8] MONTÚFAR, H.; DE REZENDE, K. A. **Conley theory for Gutierrez-Sotomayor fields**. *Journal of Singularities*, v. 22, p. 241-277, 2020.

- [9] PEIXOTO, M. C.; PEIXOTO, M. M. **Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions**. An. Acad. Brasil. Ci, v. 31, n. 2, p. 135-160, 1959.
- [10] PEIXOTO, M. M. **Structural stability on two-dimensional manifolds**. Topology, v. 1, n. 2, p. 101-120, 1962.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
ESTRADA DONA CASTORINA, 110, SALA 109
RIO DE JANEIRO, RJ
22460-320

Email address: denilson.tenorio@ufabc.edu.br,
dahisy.lima@ufabc.edu.br,
njunior@icmc.usp.br

O CONTEÚDO GEOMÉTRICO DE FOURIER

PEDRO ANTONIO SOARES DE ALCÂNTARA

RESUMO. Como forma de introduzir tópicos de Análise Harmônica em espaços homogêneos, este texto apresenta a série de Fourier de funções periódicas na reta e a decomposição de funções na esfera em harmônicos esféricos como consequência das simetrias dos espaços em questão.

1. INTRODUÇÃO

O objetivo deste texto é, em primeira instância, apresentar a série de Fourier de funções periódicas na reta e a decomposição de funções na esfera em harmônicos esféricos como uma manifestação das simetrias desses espaços. Via de regra, esse tópico é ensinado em cursos de Física e Matemática a partir de soluções de equações diferenciais – por exemplo, a equação do calor no caso de Fourier e a equação de Schrödinger para o átomo de hidrogênio no caso dos harmônicos esféricos –, o que é mais próximo do seu desenvolvimento histórico. Aqui vamos oferecer um olhar de outro ângulo que serve como um guia simplificado para um primeiro contato com Análise Harmônica, focando especificamente em espaços homogêneos por grupos compactos. Assim, em última instância, este é um texto didático em português, com indicações de leituras em inglês, dedicado a discentes de graduação e de pós-graduação que pretendem iniciar estudos em Análise Harmônica.

Veremos como uma variedade suave M com boas simetrias apresenta um espaço $L^2(M)$ com decomposição amigável e compatível com as tais simetrias. Lançaremos mão de alguns poucos resultados para que possamos explorar melhor o conteúdo de outros mais reveladores das consequências de simetrias.

As seções 2 e 3 são dedicadas a tornar preciso e compreensível o conceito de *boas simetrias* que queremos. Na primeira, discutiremos algumas propriedades de grupos de Lie compactos, especialmente suas representações. Na segunda, vamos ver uma caracterização de espaços homogêneos a partir de suas simetrias, o que traz implicações para a maneira como realizamos suas funções.

Data de aceitação: 1 de outubro de 2019.

Palavras chave. Análise Harmônica; grupo compacto; série de Fourier; harmônicos esféricos.

Por fim, a seção 4 traz a aplicação da teoria desenvolvida ao círculo S^1 e à esfera S^2 . O caso do círculo nos dá a série de Fourier canônica, enquanto que o caso da esfera nos dá os harmônicos esféricos.

2. GRUPOS DE LIE COMPACTOS E SUAS REPRESENTAÇÕES

2.1. Um pouco do caso geral. Falar de simetrias é falar de grupos. Aqui queremos falar de simetrias em variedades suaves, então é importante usar uma estrutura de diferenciabilidade além da estrutura de grupo. Um *grupo de Lie* é um grupo G que é também uma variedade suave cujos mapeamentos de produto $G \times G \rightarrow G : (g, h) \mapsto gh$ e inversão $G \rightarrow G : g \mapsto g^{-1}$ são suaves.

Para \mathbb{K} igual a \mathbb{R} ou \mathbb{C} , seja $GL(n, \mathbb{K})$ o grupo linear geral de ordem n sobre \mathbb{K} . Além de ser obviamente um grupo com o produto de matrizes, $GL(n, \mathbb{K})$ também herda a estrutura de variedade de $\mathbb{K}^{n \times n}$. Sendo o produto e a inversão funções racionais nas entradas das matrizes, esse é um exemplo de grupo de Lie. Em particular, temos que $GL(1, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^* := \mathbb{K} \setminus \{0\}$ é um grupo de Lie. Outro exemplo talvez um pouco mais óbvio é \mathbb{K}^n com a soma.

Doravante, sejam G e H grupos de Lie. Para manter coerência com a estrutura suave, todas as definições algébricas usuais recebem alguns acréscimos. Dizemos, por exemplo, que H é um *subgrupo de Lie* de G se é um subgrupo e é também uma subvariedade imersa de G , ou seja, a inclusão $H \hookrightarrow G$ é uma imersão.

Uma vez que abertos em variedades são subvariedades mergulhadas, i.e., herdam de forma direta a estrutura diferenciável, todo subgrupo aberto de um grupo de Lie é um subgrupo de Lie. Então \mathbb{R}^+ é um subgrupo de Lie de \mathbb{R}^* . É possível também mostrar que todo subgrupo fechado de um grupo de Lie é um subgrupo de Lie mergulhado¹, resultado esse que recebe o nome de *Teorema do Subgrupo Fechado*, cf. [4, Theorem 20.12]. Disso segue que $SL(n, \mathbb{K}) = \{A \in GL(n, \mathbb{K}) : \det(A) = 1\}$ é um subgrupo de Lie de $GL(n, \mathbb{K})$.

Um *homomorfismo de grupos de Lie* $\varphi : G \rightarrow H$ é um homomorfismo de grupos que é também um mapeamento suave; se φ é um difeomorfismo, dizemos que é um *isomorfismo de grupos de Lie*. Vejamos, por exemplo, $\det : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$. Sabemos que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ para quaisquer $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$. Ou seja, \det é um homomorfismo de grupos. Mas é também suave, pois é racional nas entradas das matrizes. Então \det é um exemplo de homomorfismo de grupos de Lie. Como exemplo de isomorfismo, temos $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ : t \mapsto e^t$, que tem como inversa a função $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \ln(t)$.

Para dar mais concretude a um grupo de Lie, é pertinente realizá-lo como um grupo de operadores contínuos em espaços vetoriais. Uma *representação* de G sobre um espaço vetorial topológico complexo² V é um homomorfismo de grupos³ $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ tal que $G \times V \rightarrow V : (g, v) \mapsto \rho(g)v$ é um mapeamento contínuo; a *dimensão* da representação é a dimensão de V . Usaremos (ρ, V) para indicar uma

¹Na verdade, isso é uma equivalência: um subgrupo de um grupo de Lie é fechado se, e só se, é um subgrupo de Lie mergulhado, cf. [4, Corollary 20.13]. Veja que \mathbb{R}^+ é também fechado em \mathbb{R}^* .

²A princípio, não há necessidade da restrição aos complexos, mas assim é mais simples e suficiente para o que vamos fazer.

³Denotamos por $\text{Aut}(V)$ o grupo dos homeomorfismos lineares de V .

representação sobre V , onde ρ é o homomorfismo de grupos sobre $\text{Aut}(V)$, ou apenas ρ caso o espaço vetorial esteja subentendido ou seja irrelevante.

Em particular, se V é um espaço vetorial normado de dimensão finita, então uma representação sobre V é um homomorfismo de grupos contínuo entre grupos de Lie. Ocorre que *todo homomorfismo de grupos contínuo entre grupos de Lie é suave*. Afinal, se $\varphi : G \rightarrow H$ é um homomorfismo de grupos contínuo, o gráfico $F = \text{graf}(\varphi) = \{(g, \varphi(g)) : g \in G\} \subset G \times H$ é um subgrupo fechado de $G \times H$, o que implica que F é um subgrupo de Lie de $G \times H$. Por fim, basta usar a projeção $F \rightarrow G$ para verificar que $G \rightarrow F : g \mapsto (g, \varphi(g))$ é um isomorfismo de grupos de Lie, cuja composição com a projeção $F \rightarrow H$, que também é homomorfismo de grupos de Lie, resulta em φ .

Por outro lado, se $\rho : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ é um homomorfismo de grupos de Lie, então é uma representação sobre \mathbb{C}^n com a topologia canônica, pois $G \times \mathbb{C}^n \rightarrow GL(n, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n : (g, v) \mapsto (\rho(g), v)$ e $GL(n, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n : (T, v) \mapsto Tv$ são mapeamentos contínuos.

À luz dessa discussão, enunciemos o seguinte fato:

Teorema 2.1. *Uma representação de G sobre \mathbb{C}^n com a topologia canônica é equivalente a um homomorfismo de grupos de Lie $G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$.*

Temos ainda que duas representações (ρ_1, V_1) e (ρ_2, V_2) de G são *equivalentes* se existe um homeomorfismo linear $T : V_1 \rightarrow V_2$ tal que $\rho_2(g)T = T\rho_1(g)$ para todo $g \in G$. Na prática, podemos pensar que duas representações equivalentes diferem apenas por uma mudança de base.

Devido à estrutura linear, podemos somar representações de forma a obter uma nova representação ou, em contrapartida, podemos eventualmente encontrar *sub-representações*. Dada uma representação (ρ, V) de G , dizemos que um subespaço $W \subset V$ é *invariante* se $\{\rho(g)w : g \in G, w \in W\} \subset W$. A representação é dita *irredutível* se existem exatamente dois subespaços invariantes: os triviais V e $\{0\}$; se há mais que dois, ρ é dita *reduzível*. Se V pode ser escrito como soma direta (topológica) de subespaços invariantes não triviais, dizemos que ρ é *completamente reduzível*.

Representações irredutíveis são, em alguma medida, blocos de construções para representações maiores. Existe uma classe especial de representações para as quais isso é particularmente importante: uma representação (ρ, \mathcal{H}) de G sobre um espaço de Hilbert é dita *unitária* se $\rho(g)$ é um operador unitário para todo $g \in G$. Não é difícil verificar que, nesses casos, complementos ortogonais de subespaços invariantes são também subespaços invariantes. Logo, se uma representação unitária (ρ, \mathcal{H}) possui um subespaço invariante fechado não trivial, então ela é completamente reduzível. Porque todo subespaço de dimensão finita de um espaço de Hilbert é fechado, concluímos:

Lema 2.2. *Toda representação unitária de dimensão finita é irredutível ou completamente reduzível.*

A seguir, trazemos um importante resultado sobre possíveis relações entre representações irredutíveis.

Lema 2.3 (Lema de Schur). *Se (ρ_1, V_1) e (ρ_2, V_2) são representações irredutíveis de G e $T : V_1 \rightarrow V_2$ é um operador que satisfaz $\rho_2(g)T = T\rho_1(g)$ para todo $g \in G$, então T é inversível ou identicamente nulo.*

Esboço de demonstração. O resultado decorre do fato de que a imagem e o núcleo de T são subespaços invariantes. \square

A primeira consequência do Lema de Schur é que todo operador limitado num espaço de Banach que comuta com uma dada representação é múltiplo da identidade. Para ver isso, consideremos uma representação (ρ, V) de G num espaço de Banach e um operador limitado $T : V \rightarrow V$ satisfazendo $\rho(g)T = T\rho(g)$ para todo $g \in G$. É sabido que o espectro de T é não vazio, de onde segue que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $T - \lambda\mathbb{1}$ é não invertível. Pelo Lema de Schur, $T - \lambda\mathbb{1}$ deve ser o operador nulo. Em particular, temos o seguinte:

Lema 2.4. *Se G é abeliano e ρ é uma representação irredutível de G num espaço de Banach, então ρ é unidimensional.*

2.2. Particularidades dos grupos compactos. Suponhamos, de agora em diante, que G é um grupo de Lie compacto. Existe uma única integral em G , chamada de *integral de Haar*⁴, que satisfaz

i) Invariância:

$$\int_G f(g) dg = \int_G f(hg) dg = \int_G f(gh) dg = \int_G f(g^{-1}) dg$$

para todo $h \in G$ e toda função $f \in C(G)$;

ii) Normalização:

$$|G| = \int_G 1 dg = 1 .$$

Mais detalhes sobre a integral de Haar podem ser encontrados em [1, 3].

Uma aplicação dessa medida é a construção de um produto interno invariante em representações de G . Se (ρ, \mathcal{H}) é uma representação de G sobre um espaço de Hilbert com produto interno $\langle | \rangle_0$, então⁵

$$(1) \quad \langle v|w \rangle = \int_G \langle \rho(g)v | \rho(g)w \rangle_0 dg$$

é um produto interno em \mathcal{H} tal que

$$(2) \quad \langle \rho(g)v | \rho(g)w \rangle = \langle v|w \rangle$$

para quaisquer $g \in G$ e $v, w \in \mathcal{H}$. Se \mathcal{H} tem dimensão finita, podemos adotar $\langle | \rangle$ no lugar de $\langle | \rangle_0$ de modo que ρ se torna uma representação unitária sobre um espaço de Hilbert. Com isso, concluímos que *toda representação de dimensão finita de G é unitária.*

⁴Mais precisamente, existe uma única medida de Radon bi-invariante μ tal que $\mu(G) = 1$.

⁵O integrando é composição de funções contínuas, portanto é integrável.

Outra coisa que conseguimos fazendo uso da integral de Haar é a construção de operadores contínuos que comutam com uma representação unitária (ρ, \mathcal{H}) de G : fixado $w \in \mathcal{H}$, tomamos $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ dado por

$$(3) \quad Tv = \int_G \langle \rho(g)w | v \rangle \rho(g)w dg .$$

Em [5], operadores dessa forma são usados para provar o seguinte:

Teorema 2.5. *Toda representação unitária irredutível de G tem dimensão finita.*

Apesar do argumento para demonstração do teorema acima ser simples, não o reproduziremos aqui para mantermos um texto conciso.

Vamos, agora, ver uma maneira simples de decompor $L^2(G)$. Começemos definindo um tipo especial de funções em G : um *coeficiente* de uma representação unitária⁶ (ρ, \mathcal{H}) de G é uma função da forma

$$(4) \quad \psi_{v,w}^\rho : G \rightarrow \mathbb{C} : g \mapsto v^*(\rho(g)w) = \langle v | \rho(g)w \rangle ,$$

onde $v, w \in \mathcal{H}$ e $v^* \in \mathcal{H}^*$ é a dualização de v pelo produto interno. Os coeficientes de duas representações equivalentes geram o mesmo espaço de funções e só precisaremos lidar com representações irredutíveis, por isso escolhemos uma representante de cada classe de equivalência de representações unitárias irredutíveis de G , denotando por \hat{G} o conjunto das representantes escolhidas.

Para cada $\rho \in \hat{G}$, seja \mathcal{A}_ρ o espaço gerado pelos coeficientes de ρ . Seja também \mathcal{A} o espaço gerado por combinações lineares finitas de $\bigcup_{\rho \in \hat{G}} \mathcal{A}_\rho$. Em virtude dos Teoremas 2.1 e 2.5, coeficientes de representações unitárias irredutíveis são não só funções contínuas, como são também funções suaves de G em \mathbb{C} , o que significa que $\mathcal{A} \subset C^\infty(G) \subset L^2(G)$.

Dada $(\rho, \mathcal{H}) \in \hat{G}$, uma maneira simples de construir uma base para \mathcal{A}_ρ é tomar uma base ortonormal $\{e_k : k = 1, \dots, \dim \rho\}$ de \mathcal{H} e fazer

$$(5) \quad \rho_{k,l} : G \rightarrow \mathbb{C} : g \mapsto e_k^*(\rho(g)e_l) = \langle e_k | \rho(g)e_l \rangle .$$

Cada $\rho_{k,l}(g)$ é a entrada (k, l) da matriz de $\rho(g)$ com respeito à base $\{e_k : k = 1, \dots, \dim \rho\}$. O lema a seguir nos garante que $\{\rho_{k,l} : k, l = 1, \dots, \dim \rho\}$ é base ortogonal de \mathcal{A}_ρ e nos diz como normalizá-la.

Lema 2.6 (Relações de ortogonalidade de Schur). *Dadas $(\rho, \mathcal{H}), (\rho', \mathcal{H}') \in \hat{G}$, vale:*

- i) *Se ρ e ρ' não são equivalentes, então $\mathcal{A}_\rho \perp \mathcal{A}_{\rho'}$;*
- ii) *O conjunto*

$$(6) \quad \mathcal{B}_\rho = \{ \sqrt{\dim \rho} \rho_{k,l} : k, l = 1, \dots, \dim \rho \} ,$$

com cada $\rho_{k,l}$ dada por (5), é uma base ortonormal de \mathcal{A}_ρ .

Esboço de demonstração. Podemos recorrer a um operador similar a (3): fixados $w \in \mathcal{H}$ e $w' \in \mathcal{H}'$, fazemos $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ dado por

$$(7) \quad Tv = \int_G \langle \rho(g)w | v \rangle \rho(g)w' dg ,$$

⁶Evidente que essa definição faz sentido para qualquer representação de qualquer grupo sobre qualquer espaço com produto interno.

que satisfaz as hipóteses do Lema de Schur e vale ainda $\langle \psi_{w',v'}^{\rho'} | \psi_{w,v}^{\rho} \rangle = \langle v' | Tv \rangle$. O resultado segue da aplicação do Lema de Schur nos casos de interesse. \square

Mas isso não é tudo, podemos dizer ainda mais sobre \mathcal{A} em $C^\infty(G)$ e em $L^2(G)$.

Teorema 2.7 (Teorema de Peter-Weyl). *\mathcal{A} é uniformemente denso em $C(G)$ e, portanto, é também denso em $L^2(G)$. Em particular, $\bigcup_{\rho \in \hat{G}} \mathcal{B}_\rho$, com \mathcal{B}_ρ dado por (6), é uma base ortonormal de $L^2(G)$.*

Esboço de demonstração. Basta usar o Teorema de Stone-Weierstrass, ou seja, é suficiente verificar que \mathcal{A} é uma álgebra estrela unital que separa pontos.

Dadas $(\rho, \mathcal{H}), (\rho', \mathcal{H}') \in \hat{G}$, tomemos $\rho_{k,l} \in \mathcal{B}_\rho$ e $\rho'_{m,n} \in \mathcal{B}_{\rho'}$. O produto $\rho_{k,l} \rho'_{m,n}$ é um coeficiente da representação $(\rho \otimes \rho', \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}')$, que é uma representação unitária de dimensão finita e, portanto, pelo Lema 2.2, é irredutível ou completamente redutível. Em ambos os casos, $\rho_{k,l} \rho'_{m,n}$ pode ser escrito como combinação linear finita de coeficientes de representações unitárias irredutíveis, então pertence a \mathcal{A} . Isso prova que \mathcal{A} é uma álgebra. A função constante igual a 1 é coeficiente da representação trivial de G sobre \mathbb{C} , portanto também pertence a \mathcal{A} , o que prova que \mathcal{A} é uma álgebra unital. Além disso, a representação (ρ^*, \mathcal{H}^*) dada por⁷

$$(8) \quad \rho^*(g)v^*(w) = v^*(\rho(g)^{-1}w) = \langle v | \rho(g)^{-1}w \rangle = \overline{\langle w | \rho(g)v \rangle},$$

é unitária irredutível e gera os complexos conjugados de \mathcal{A}_ρ . Isso prova que \mathcal{A} é fechada por complexo conjugado, finalizando a demonstração de que é uma álgebra estrela unital.

A prova de que \mathcal{A} separa pontos pode ser executada por meio de convoluções como feito em [8, Theorem 7]. Esse resultado, no entanto, é válido mesmo que o grupo em questão não seja compacto e recebe o nome de Teorema de Gelfand-Raikov, cf. [1, (3.34) The Gelfand-Raikov Theorem]. \square

Por fim, notemos que para cada $(\rho, \mathcal{H}) \in \hat{G}$, o espaço \mathcal{A}_ρ realiza uma representação unitária φ_ρ de G dada por

$$(9) \quad \varphi_\rho(g)f = f^g, \quad f^g(h) = f(g^{-1}h).$$

Ocorre que toda representação dessa forma é completamente redutível e se decompõe como representações equivalentes à ρ^* com multiplicidade igual a $\dim \rho$. Com efeito, se $\{e_1, \dots, e_{\dim \rho}\}$ é uma base ortonormal de \mathcal{H} , então

$$(10) \quad \mathcal{H}^* \rightarrow \{\psi_{v,e_k}^\rho : v \in \mathcal{H}\} : v^* \mapsto \psi_{v,e_k}^\rho,$$

onde ψ_{v,e_k}^ρ é dada por (4), fornece uma equivalência entre ρ^* e φ_ρ restrita ao subespaço $\{\psi_{v,e_k}^\rho : v \in \mathcal{H}\}$. Para se convencer dessa equivalência, basta comparar

$$(11) \quad \varphi_\rho(g)\psi_{v,e_k}^\rho(h) = \langle v | \rho(g^{-1}h)e_k \rangle = \langle \rho(g)v | \rho(h)e_k \rangle = \overline{\langle \rho(h)e_k | \rho(g)v \rangle}$$

com (8).

⁷A representação ρ^* é chamada de *contragradiente* ou *dual* de ρ .

Uma vez que $\dim \rho = \dim \rho^*$, obtemos

$$(12) \quad (\varphi_\rho, \mathcal{A}_\rho) \simeq \bigoplus_1^{\dim \rho^*} (\rho^*, \mathcal{H}^*) .$$

Em suma:

Corolário 2.7.1.

$$(13) \quad L^2(G) = \bigoplus_{\rho \in \hat{G}} \mathcal{A}_\rho \simeq \bigoplus_{\rho \in \hat{G}} \bigoplus_1^{\dim \rho} (\rho, \mathcal{H}) .$$

3. ESPAÇOS HOMOGÊNEOS POR GRUPOS DE LIE COMPACTOS

3.1. Caracterização de espaços homogêneos genéricos. Sejam M uma variedade compacta e G um grupo de Lie com identidade e . Uma *ação à esquerda* de G em M é um mapeamento suave $\Phi : G \times M \rightarrow M : (g, p) \mapsto g \cdot p$ que satisfaz:

- i) $e \cdot p = p$ para todo $p \in M$;
- ii) $(gh) \cdot p = g \cdot (h \cdot p)$ para todos $g, h \in G$ e $p \in M$.

De maneira análoga, podemos definir *ação à direita* por meio de $(g, p) \mapsto p \cdot g$, de modo que $p \cdot (gh) = (p \cdot g) \cdot h$. Se G age em M , dizemos que M é um G -espaço.

Consideremos uma ação qualquer $\Phi : G \times M \rightarrow M$. Dizemos que Φ é *transitiva* se para quaisquer dois pontos $p, q \in M$ existe $g \in G$ tal que $q = \Phi(g, p)$; se a ação é transitiva, dizemos que M é *homogênea*. Se para todo $p \in M$ vale a implicação

$$(14) \quad \Phi(g, p) = p \implies g = e ,$$

então a ação é dita *livre*. A nível de exemplo, todo grupo de Lie age transitiva e livremente sobre si mesmo. A ação de $SO(2)$ em \mathbb{R}^2 é livre, mas não transitiva.

Tais definições podem ser melhor compreendidas através dos conceitos de órbitas e isotropias. A *órbita* de um ponto $p \in M$ qualquer é o conjunto

$$(15) \quad G(p) = \{\Phi(g, p) : g \in G\} ,$$

enquanto que seu *grupo de isotropia* é o subgrupo

$$(16) \quad G_p = \{g \in G : \Phi(g, p) = p\} .$$

Assim, M é um G -espaço homogêneo se for a órbita de qualquer um de seus pontos, ao passo que a ação Φ é livre se todo grupo de isotropia for trivial. Além disso, é fácil ver também que para espaços homogêneos todos os grupos de isotropia são isomorfos entre si: dados $p, q \in M$, se existe $g \in G$ tal que $\Phi(g, p) = q$, então a conjugação por g gera um isomorfismo entre G_p e G_q .

É conveniente notar que todo grupo de isotropia é um subgrupo fechado, uma vez que é pré-imagem de um ponto por uma função contínua. Mais uma vez pelo Teorema do Subgrupo Fechado, todo grupo de isotropia é um subgrupo de Lie mergulhado. Outrossim, órbitas definem relações de equivalência em M :

$$(17) \quad p \sim q \iff q \in G(p) .$$

Denotamos por M/G o quociente de M por essa relação de equivalência, que nada mais é do que o espaço das órbitas de M . O teorema abaixo fornece condições suficientes para que M/G seja uma variedade.

Teorema 3.1 (Teorema da Variedade Quociente). *Se a ação de G em M é livre e própria⁸, então M/G possui uma única estrutura suave tal que a projeção $M \rightarrow M/G$ é uma submersão suave.*

A demonstração desse fato não é essencialmente complicada – as condições sobre a ação são usadas para mostrar que toda órbita é uma subvariedade mergulhada, cartas são construídas artesanalmente tomando, localmente, subvariedades perpendiculares a órbitas e a unicidade da estrutura diferenciável segue da suavidade da identidade –, mas é longa e trabalhosa, por isso nos restringimos a referenciar [4, Theorem 21.10].

O importante aqui é que toda ação à direita $H \times G \rightarrow G : (h, g) \mapsto gh$ de um subgrupo fechado $H \subset G$ sobre G é própria e livre. Ademais, o espaço das órbitas em G pela ação de H coincide com o espaço das coclasses à esquerda de H em G , de modo que a notação G/H faz sentido. Como corolário, temos o seguinte:

Corolário 3.1.1 (Construção de espaços homogêneos⁹). *Se $H \subset G$ é um subgrupo fechado, então G/H é um G -espaço homogêneo pela ação $G \times G/H : (g, \tilde{g}H) \rightarrow (g\tilde{g})H$ e a projeção $\pi : G \rightarrow G/H$ é uma submersão suave.*

Voltando a ação $\Phi : G \times M \rightarrow M$, consideremos que se trata de uma ação à esquerda. Dado um ponto $p \in M$ qualquer, a função

$$(18) \quad \begin{aligned} F : G/G_p &\rightarrow G(p) \\ gG_p &\mapsto g \cdot p \end{aligned}$$

é bijetora. Temos que $g \cdot p = h \cdot p$ equivale a $g^{-1}h \in G_p$, que por sua vez equivale a $gG_p = hG_p$, então F está bem definida e é injetora. A sobrejeção é óbvia. Em particular, se M é homogêneo, então cada um de seus pontos corresponde a uma coclasse de um mesmo subgrupo de isotropia em G . Na verdade, F serve para caracterizar espaços homogêneos:

Teorema 3.2 (Caracterização de espaços homogêneos). *Se M é um G -espaço homogêneo e $p \in M$, então F dada como em (18) é um difeomorfismo equivariante.*

Esboço de demonstração. Sejam $\pi : G \rightarrow G/G_p$ a projeção canônica e $\varphi_p : G \rightarrow M : g \mapsto g \cdot p$. Então $\varphi_p = F \circ \pi$. Uma vez que φ_p é suave e π é uma submersão sobrejetora, temos que F é suave. Também temos que

$$(19) \quad F(ghG_p) = (gh) \cdot p = g \cdot (h \cdot p) = g \cdot F(hG_p) .$$

Uma vez que as ações do elemento g em G/G_p e em M são difeomorfismos, a diferencial de F tem posto constante. Como F é bijetora, é um difeomorfismo. \square

⁸A ação é própria se o mapeamento $G \times M \rightarrow M \times M : (g, p) \mapsto (\Phi(g, p), p)$ é próprio.

⁹Mais detalhes em [4, Theorem 21.17].

3.2. Funções em espaços homogêneos por grupos compactos. Muito do que virá a seguir nesta seção pode ser encontrado com mais detalhes em [2].

Sejam G um grupo de Lie compacto e $H \subset G$ um subgrupo fechado. Como é de se esperar, existe uma única integral em G/H que satisfaz¹⁰

$$(20) \quad \int_{G/H} f(gH) d(gH) = \int_G \tilde{f} \circ \pi(g) dg .$$

para toda $f \in C(G/H)$, onde $\pi : G \rightarrow G/H$ é a projeção canônica, cf. [1, (2.49) Theorem]. O espaço $L^2(G/H)$ pode, então, ser entendido como um subespaço de $L^2(G)$ composto por funções *invariantes à direita* por H , i.e., funções $f \in L^2(G)$ tais que $g \mapsto f(gh)$ coincide com f quase sempre para todos $h \in H$. De igual maneira, $C(G/H)$ pode ser encarado como um subespaço de $C(G)$.

Pelo Teorema de Peter-Weyl e a discussão que teve lugar após ele (cf. Teorema 2.7 e Corolário 2.7.1), $f \in C(G)$ é invariante à direita por H se, e somente se, suas componentes em cada um dos espaços \mathcal{A}_ρ , com $\rho \in \hat{G}$, é invariante à direita por H . Vamos, então, descrever \mathcal{A}_ρ^H , o subespaço de \mathcal{A}_ρ composto por funções invariantes à direita por H .

Se $\psi_{v,w}^\rho \in \mathcal{A}_\rho$ é um coeficiente não nulo invariante à direita por H , vale

$$(21) \quad \langle v | \rho(g) \rho(h) w \rangle = \psi_{v,w}^\rho(gh) = \psi_{v,w}^\rho(g) = \langle v | \rho(g) w \rangle$$

para todos $h \in H$ e $g \in G$. Disso segue que w se mantém fixo pelas transformações de H . Em contrapartida, se w se mantém fixo por H , então $\psi_{v,w}^\rho$ é invariante à direita. Logo, o espaço \mathcal{A}_ρ^H é não nulo se, e somente se, a representação possui um vetor não nulo fixo por H .

Seja \hat{G}_H o subconjunto de \hat{G} composto somente por representações com vetores não nulos fixos por H . De todo o exposto, concluímos o seguinte:¹¹

Teorema 3.3.

$$(22) \quad L^2(G/H) = \bigoplus_{\rho \in \hat{G}_H} \mathcal{A}_\rho^H .$$

4. REDESCOBRINDO FOURIER E OS HARMÔNICOS ESFÉRICOS

4.1. A série de Fourier clássica. Nesta seção, vamos determinar explicitamente a decomposição fornecida pelo Corolário 2.7.1 para o caso $G = S^1$, o círculo – um tratamento similar é executado em [3]. É fácil ver que $S^1 = U(1)$, o grupo das transformações lineares unitárias em \mathbb{C} , com elementos dados genericamente por $e^{i\theta}$, onde $\theta \in \mathbb{R}$ e vale $e^{i(\theta+2\pi n)} = e^{i\theta}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. A integral de Haar neste caso pode ser expressa por uma integral em $[-\pi, \pi)$,

$$\int_{S^1} f(g) dg = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta ,$$

¹⁰Novamente, existe uma única medida de Radon invariante ν em G/H tal que $\nu(G/H) = 1$.

¹¹A decomposição de \mathcal{A}_ρ^H – e, por conseguinte, de $L^2(G/H)$ – em representações unitárias irredutíveis de G fica de exercício.

considerando funções em S^1 como funções 2π -periódicas em \mathbb{R} , da mesma forma que toda função 2π -periódica em \mathbb{R} pode ser vista como uma função em S^1 .

Proposição 4.1. Para $G = S^1$, temos que $\hat{G} \cong \mathbb{Z}$, onde $n \in \mathbb{Z}$ equivale a representação de S^1 em \mathbb{C} dada pelo homomorfismo de grupos de Lie $S^1 \rightarrow S^1 : e^{i\theta} \mapsto e^{in\theta}$.

Demonstração. Seja ρ uma representação unitária irredutível de S^1 . Uma vez que S^1 é abeliano, pelo Lema 2.4, ρ é unidimensional e, portanto, é um homomorfismo de grupos de Lie de S^1 em $U(1) = S^1$. Ou seja, $\rho(e^{i\theta}) = e^{i\alpha(\theta)}$. Para $\theta_m = 2\pi/m$, com $m \in \mathbb{N}$, temos que $(e^{i\theta_m})^m = 1$, o que implica que $\rho(e^{i\theta_m})^m = (e^{i\alpha(\theta_m)})^m = 1$, de onde segue que $\alpha(\theta_m) = n\theta_m$ para algum $n \in \mathbb{Z}$. A princípio, n parece depender de m , mas $\{e^{i2\pi q} : q \in \mathbb{Q}\}$ é denso em S^1 , então $\rho(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$ para todo $e^{i\theta} \in S^1$ e um certo n fixo. E, claro, se $n_1 \neq n_2$, as representações $e^{i\theta} \mapsto e^{in_1\theta}$ e $e^{i\theta} \mapsto e^{in_2\theta}$ não são equivalentes. \square

Logo, o Teorema de Peter-Weyl nos diz que $\{e^{in\theta} : n \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormal de $L^2(S^1)$,

$$(23) \quad L^2(S^1) = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} \{c_n e^{in\theta} : c_n \in \mathbb{C}\}.$$

Assim, dada qualquer função 2π -periódica $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfaz

$$(24) \quad \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta < \infty,$$

temos que

$$(25) \quad f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta},$$

onde

$$(26) \quad c_n = \langle e^{in\theta} | f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

4.2. Harmônicos esféricos. Vejamos, agora, a forma que o Teorema 3.3 assume no caso da esfera S^2 como variedade homogênea pela ação de $G = SU(2)$, o grupo das transformações unitárias especiais em \mathbb{C}^2 – um tratamento similar é executado em [6]. Para isso, vamos seguir alguns passos.

Primeiro, vamos verificar que $SU(2) \simeq S^3$, a 3-esfera. Com efeito,

$$U = \begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ z_2 & z_4 \end{pmatrix} \in SU(2)$$

se, e somente se, $UU^* = I$ e $\det U = 1$, o que significa que

$$(27) \quad \begin{cases} |z_1|^2 + |z_3|^2 = |z_2|^2 + |z_4|^2 = 1 \\ z_1 \bar{z}_2 + z_3 \bar{z}_4 = 0 \\ z_1 z_4 - z_2 z_3 = 1 \end{cases}.$$

Disso, obtemos que $z_4 = \bar{z}_1$ e $z_3 = -\bar{z}_2$, *i.e.*, os elementos de $SU(2)$ são da forma

$$(28) \quad U = \begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}$$

com $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$. Então $SU(2) \simeq S^3$, onde o produto em S^3 é expresso por

$$(29) \quad (z_1, z_2)(w_1, w_2) = (z_1 w_1 - w_2 \bar{z}_2, z_2 w_1 + w_2 \bar{z}_1),$$

que equivale ao produto de quatérnios $\mathbb{H} = \mathbb{C}^2$.

Agora, vamos descrever $S^3 \simeq SU(2)$ usando coordenadas especiais que facilitarão a descrição da sua ação sobre S^2 . É fácil verificar que todo ponto de S^3 pode ser escrito como

$$(e^{-i\xi} \cos(\omega), e^{-i\zeta} \sin(\omega)), \quad \xi, \zeta, \omega \in \mathbb{R}.$$

Fazendo $\alpha = \xi - \zeta$, $\gamma = \xi + \zeta$ e $\beta = 2\omega$, obtemos que todo $U \in SU(2)$ pode ser escrito como

$$(30) \quad U(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\gamma+\alpha}{2}} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) & -e^{i\frac{\gamma-\alpha}{2}} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ e^{-i\frac{\gamma-\alpha}{2}} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) & e^{i\frac{\gamma+\alpha}{2}} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{pmatrix} = e^{-\frac{i\alpha}{2}\sigma_3} e^{-\frac{i\beta}{2}\sigma_2} e^{-\frac{i\gamma}{2}\sigma_3},$$

onde σ_2 e σ_3 são as matrizes de Pauli

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De posse disso, construímos um homomorfismo sobrejetor de grupos de Lie

$$(31) \quad SU(2) \rightarrow SO(3) : U(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto R(\alpha, \beta, \gamma),$$

onde $R(\alpha, \beta, \gamma)$ é a rotação em \mathbb{R}^3 descrita pela composição da rotação de ângulo γ em torno do eixo z com a rotação de ângulo β em torno do eixo y com a rotação de ângulo α em torno do eixo z novamente¹². Desse modo, temos uma ação à esquerda transitiva de $SU(2) \simeq S^3$ em $S^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ por meio de rotações.

Finalmente, notemos que o grupo de isotropia do polo norte $\mathbf{n}_0 = (0, 0, 1) \in S^2$ é o $U(1) = S^1$ gerado por $e^{-i\frac{\gamma}{2}\sigma_3}$ em $SU(2)$ e por $(e^{-i\gamma/2}, 0)$ em S^3 . Logo, pelo Teorema 3.2, $S^2 \simeq S^3/S^1 \simeq SU(2)/U(1)$. A projeção canônica $\pi : S^3 \rightarrow S^2$ é dada por

$$(32) \quad \pi(z_1, z_2) = (x, y, z), \quad \begin{cases} x + iy = 2\bar{z}_1 z_2 \\ z = |z_1|^2 - |z_2|^2 \end{cases},$$

e recebe o nome de *mapa de Hopf*. Estendendo-o para $SU(2)$ sem mudança na notação, um cálculo direto nos mostra que

$$(33) \quad \pi(U(\alpha, \beta, \gamma)) = (\cos(\alpha) \sin(\beta), \sin(\alpha) \sin(\beta), \cos(\beta)),$$

então os ângulos (α, β) em $SU(2)$ estão em correspondência com as coordenadas esféricas¹³ (θ, ϕ) em S^2 através do mapa de Hopf. Dessa escolha de coordenadas, a integral de Haar em S^2 é expressa como

$$(34) \quad \int_{S^2} f(\mathbf{n}) d\mathbf{n} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi f(\theta, \phi) \sin(\phi) d\theta d\phi.$$

¹²Tais ângulos são comumente chamados de *ângulos de Euler*.

¹³Aqui usamos θ para azimute e ϕ para colatitude.

Por fim, precisamos determinar as representações unitárias irredutíveis de $SU(2)$ – o que não é tão elementar como no caso de $U(1)$ – e descobrir quais delas possuem vetores não nulos fixos por $U(1) = \{e^{-i\frac{\gamma}{2}\sigma_3} : \gamma \in \mathbb{R}\}$. O jeito mais simples de executar essa tarefa é por meio do estudo da *álgebra de Lie* de $SU(2)$. Como isso foge do escopo deste texto, vamos nos limitar a enunciar o resultado abaixo e apenas indicar a leitura de [6], que constrói explicitamente essas representações usando polinômios complexos em duas variáveis.

Teorema 4.2. *Para $G = SU(2)$, temos que $\hat{G} \equiv \{j : 2j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$, onde cada $j \geq 0$ inteiro ou semi-inteiro equivale a uma representação ρ_j de $SU(2)$ em \mathbb{C}^{2j+1} tal que $\rho_j(e^{-i\frac{\gamma}{2}\sigma_3}) = e^{-i\gamma J_3}$, sendo J_3 diagonal com autovalores $\{j, j-1, \dots, -j+1, -j\}$. Em particular, \mathbb{C}^{2j+1} possui vetores não nulos fixos por $U(1) = \{e^{-i\frac{\gamma}{2}\sigma_3} : \gamma \in \mathbb{R}\}$ via ρ_j se, e somente se, j é inteiro.*

Para cada $j \geq 0$ inteiro ou semi-inteiro podemos tomar a *base canônica de spin*¹⁴ $\{u_m : m = j, j-1, \dots, -j+1, -j\}$ de \mathbb{C}^{2j+1} que satisfaz $J_3 u_m = m u_m$ de modo que, no caso em que j é inteiro, os coeficientes $\sqrt{2j+1} \langle u_m | \rho_j(g) u_0 \rangle$ constituem uma base ortonormal de $\mathcal{A}_{\rho_j}^{U(1)}$ pelas relações de ortogonalidade de Schur (cf. Lema 2.6). Resta, então, escrever tais coeficientes de forma mais amigável usando nossas coordenadas angulares – por sorte, alguém já fez isso antes. As funções

$$(35) \quad D_{m,m'}^j(\alpha, \beta, \gamma) = \langle u_m | \rho_j(U(\alpha, \beta, \gamma)) u_{m'} \rangle$$

são conhecidas como *D-funções de Wigner*. A expressão geral é feia e complicada:

$$(36) \quad D_{m,m'}^j(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-im\alpha} d_{m,m'}^j(\beta) e^{-im'\gamma},$$

onde

$$(37) \quad d_{m,m'}^j(\beta) = (-1)^{j-m'} \sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!} \\ \times \sum_k (-1)^k \frac{(\cos(\frac{\beta}{2}))^{m+m'+2k} (\sin(\frac{\beta}{2}))^{2j-m-m'-2k}}{k!(j-m-k)!(j-m'-k)!(m+m'+k)!},$$

com k varrendo todos os valores que fazem sentido, são as *d-funções de Wigner*, cf. [7]. Porém, quando $m' = 0$, que é nosso caso de interesse, temos que

$$(38) \quad d_{m,0}^j(\beta) = \sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!}} P_j^m(\cos(\beta)),$$

onde P_j^m são os polinômios associados de Legendre. Então

$$(39) \quad D_{m,0}^j(\alpha, \beta, \gamma) = \sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!}} P_j^m(\cos(\beta)) e^{-im\alpha}.$$

¹⁴O nome se dá porque tais representações formalizam sistemas quânticos de *spin*.

Em face disso, retomando as coordenadas esféricas em S^2 , definimos os *harmônicos esféricos*¹⁵

$$(40) \quad Y_j^m(\theta, \phi) := \sqrt{2j+1} \overline{D_{m,0}^j(\theta, \phi, 0)} = \sqrt{2j+1} \sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!}} P_j^m(\cos(\beta)) e^{im\alpha}$$

para $j \geq 0$ inteiro e $m \in \{j, j-1, \dots, -j+1, -j\}$.

Finalmente, temos que $\{Y_j^m : j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, m = j, \dots, -j\}$ é uma base ortonormal de $L^2(S^2)$,

$$(41) \quad L^2(S^2) = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m=-j}^j a_j^m Y_j^m : a_j^m \in \mathbb{C} \right\}.$$

Assim, se $f : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ é tal que

$$(42) \quad \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi |f(\theta, \phi)|^2 \sin(\phi) d\theta d\phi < \infty,$$

então

$$(43) \quad f = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j a_j^m Y_j^m,$$

onde

$$(44) \quad a_j^m = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi f(\theta, \phi) \overline{Y_j^m(\theta, \phi)} \sin(\phi) d\theta d\phi.$$

REFERÊNCIAS

- [1] FOLLAND, G. *A course in abstract analysis*. CRC Press, 1995.
- [2] HELGASON, S. *Groups and geometric analysis*. Academic Press, 1984.
- [3] HSIANG, W. Y. *Lectures on Lie groups*. World Scientific, 2000.
- [4] LEE, J. *Introduction to smooth manifolds*. 2 ed. Springer, 2013.
- [5] NACHBIN, L. On the finite dimensionality of every irreducible unitary representation of a compact group. *Proc. Amer. Math. Soc.* 12 (1961), 11-12
- [6] RIOS, P. de M.; STRAUME, E. *Symbol correspondences for spin systems*. Springer, 2014.
- [7] VARSHALOVICH, D. A.; MOSKALEV, A. N.; KHERSONSKII, V. K. *Quantum theory of angular momentum*. World Scientific, 1988.
- [8] TAO, T. Haar measure and the Peter-Weyl theorem. *What's new*, 2011. Disponível em: <https://terrytao.wordpress.com/2011/09/27/254a-notes-3-haar-measure-and-the-peter-weyl-theorem/>.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DE COMPUTAÇÃO, UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SÃO CARLOS, SP

Email address: pedro.antonio.alcantara@usp.br

¹⁵Como mencionado na seção 1, tais funções aparecem quando resolvemos certas equações diferenciais. Mais especificamente, são autofunções do laplaciano na esfera, o que também tem relação com as simetrias tratadas aqui. Para mais informações sobre isso, ver [2, 6, 7].

FUNÇÕES COMPLEXAS HOLOMORFAS E CAMPOS CONFORMES

JOÃO FRANCISCO DA SILVA FILHO, LARISSA BRAGA FERNANDES
E MARINALDO BRAGA DA SILVA

RESUMO. No presente trabalho, abordamos uma interessante relação entre funções complexas holomorfas e campos de vetores conformes (ou simplesmente, *campos conformes*) definidos em subconjuntos abertos do plano Euclidiano munido de uma métrica Riemanniana conforme à métrica canônica. Nesse sentido, provaremos que as únicas métricas Riemannianas no plano Euclidiano que admitem tal relação são conformes à métrica canônica.

1. INTRODUÇÃO

Dizemos que campos de vetores conformes (ou simplesmente, *campos conformes*) sobre um *aberto Riemanniano* (aberto de \mathbb{R}^n munido de uma métrica Riemanniana) são campos de vetores, cuja derivada de Lie na sua direção nos fornece uma aplicação, expressa através do produto de uma função real suave (chamada de *fator conforme*) pela métrica Riemanniana. Estes campos de vetores representam generalizações dos campos de Killing e dos campos homotéticos, pois verifica-se que campos de Killing e homotéticos são campos conformes com fator conforme nulo e fator conforme constante, respectivamente. Convém ainda salientar que os campos conformes são assim designados em alusão às transformações conformes.

Diante do exposto, usamos a identificação dos planos complexo e Euclidiano para estudar relações entre as funções complexas holomorfas e os campos conformes, estabelecendo uma interessante identificação entre o espaço das funções complexas holomorfas definidas sobre um mesmo subconjunto aberto do plano complexo e o espaço dos campos conformes sobre abertos Riemannianos do plano Euclidiano munidos com uma métrica Riemanniana conforme à métrica canônica. Finalmente, provaremos que esta identificação é possível apenas para métricas Riemannianas conformes à métrica canônica do plano Euclidiano.

Data de aceitação: .

Palavras chave. Funções complexas holomorfas, Campos conformes, Métricas Riemannianas conformes.

Esta identificação ajuda a evidenciar a relação existente entre o caráter conforme das funções complexas holomorfas e o caráter conforme dos campos conformes em abertos Riemannianos do plano Euclidiano munidos com uma métrica Riemanniana conforme à métrica canônica. Devemos ressaltar que a referida identificação permite apresentar uma maneira bem simples de construir exemplos de campos conformes a partir de funções complexas holomorfas, bem como caracterizar os campos conformes definidos sobre abertos Riemannianos do plano Euclidiano munidos com métricas Riemannianas conformes à métrica canônica.

2. PRELIMINARES

Nesta seção, apresentamos algumas preliminares do trabalho que encontram-se divididas em três subseções, onde abordamos as funções complexas holomorfas, abertos Riemannianos e os campos conformes, incluindo definições e resultados importantes na compreensão e demonstração dos resultados principais.

2.1. Funções Complexas. Recordamos aqui as funções complexas e alguns dos conceitos relacionados a estas, tais como limite, continuidade, derivada complexa e culminando com funções holomorfas. Estaremos admitindo noções elementares sobre topologia no plano complexo e análise complexa, bem como omitindo demonstrações, que podem ser encontradas em Ávila [1] ou Soares [16].

Primeiramente, devemos lembrar que dado um subconjunto $U \subset \mathbb{C}$ não vazio, dizemos que uma função complexa na variável complexa z é uma correspondência, denotada por $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, que associa a cada elemento $z_0 \in U$ um único elemento $f(z_0) \in \mathbb{C}$.

Na sequência, introduzimos a noção de limite para funções complexas definidas em subconjuntos abertos.

Definição 1. *Sejam $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função definida num subconjunto aberto, $z_0 \in \mathbb{C}$ um ponto de acumulação do subconjunto U e $w_0 \in \mathbb{C}$ um número complexo. Se dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ satisfazendo*

$$0 < |z - z_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - w_0| < \epsilon,$$

dizemos que w_0 é limite de f com $z \in U$ tendendo a z_0 e denota-se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$.

De modo similar ao conceito de limite sobre funções reais em uma variável real, verifica-se que se o limite existe, então deve ser único (cf. Ávila [1] ou Soares [16]). Para além disso, dadas funções $f, g : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definidas num subconjunto aberto, $z_0 \in U$ um ponto de acumulação de U e uma constante $c \in \mathbb{C}$, tais que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_1 \quad \text{e} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = w_2.$$

confirmam-se as seguintes propriedades:

- (a) $\lim_{z \rightarrow z_0} (cf)(z) = cw_1$,
- (b) $\lim_{z \rightarrow z_0} (f + g)(z) = w_1 + w_2$ e
- (c) $\lim_{z \rightarrow z_0} (f \cdot g)(z) = w_1 w_2$.

A partir do conceito de limite, apresentamos a definição de continuidade de uma função complexa em um ponto do seu domínio.

Definição 2. *Seja $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função definida num subconjunto aberto, então dizemos que f é contínua no ponto $z_0 \in U$ se satisfaz*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Quando f é contínua em todos os pontos de U , dizemos apenas que f é contínua.

No que diz respeito à noção de continuidade de funções em uma variável complexa, verificam-se propriedades similares às presentes em funções reais de uma variável real (cf. Guidorizzi [7]). De fato, dadas funções $f, g : U_1 \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e $h : U_2 \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definidas em subconjuntos abertos com $f(U_1) \subset U_2$, f e g contínuas em $z_0 \in U_1$ e h contínua em $f(z_0)$, valem as afirmações:

(a) As funções complexas, dadas por

$$cf : U_1 \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f + g : U_1 \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{e} \quad f \cdot g : U_1 \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

são contínuas em z_0 ;

(b) A função composta $h \circ f : U_1 \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua em z_0 .

Nesse momento, definimos a derivada complexa em um ponto do domínio de uma função complexa de uma variável complexa.

Definição 3. *Seja $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função definida num subconjunto aberto, então f é derivável em um ponto $z_0 \in U$ se existe o limite*

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

que será chamado de derivada de f em z_0 .

Na sequência, apresentamos algumas das propriedades da derivada de funções complexas que se assemelham com as propriedades da derivada real.

Proposição 1. *Sejam $f, g : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ funções definidas num subconjunto aberto e deriváveis em $z_0 \in U$ e $c \in \mathbb{C}$ uma constante arbitrária, então as seguintes funções $cf, f + g, f \cdot g : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ são deriváveis em z_0 e valem as igualdades:*

- (a) $(cf)'(z_0) = c \cdot f'(z_0)$;
- (b) $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$;
- (c) $(f \cdot g)'(z_0) = f(z_0)g'(z_0) + g(z_0)f'(z_0)$.

O próximo resultado estende mais uma conclusão que é válida para funções reais de uma variável real.

Proposição 2. *Sejam $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função definida num subconjunto aberto e derivável em $z_0 \in U$, então f é contínua em z_0 .*

Dando prosseguimento, apresentamos a seguir uma versão da Regra da Cadeia para funções complexas em uma variável complexa.

Proposição 3 (Regra da Cadeia). *Sejam $f : U_1 \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : U_2 \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definidas em subconjuntos abertos com $f(U_1) \subset U_2$. Se f é derivável em $z_0 \in U_1$ e g é derivável em $f(z_0) \in U_2$, então $g \circ f : U_1 \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é derivável em z_0 e vale a igualdade*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Agora vamos definir função holomorfa que será de grande importância para a compreensão dos resultados principais desse trabalho.

Definição 4. *Dizemos que uma função complexa $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida num subconjunto aberto é holomorfa, quando existe a derivada $f'(z)$ para todo $z \in U$.*

Devemos lembrar que comumente identifica-se o conjunto dos números complexos com o plano Euclidiano, através da bijeção $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $\pi(x, y) = x + yi$. Usando essa identificação, podemos escrever uma função complexa $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida em um subconjunto aberto na forma

$$f(z) = u(z) + iv(z),$$

ou alternativamente,

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y),$$

onde as funções u e v correspondem às partes real e imaginária de f , respectivamente (cf. Ávila [1] ou Soares [16]).

Diante do exposto, apresentamos dois resultados que apresentam as condições de Cauchy-Riemann como uma condição necessária e suficiente para que uma função complexa seja derivável.

Proposição 4. *Seja $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa definida sobre um subconjunto aberto e escrita na forma $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Suponha que f é derivável num ponto $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$, então são satisfeitas as condições de Cauchy-Riemann, dadas por*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad e \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Encerrando a subseção, apresentamos um resultado que corresponde à recíproca da Proposição 4, possibilitando a caracterização das funções complexas holomorfas através das condições de Cauchy-Riemann.

Proposição 5. *Seja $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa definida sobre um aberto e escrita na forma $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, tal que as derivadas parciais de u e v existem em U e são contínuas em $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$. Suponha que as condições de Cauchy-Riemann são satisfeitas em z_0 , então f é derivável nesse ponto.*

2.2. Abertos Riemannianos. Nesta segunda subseção, introduzimos importantes conceitos de Geometria Riemanniana restritos a subconjuntos abertos do espaço Euclidiano \mathbb{R}^n . No decorrer do trabalho, usaremos as notações $C^\infty(U)$ e $\mathfrak{X}(U)$ para denotar os conjuntos das funções reais suaves e dos campos de vetores suaves, respectivamente, definidos sobre um subconjunto aberto não vazio U de \mathbb{R}^n .

No intuito de estabelecer notações, vamos fixar um aberto não vazio $U \subset \mathbb{R}^n$ e definir os campos de vetores suaves $\partial_{x_i} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($i = 1, 2, \dots, n$) da seguinte forma

$$\partial_{x_i}(p) = e_i,$$

onde $e_i \in \mathbb{R}^n$ é o vetor que possui i -ésima coordenada igual a 1 e as demais nulas. Dados $X \in \mathfrak{X}(U)$ arbitrário, uma função $f \in C^\infty(U)$ e um ponto $p \in U$, definimos

$$(1) \quad X(f)(p) = \sum_{i=1}^n X_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

onde $X_1, X_2, \dots, X_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ denotam as funções coordenadas de X .

Esta relação nos permite identificar qualquer $X \in \mathfrak{X}(U)$ como uma aplicação $X : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$ que associa cada $f \in C^\infty(U)$ à função suave $X(f) : U \rightarrow \mathbb{R}$, definida conforme (1). Inspirado nessa ideia, enunciamos a próxima definição.

Definição 5. *Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ definidos sobre um aberto não vazio $U \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que $\langle X, Y \rangle : U \rightarrow \mathbb{R}$ é a função suave, dada por*

$$\langle X, Y \rangle(p) = \langle X(p), Y(p) \rangle,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ no 2º membro denota o produto interno canônico de \mathbb{R}^n .

Observação 1. *Diante da Definição 5, observa-se que:*

- (a) *As funções coordenadas de $X \in \mathfrak{X}(U)$ podem ser expressas por $X_i = \langle X, \partial_{x_i} \rangle$, onde $1 \leq i \leq n$.*
- (b) *Podemos adotar as aplicações $dx_i dx_j, dx_i^2 : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow C^\infty(U)$, dadas por*

$$dx_i dx_j(Y, Z) = \langle \partial_{x_i}, Y \rangle \langle \partial_{x_j}, Z \rangle \quad e \quad dx_i^2(Y, Z) = \langle \partial_{x_i}, Y \rangle \langle \partial_{x_i}, Z \rangle,$$

onde $1 \leq i, j \leq n$.

Nesse momento, revisitamos um resultado que permite introduzir uma operação entre campos vetores.

Proposição 6. *Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ definidos sobre um aberto não vazio $U \subset \mathbb{R}^n$, existe um único campo de vetores $Z \in \mathfrak{X}(U)$ que satisfaz*

$$Z(f) = XY(f) - YX(f),$$

para toda função $f \in C^\infty(U)$.

Demonstração. Inicialmente, vamos escrever

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \partial_{x_i} \quad e \quad Y = \sum_{j=1}^n Y_j \partial_{x_j},$$

onde $X_i, Y_j \in C^\infty(U)$ denotam funções coordenadas. Dessa forma, podemos definir

$$(2) \quad Z = \sum_{k=1}^n Z_k \partial_{x_k},$$

onde $Z_k = \sum_{l=1}^n \left(X_l \frac{\partial Y_k}{\partial x_l} - Y_l \frac{\partial X_k}{\partial x_l} \right)$.

Nessas condições, observa-se que

$$(3) \quad XY(f) = \sum_{i,j=1}^n X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^n X_i Y_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

bem como,

$$(4) \quad YX(f) = \sum_{i,j=1}^n Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^n X_i Y_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

portanto decorre de (2), (3) e (4) que $Z(f) = XY(f) - YX(f)$. \square

Diante da Proposição 6, podemos agora introduzir mais um importante conceito, chamado *colchete de Lie* (ou simplesmente, *colchete*).

Definição 6. *Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ definidos sobre um aberto não vazio $U \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que o colchete de X e Y é o campo de vetores suave denotado por $[X, Y]$ e que satisfaz*

$$[X, Y](f) = XY(f) - YX(f),$$

para toda função $f \in C^\infty(U)$.

Agora apresentamos o conceito de métrica Riemanniana em subconjuntos abertos não vazios do espaço Euclidiano.

Definição 7. *Uma métrica Riemanniana definida num aberto não vazio $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação $g = \langle \cdot, \cdot \rangle_g$ que associa a cada $p \in U$, um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ em \mathbb{R}^n , de modo que a função*

$$p \in U \quad \longmapsto \quad \langle X(p), Y(p) \rangle_p$$

é suave para todo par de campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$.

Na sequência, trazemos um exemplo bem elementar de métrica Riemanniana no espaço Euclidiano.

Exemplo 1. *A aplicação $g_0 = \sum_{i=1}^n dx_i^2$ que associa todo ponto do espaço Euclidiano \mathbb{R}^n ao produto interno canônico é uma métrica Riemanniana, chamada de métrica Euclidiana canônica (ou simplesmente, métrica canônica).*

O próximo exemplo nos mostra uma maneira de construir métricas Riemannianas sobre um aberto de \mathbb{R}^n , partindo de uma função suave positiva e da métrica canônica.

Exemplo 2. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto não vazio e $\rho \in C^\infty(U)$ uma função positiva, então a aplicação $g = \rho^2 g_0$ é uma métrica Riemanniana sobre U .*

Diante da definição de métrica Riemanniana, introduzimos a seguir o conceito de aberto Riemanniano.

Definição 8. *Um aberto Riemanniano é um subconjunto aberto não vazio $U \subset \mathbb{R}^n$, munido com uma métrica Riemanniana g , denotado simplesmente por (U, g) .*

Descrevemos a seguir, dois exemplos de abertos Riemannianos.

Exemplo 3. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto não vazio, então (U, g_0) é um aberto Riemanniano.

Exemplo 4. O subconjunto aberto $U = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$ munido com a métrica Riemanniana $g = x_n^{-2}g_0$ é um aberto Riemanniano, conhecido por espaço hiperbólico e comumente denotado por \mathbb{H}^n .

Em analogia ao conceito de base ortonormal, apresentamos a noção de referencial ortonormal.

Definição 9. Um referencial ortonormal sobre um aberto Riemanniano (U, g) é um conjunto de campos de vetores $\{E_1, E_2, \dots, E_n\} \subset \mathfrak{X}(U)$ satisfazendo a condição

$$\langle E_i, E_j \rangle_g = \delta_{ij} \text{ (delta de Kronecker),}$$

para todos $1 \leq i, j \leq n$.

Para ilustrar a definição anterior, trazemos um exemplo bastante conhecido de referencial ortonormal.

Exemplo 5. Dado um aberto não vazio $U \subset \mathbb{R}^n$, verifica-se que o subconjunto

$$\{\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_n}\} \subset \mathfrak{X}(U)$$

é um referencial ortonormal em (U, g_0) .

Na sequência, apresentamos a definição de campo gradiente definido sobre abertos Riemannianos.

Definição 10. Sejam (U, g) um aberto Riemanniano e $f \in C^\infty(U)$ uma função, então o gradiente de f é o campo de vetores ∇f que satisfaz a condição

$$\langle \nabla f, X \rangle_g = X(f),$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(U)$.

O próximo exemplo mostra que a definição de gradiente anteriormente apresentada coincide com a definição usual, quando consideramos um subconjunto aberto não vazio munido com a métrica canônica.

Exemplo 6. Sejam (U, g_0) um aberto Riemanniano e $f \in C^\infty(U)$ uma função, então o gradiente de f é dado por

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \partial_{x_i}.$$

De fato, primeiro escrevemos o gradiente de f na forma

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n Y_i \partial_{x_i},$$

onde $Y_i \in C^\infty(U)$ com $1 \leq i \leq n$. Usando a Definição 10, obtemos

$$\langle \nabla f, X \rangle_{g_0} = X(f) = \sum_{j=1}^n \langle X, \partial_{x_j} \rangle \frac{\partial f}{\partial x_j},$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(U)$.

Combinando as relações obtidas, verifica-se que $Y_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, donde concluímos que

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \partial_{x_i},$$

conforme enunciado.

Deve-se ressaltar que a escolha de uma métrica Riemanniana acaba determinando uma importante aplicação, chamada *conexão Riemanniana* (ou alternativamente, *conexão de Levi-Civita*). Nesse sentido, introduzimos o conceito de conexão afim.

Definição 11. *Uma conexão afim num aberto Riemanniano (U, g) é uma aplicação $\nabla : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)$, que associa cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ a um campo de vetores $\nabla_X Y$ e satisfaz as propriedades*

- (a) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
- (b) $\nabla_{fX+hY} Z = f\nabla_X Z + h\nabla_Y Z$ e
- (c) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$ e $f, h \in C^\infty(U)$.

Dando prosseguimento, mostraremos que a escolha de uma métrica Riemanniana em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ determina uma única conexão afim simétrica e compatível com a métrica.

Proposição 7. *Seja (U, g) um aberto Riemanniano, então existe uma única conexão afim ∇ (conexão de Levi-Civita) definida em U , tal que*

- (a) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (simetria) e
- (b) $X\langle Y, Z \rangle_g = \langle \nabla_X Y, Z \rangle_g + \langle Y, \nabla_X Z \rangle_g$ (compatibilidade com a métrica),

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$.

Demonstração. Primeiro, admitimos a existência de uma conexão como enunciado, obtendo

$$X\langle Y, Z \rangle_g = \langle \nabla_X Y, Z \rangle_g + \langle Y, \nabla_X Z \rangle_g,$$

bem como,

$$Y\langle Z, X \rangle_g = \langle \nabla_Y Z, X \rangle_g + \langle Z, \nabla_Y X \rangle_g \quad \text{e} \quad Z\langle X, Y \rangle_g = \langle \nabla_Z X, Y \rangle_g + \langle X, \nabla_Z Y \rangle_g.$$

Na sequência, somamos as duas primeiras igualdades e subtraímos a terceira, resultando em

$$\begin{aligned} & X\langle Y, Z \rangle_g + Y\langle Z, X \rangle_g - Z\langle X, Y \rangle_g \\ &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle_g + \langle Y, \nabla_X Z \rangle_g + \langle \nabla_Y Z, X \rangle_g + \langle Z, \nabla_Y X \rangle_g - \langle \nabla_Z X, Y \rangle_g - \langle X, \nabla_Z Y \rangle_g, \end{aligned}$$

daí usamos o item (a) para chegar à relação

$$\begin{aligned} & X\langle Y, Z \rangle_g + Y\langle Z, X \rangle_g - Z\langle X, Y \rangle_g \\ &= \langle [X, Y], Z \rangle_g + \langle Y, [X, Z] \rangle_g + \langle [Y, Z], X \rangle_g + 2\langle Z, \nabla_Y X \rangle_g. \end{aligned}$$

Reorganizando os termos da última igualdade, deduzimos a fórmula

$$\begin{aligned} \langle \nabla_Y X, Z \rangle_g &= \frac{1}{2} (X \langle Y, Z \rangle_g + Y \langle Z, X \rangle_g - Z \langle X, Y \rangle_g \\ &\quad - \langle [X, Y], Z \rangle_g - \langle Y, [X, Z] \rangle_g - \langle [Y, Z], X \rangle_g) \end{aligned}$$

(Fórmula de Koszul),

que define $\nabla_Y X$ de maneira única, visto que Z é arbitrário e a métrica g é uma aplicação não degenerada.

Para garantir a existência, basta definir ∇ por meio da fórmula de Koszul acima e verificar diretamente, que assim definida, esta satisfaz as propriedades (a) e (b), concluindo a demonstração. \square

Apresentamos a seguir a conexão Riemanniana sobre abertos não vazios de \mathbb{R}^n munidos com a métrica canônica.

Exemplo 7. Dado um aberto não vazio $U \subset \mathbb{R}^n$ munido da métrica canônica g_0 , temos que a conexão Riemanniana de (U, g_0) é expressa por

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n X(Y_i) \partial_{x_i},$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ e $Y_1, Y_2, \dots, Y_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ são as funções coordenadas de Y .

Fazendo um cálculo direto e usando as propriedades da conexão Riemanniana, obtemos

$$\nabla_X Y = \sum_{i,j=1}^n X_j \nabla_{\partial_{x_j}} (Y_i \partial_{x_i}) = \sum_{i,j=1}^n X_j Y_i \nabla_{\partial_{x_j}} \partial_{x_i} + \sum_{i,j=1}^n X_j \partial_{x_j} (Y_i) \partial_{x_i},$$

onde $X = \sum_{j=1}^n X_j \partial_{x_j}$. Deduz-se da fórmula de Koszul que $\nabla_{\partial_{x_j}} \partial_{x_i} = 0$ e assim

$$\nabla_X Y = \sum_{i,j=1}^n X_j \partial_{x_j} (Y_i) \partial_{x_i} = \sum_{i=1}^n X(Y_i) \partial_{x_i},$$

concluindo o exemplo.

A partir da noção de conexão Riemanniana, podemos introduzir a definição de divergente de um campo de vetores sobre um aberto Riemanniano.

Definição 12. Sejam (U, g) um aberto Riemanniano e $X \in \mathfrak{X}(U)$ campo de vetores, então o divergente de X é a função $\text{div } X : U \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\text{div } X = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle_g,$$

onde $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ denota um referencial ortonormal em U .

Observação 2. Devemos ressaltar que a definição de divergente não depende do referencial ortonormal escolhido (cf. Carmo [5]).

O próximo exemplo mostra que a definição de divergente apresentada coincide com a definição usual, quando consideramos subconjuntos abertos não vazios munidos com a métrica canônica.

Exemplo 8. Seja (U, g_0) um aberto Riemanniano e $X \in \mathfrak{X}(U)$ um campo de vetores, então o divergente de X é dado por

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i},$$

onde $X_1, X_2, \dots, X_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ são as funções coordenadas de X .

Usamos diretamente a Definição 12 e os Exemplos 5 e 7 para deduzir que

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{\partial_{x_i}} X, \partial_{x_i} \rangle_{g_0} = \sum_{i,j=1}^n \langle \partial_{x_i}(X_j) \partial_{x_j}, \partial_{x_i} \rangle_{g_0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i},$$

coincidindo com a definição usual de divergente (cf. Guidorizzi [8]).

De modo análogo, apresentamos a definição de laplaciano de funções reais suaves definidas sobre abertos Riemannianos.

Definição 13. Sejam (U, g) um aberto Riemanniano e $f \in C^\infty(U)$ uma função real, então o laplaciano de f é a função real $\Delta f : U \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f).$$

Observação 3. Sabendo que as definições de gradiente e divergente sobre abertos Riemannianos munidos da métrica canônica coincidem com suas definições usuais (cf. Exemplos 6 e 8), conseqüentemente o mesmo ocorre com o laplaciano.

O conceito de conexão Riemanniana também nos permite definir o hessiano de uma função real suave definida sobre abertos Riemannianos.

Definição 14. Sejam (U, g) um aberto Riemanniano e $f \in C^\infty(U)$ uma função real, então o hessiano de f é a aplicação $\operatorname{Hess} f : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow C^\infty(U)$ dada por

$$\operatorname{Hess} f(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle_g.$$

No exemplo a seguir, explicitamos a expressão do hessiano de uma função real suave definida em um aberto Riemanniano munido com a métrica canônica.

Exemplo 9. Seja (U, g_0) um aberto Riemanniano e $f \in C^\infty(U)$ uma função real, então o seu hessiano é dado por

$$\operatorname{Hess} f = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j.$$

Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ arbitrários, vamos escrever

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \partial_{x_i}$$

então segue-se da Definição 14 e dos Exemplos 6 e 7 que

$$\begin{aligned} \operatorname{Hess} f(X, Y) &= \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle_{g_0} \\ &= \sum_{i,j=1}^n X_i \partial_{x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \langle \partial_{x_j}, Y \rangle_{g_0} + \sum_{i,j=1}^n X_i \frac{\partial f}{\partial x_j} \langle \nabla_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j}, Y \rangle_{g_0}. \end{aligned}$$

Decorre da fórmula de Koszul que $\nabla_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} = 0$, portanto

$$\text{Hess } f(X, Y) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \langle \partial_{x_i}, X \rangle \langle \partial_{x_j}, Y \rangle,$$

implicando pela Observação 1(b) que

$$\text{Hess } f = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j,$$

conforme enunciado.

Na sequência, introduzimos a noção de derivada de Lie da métrica de um aberto Riemanniano na direção de um campo de vetores.

Definição 15. *Sejam (U, g) um aberto Riemanniano e $X \in \mathfrak{X}(U)$ campo de vetores, então a aplicação $\mathcal{L}_X g : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow C^\infty(U)$, dada por*

$$\mathcal{L}_X g(Y, Z) = \langle \nabla_Y X, Z \rangle_g + \langle Y, \nabla_Z X \rangle_g$$

é a derivada de Lie de g na direção de X .

Para finalizar a subseção, deduzimos a expressão da derivada de Lie de um aberto Riemanniano munido da métrica canônica.

Exemplo 10. *Seja (U, g_0) um aberto Riemanniano e $X \in \mathfrak{X}(U)$ um campo de vetores, então a derivada de Lie de g_0 na direção de X é dada por*

$$\mathcal{L}_X g_0 = \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial X_j}{\partial x_i} + \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j,$$

onde $X_1, X_2, \dots, X_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ são as funções coordenadas de X .

Dados $Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$ arbitrários, tem-se que

$$\mathcal{L}_X g_0(Y, Z) = \langle \nabla_Y X, Z \rangle_{g_0} + \langle Y, \nabla_Z X \rangle_{g_0}$$

então segue do Exemplo 7 que

$$\mathcal{L}_X g_0(Y, Z) = \sum_{j=1}^n Y(X_j) \langle \partial_{x_j}, Z \rangle + \sum_{i=1}^n Z(X_i) \langle Y, \partial_{x_i} \rangle,$$

onde $X_k = \langle X, \partial_{x_k} \rangle$ para todo índice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Escrevendo $Y = \sum_{i=1}^n \langle Y, \partial_{x_i} \rangle \partial_{x_i}$ e $Z = \sum_{j=1}^n \langle Z, \partial_{x_j} \rangle \partial_{x_j}$, podemos escrever a última igualdade na forma

$$\mathcal{L}_X g_0(Y, Z) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \langle \partial_{x_i}, Y \rangle \langle \partial_{x_j}, Z \rangle + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \langle \partial_{x_j}, Z \rangle \langle \partial_{x_i}, Y \rangle,$$

implicando pela Observação 1(b) que

$$\mathcal{L}_X g_0 = \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial X_j}{\partial x_i} + \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j,$$

conforme enunciado.

2.3. Campos Conformes. Nesta subseção, recordamos os campos conformes sobre abertos Riemannianos junto com diversos conceitos relacionados a estes, exemplos encontrados na literatura e alguns casos particulares bem interessantes dessa classe de campos de vetores, tais como: campos de Killing, campos homotéticos, campos conformes gradientes, campos conformes fechados e campos paralelos.

Definição 16. *Um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(U)$ sobre um aberto Riemanniano (U, g) é conforme, quando ocorre a igualdade*

$$\mathcal{L}_X g = 2\psi g,$$

onde ψ é uma função real suave definida sobre U , chamada fator conforme.

Decorre diretamente da definição de derivada de Lie que a condição $\mathcal{L}_X g = 2\psi g$ equivale a afirmar que X satisfaz a equação de Killing

$$\langle \nabla_Y X, Z \rangle_g + \langle Y, \nabla_Z X \rangle_g = 2\psi \langle Y, Z \rangle_g,$$

para todos $Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$. Nesse mesmo contexto, deduz-se da Definição 12 que

$$\psi = \frac{1}{n} \operatorname{div} X,$$

onde div denota o divergente.

Observação 4. *A derivada de Lie de um campo de vetores gradiente sobre um aberto Riemanniano (U, g) é o dobro do hessiano. Mais precisamente, tem-se que*

$$\mathcal{L}_{\nabla\varphi} g = 2\operatorname{Hess} \varphi,$$

onde $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave.

Na sequência, apresentamos três exemplos de campos conformes gradientes sobre abertos Riemannianos, bem conhecidos na literatura (cf. [2] e [11]).

Exemplo 11. *Considere \mathbb{R}^n munido da métrica canônica g_0 e a função $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\pi_i(x) = x_i$ com $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Sendo assim, verifica-se que o gradiente*

$$\nabla \pi_i = \partial_{x_i}$$

é um campo conforme sobre (\mathbb{R}^n, g_0) com fator conforme $\psi \equiv 0$.

Exemplo 12. *Considere o espaço Euclidiano \mathbb{R}^n munido da métrica canônica g_0 e a função $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dada por*

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}|x|^2,$$

então $\nabla\varphi$ é um campo conforme sobre (\mathbb{R}^n, g_0) com fator conforme $\psi \equiv 1$.

Exemplo 13. *Considere o subconjunto aberto $U = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$ munido da métrica $g = x_n^{-2}g_0$ e a função $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$, dada por*

$$\varphi(x) = \frac{1}{2x_n}|x|^2,$$

então $\nabla\varphi$ é um campo conforme sobre (U, g) com fator conforme $\psi \equiv \varphi$.

Apresentamos mais dois exemplos de campos conformes no espaço Euclidiano, sendo estes não gradientes.

Exemplo 14. O campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$, definido por

$$X = (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y$$

é conforme sobre (\mathbb{R}^2, g_0) com fator conforme dado por $\psi(x, y) = 2x$.

Exemplo 15. O campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$, definido por

$$X = x(x^2 - 3y^2)\partial_x + y(3x^2 - y^2)\partial_y$$

é conforme sobre (\mathbb{R}^2, g_0) com fator conforme dado por $\psi(x, y) = 3(x^2 - y^2)$.

Convém ressaltar que um campo conforme X sobre um aberto Riemanniano (U, g) é dito *homotético* (respectivamente, *Killing*), quando seu fator conforme é constante (respectivamente, identicamente nulo). Um caso particular bem interessante ocorre quando um campo de vetores suave X satisfaz

$$\nabla_Y X = \psi Y,$$

para todo $Y \in \mathfrak{X}(U)$ e nesse caso, dizemos que X é um campo *conforme fechado*. Recordamos ainda que um campo conforme fechado é dito ser *paralelo*, quando seu fator conforme é identicamente nulo.

Observação 5. Todo campo conforme gradiente $X = \nabla\varphi$ num aberto Riemanniano (U, g) é conforme fechado. De fato, observe que

$$\langle \nabla_Y X, Z \rangle = \langle \nabla_Y \nabla\varphi, Z \rangle = \text{Hess } \varphi(Y, Z) = \langle \psi Y, Z \rangle,$$

portanto $\nabla_Y X = \psi Y$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(U)$.

Para concluir, apresentamos a definição de métrica Riemanniana conforme.

Definição 17. Sejam (U, g) um aberto Riemanniano e $\rho : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave positiva, então dizemos que a métrica Riemanniana $\bar{g} = \rho^2 g$ é conforme a g (ou vice-versa).

Observação 6. Nos Exemplos 2 e 4 podem ser encontradas métricas Riemannianas conformes à métrica canônica.

No contexto da Definição 17, pode-se deduzir da definição da derivada de Lie (cf. Definição 15) e das propriedades da conexão Riemanniana (cf. Definição 11 e Proposição 7) que

$$(5) \quad \mathcal{L}_X \bar{g} = \mathcal{L}_X(\rho^2 g) = X(\rho^2)g + \rho^2 \mathcal{L}_X g,$$

ou ainda,

$$(6) \quad \mathcal{L}_X \bar{g} - \rho^2 \mathcal{L}_X g = 2\rho X(\rho)g = \frac{2}{\rho} X(\rho)\bar{g},$$

então X é conforme com respeito a g se, e somente se, é conforme com respeito a \bar{g} , ou seja, o caráter conforme de X é invariante por mudança conforme de métrica.

3. RELACIONANDO FUNÇÕES HOLOMORFAS E CAMPOS CONFORMES

Nesta última seção, vamos apresentar os resultados principais do nosso trabalho, que relacionam funções complexas holomorfas e campos conformes definidos sobre uma interessante classe de abertos Riemannianos, bem como diversas aplicações dos referidos resultados.

3.1. Resultados Principais. Inicialmente, enunciamos um teorema que revisita uma conhecida relação entre funções complexas holomorfas e campos conformes sobre abertos do plano Euclidiano munidos com métrica conforme à métrica canônica (cf. [3] e [10]) e apresenta uma prova elementar.

Teorema 1. *Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto munido com uma métrica g conforme à métrica canônica. Nessas condições, temos que as afirmações a seguir são equivalentes:*

- (a) *A função complexa $f = u + iv : \pi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ é holomorfa;*
- (b) *O campo de vetores $X = u\partial_x + v\partial_y \in \mathfrak{X}(U)$ é conforme com respeito a g .*

Demonstração. Primeiramente, escrevemos $g = \rho^2 g_0$ e usamos as relações (5) e (6) para deduzir que

$$\mathcal{L}_X g = 2\rho X(\rho)g_0 + \rho^2 \mathcal{L}_X g_0,$$

onde $\rho : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ denota uma função suave positiva.

Decorre da expressão da derivada de Lie da métrica canônica que

$$\mathcal{L}_X g = 2\rho X(\rho)g_0 + \rho^2 \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx^2 + \frac{\partial v}{\partial y} dy^2 \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) (dxdy + dydx) \right].$$

podendo ser reescrita na forma

$$\mathcal{L}_X g = 2 \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} X(\rho) \right] g - \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) (dxdy + dydx).$$

Por outro lado, segue das Proposições 4 e 5 que f é holomorfa se, e somente se, verificam-se as condições de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

equivalente a afirmar que a expressão da derivada de Lie resume-se a

$$\mathcal{L}_X g = 2 \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} X(\rho) \right] g,$$

isto é, X é um campo conforme com respeito à métrica g . □

Como consequência da demonstração do Teorema 1, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 1. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto e $X = u\partial_x + v\partial_y \in \mathfrak{X}(U)$ um campo conforme com respeito a uma métrica conforme $g = \rho^2 g_0$, então o fator conforme de X é dado por*

$$\psi = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right).$$

Usando diretamente o Teorema 1, obtemos uma caracterização para os campos conformes no plano Euclidiano munido com a métrica canônica.

Corolário 2. *Uma função complexa $f = u + iv : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa, se e somente se, o campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$, definido por*

$$X = u\partial_x + v\partial_y$$

é conforme sobre o plano \mathbb{R}^2 munido com a métrica canônica. Nesse contexto, tem-se que o fator conforme é dado por $\psi = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Demonstração. Fazendo $\rho \equiv 1$ no Teorema 1, obtemos $g = g_0$ e o resultado segue diretamente do referido teorema e do Corolário 1. \square

Diante do Corolário 2 anteriormente enunciado, apresentamos um exemplo de campo conforme, obtido a partir da função holomorfa $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = e^z$.

Exemplo 16. *O campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$, definido por*

$$X = (e^x \cos y)\partial_x + (e^x \sin y)\partial_y$$

é conforme sobre (\mathbb{R}^2, g_0) com fator conforme dado por $\psi(x, y) = e^x \cos y$.

Novamente aplicando o Teorema 1, obtemos uma caracterização para campos conformes no plano hiperbólico, onde adotamos a notação $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C}; \text{Im}(z) > 0\}$.

Corolário 3. *Uma função complexa $f = u + iv : \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ será holomorfa, se e somente se, o campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2)$, definido por*

$$X = u\partial_x + v\partial_y$$

for conforme sobre \mathbb{H}^2 . Nesse contexto, tem-se que o fator conforme é dado por

$$\psi = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{y}v = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{y}u.$$

Demonstração. Supondo $\rho(x, y) = y^{-1}$ no Teorema 1, obtemos $g = y^{-2}g_0$ e o resultado segue diretamente do referido teorema e do Corolário 1. \square

Aplicando o Corolário 3, apresentamos um exemplo de campo conforme a partir da função holomorfa $f : \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \frac{1}{z}$.

Exemplo 17. *O campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2)$ definido por*

$$X = \frac{x}{x^2 + y^2}\partial_x - \frac{y}{x^2 + y^2}\partial_y$$

é conforme com fator conforme $\psi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dado por $\psi(x, y) = \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$.

No intuito de apresentar uma recíproca do primeiro teorema, provamos a seguir que métricas conformes à métrica canônica são as únicas métricas Riemanniana no plano Euclidiano que permitem estabelecer a mesma equivalência descrita no Teorema 1.

Teorema 2. *Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto do plano Euclidiano munido de uma métrica g . Suponha que toda função complexa holomorfa $f = u + iv : \pi(U) \rightarrow \mathbb{C}$ implica que o campo de vetores $X = u\partial_x + v\partial_y \in \mathfrak{X}(U)$ é conforme com relação a g , então g é conforme à métrica canônica.*

Demonstração. Devemos lembrar que uma métrica g definida em um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 pode ser escrita na forma

$$g = Adx^2 + B(dxdy + dydx) + Cdy^2,$$

onde $A, B, C : U \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves, tais que

$$A, C > 0 \quad \text{e} \quad AC - B^2 > 0,$$

que correspondem aos coeficientes da primeira forma fundamental.

Sabendo que A é suave e positiva, então a função $\rho = \sqrt{A}^{-1}$ é suave e positiva, permitindo-nos definir a métrica conforme

$$\bar{g} = \rho^2 g = dx^2 + BA^{-1}(dxdy + dydx) + CA^{-1}dy^2,$$

que pode ser reescrita na forma

$$\bar{g} = dx^2 + F(dxdy + dydx) + Gdy^2,$$

onde $F = BA^{-1}$ e $G = CA^{-1}$.

Por um cálculo direto, verifica-se que os campos de vetores

$$(7) \quad E_1 = \partial_x \quad \text{e} \quad E_2 = \frac{1}{\sqrt{G - F^2}} (\partial_y - F\partial_x)$$

constituem um referencial ortonormal, cujos colchetes de Lie satisfazem

$$[E_1, E_1] = [E_2, E_2] = 0 \quad \text{e} \quad [E_1, E_2] = -[E_2, E_1] = -\frac{F_x}{\sqrt{G - F^2}} E_1 - \frac{G_x - 2FF_x}{2(G - F^2)} E_2,$$

onde $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$ e $G_x = \frac{\partial G}{\partial x}$.

Usando a fórmula de Koszul (cf. Carmo [5]), obtemos as conexões Riemannianas

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{E_1} E_1 &= \frac{F_x}{\sqrt{G - F^2}} E_2, & \bar{\nabla}_{E_2} E_2 &= -\frac{G_x - 2FF_x}{2(G - F^2)} E_1, \\ \bar{\nabla}_{E_1} E_2 &= -\frac{F_x}{\sqrt{G - F^2}} E_1 \quad \text{e} \quad \bar{\nabla}_{E_2} E_1 &= \frac{G_x - 2FF_x}{2(G - F^2)} E_2, \end{aligned}$$

expressas em termos dos campos de vetores que constituem o referencial ortonormal $\{E_1, E_2\}$, conforme descrito por (7).

Diante das equivalências enunciadas, tem-se para toda função complexa holomorfa $f = u + iv : \pi(U) \rightarrow \mathbb{C}$ que

$$V = u\partial_x + v\partial_y,$$

é um campo conforme (com relação a g e \bar{g}), podendo ser reescrito na forma

$$V = (u + vF)E_1 + v\sqrt{G - F^2}E_2,$$

onde $\pi(U) \subset \mathbb{C}$ é o subconjunto aberto obtido da imagem de $U \subset \mathbb{R}^2$ por $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$.

Sendo V um campo conforme, tem-se em particular que

$$\mathcal{L}_V \bar{g}(E_1, E_1) = \mathcal{L}_V \bar{g}(E_2, E_2) = 2\psi,$$

bem como,

$$\mathcal{L}_V \bar{g}(E_1, E_2) = \mathcal{L}_V \bar{g}(E_2, E_1) = 0,$$

onde ψ denota o fator conforme de V .

Nessas condições, temos que

$$\mathcal{L}_V \bar{g}(E_1, E_1) = 2 \langle \bar{\nabla}_{E_1} V, E_1 \rangle_{\bar{g}} = 2[E_1 \langle V, E_1 \rangle_{\bar{g}} - \langle V, \bar{\nabla}_{E_1} E_1 \rangle_{\bar{g}}],$$

ou ainda,

$$\mathcal{L}_V \bar{g}(E_1, E_1) = 2[E_1(u + vF) - vF_x] = 2(u_x + v_x F),$$

onde $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ e $v_x = \frac{\partial v}{\partial x}$.

De modo análogo, obtemos

$$\mathcal{L}_V \bar{g}(E_2, E_2) = \frac{1}{G - F^2} [2(G - F^2)(v_y - v_x F) + (G_x - 2FF_x)u + (G_y - 2FF_y)v],$$

bem como,

$$\mathcal{L}_V \bar{g}(E_1, E_2) = \mathcal{L}_V \bar{g}(E_2, E_1) = \frac{1}{\sqrt{G^2 - F^2}} [u_y + v_x(G - 2F^2) + uF_x + vF_y] = 0,$$

onde $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$ e $G_y = \frac{\partial G}{\partial y}$.

Em outras palavras, podemos afirmar que os coeficientes F e G da métrica \bar{g} satisfazem as equações

$$4v_x F(G - F^2) = (G_x - 2FF_x)u + (G_y - 2FF_y)v,$$

e

$$u_y + v_x(G - 2F^2) + uF_x + vF_y = 0,$$

sempre que a função complexa $f = u + iv : \pi(U) \rightarrow \mathbb{C}$ for holomorfa.

Em particular, estas equações valem para a função $f_1 : U \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$f_1(z) = 1,$$

cujas partes real e imaginária são $u_1 \equiv 1$ e $v_1 \equiv 0$, respectivamente, implicando que

$$G_x - 2FF_x = 0 \quad \text{e} \quad F_x = 0,$$

portanto F e G não dependem de x .

De modo análogo, verifica-se o mesmo para a função $f_2 : U \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$f_2(z) = iz,$$

que nos permite inferir

$$4F(G - F^2) = (G_y - 2FF_y)x \quad \text{e} \quad -1 + (G - 2F^2) + xF_y = 0,$$

pois as partes real e imaginária são $u_2(x, y) = -y$ e $v_2(x, y) = x$, respectivamente.

Sabendo que F e G não dependem de x , então

$$4F(G - F^2) = (G_y - 2FF_y) = 0 \quad \text{e} \quad F_y = G - 2F^2 - 1 = 0,$$

ou ainda,

$$F = 0 \quad \text{e} \quad G = 1,$$

donde concluímos que $\bar{g} = dx^2 + dy^2$ e g é conforme à métrica canônica. \square

Observação 7. *Os Teoremas 1 e 2 evidenciam a relação entre o caráter conforme das funções complexas holomorfas e o caráter conforme dos campos conformes em abertos Riemannianos munidos com uma métrica conforme à métrica canônica. Mais detalhes sobre o caráter conforme de funções holomorfas encontram-se em Ávila [1], Lins Neto [9] e Soares [16].*

3.2. Algumas Aplicações. Nesta última subseção, apresentamos mais algumas aplicações dos resultados principais em forma de corolários, os quais descrevem explicitamente os campos homotéticos e os campos conformes gradientes definidos sobre os planos Euclidiano e hiperbólico.

Nesse momento, aplicamos o Corolário 2 para descrever explicitamente os campos homotéticos definidos sobre o plano Euclidiano munido com a métrica canônica.

Corolário 4. *Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ um campo homotético sobre (\mathbb{R}^2, g_0) , então*

$$X = (\psi x + ay + b)\partial_x + (-ax + \psi y + c)\partial_y,$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e ψ denota o fator conforme de X .

Demonstração. Inicialmente, definimos a função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

onde $u = \langle X, \partial_x \rangle$ e $v = \langle X, \partial_y \rangle$. Decorre do Teorema 1 que f é holomorfa, portanto

$$(8) \quad \psi = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

onde usamos a Proposição 4 e o Corolário 1.

Sabendo que X é homotético, então seu fator conforme ψ é constante e assim

$$u(x, y) = \psi x + \sigma(y) \quad \text{e} \quad v(x, y) = \psi y + \phi(x),$$

onde $\sigma, \phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dependem apenas de y e x , respectivamente. Da segunda igualdade de (8), obtemos

$$\phi'(x) + \sigma'(y) = 0,$$

portanto $\phi(x) = -ax + c$ e $\sigma(y) = ay + b$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Diante do exposto, tem-se que

$$u(x, y) = \psi x + ay + b \quad \text{e} \quad v(x, y) = -ax + \psi y + c,$$

donde concluímos que

$$X = (\psi x + ay + b)\partial_x + (-ax + \psi y + c)\partial_y,$$

para $a, b, c \in \mathbb{R}$. □

Na sequência, obtemos a descrição explícita dos campos conformes gradiente sobre o plano Euclidiano que corresponde a um caso particular da descrição dos campos conformes gradiente no espaço Euclidiano (cf. Pigola et al. [17]).

Corolário 5. *Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ um campo conforme gradiente sobre (\mathbb{R}^2, g_0) , então X é homotético e sua função potencial é dada por*

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}[\psi(x^2 + y^2) + 2ax + 2by + 2c],$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e ψ denota o fator conforme.

Demonstração. Sabendo que $X = \nabla\varphi$ é conforme, então

$$\mathcal{L}_X g = 2\text{Hess } \varphi = 2\psi(dx^2 + dy^2),$$

no entanto, a definição de derivada de Lie nos fornece

$$\mathcal{L}_X g = 2\text{Hess } \varphi = 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} dy dx + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} dy^2 \right),$$

consequentemente,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \psi.$$

Decorre da segunda igualdade acima que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial^2 y \partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial^2 x \partial y} = 0,$$

portanto ψ é constante e X é homotético. Nessas condições, podemos concluir que

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}[\psi(x^2 + y^2) + 2ax + 2by + 2c],$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e ψ denota o fator conforme. □

Agora vamos utilizar o Corolário 3 para descrever explicitamente os campos homotéticos definidos sobre o plano hiperbólico.

Corolário 6. *Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2)$ um campo homotético, então X é um campo de Killing dado por*

$$X = [a(x^2 - y^2) + bx + c]\partial_x + (2ax + b)y\partial_y,$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Inicialmente, definimos a função $f : \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

onde $u = \langle X, \partial_x \rangle$ e $v = \langle X, \partial_y \rangle$. Decorre do Teorema 1 que f é holomorfa, portanto

$$(9) \quad \psi = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

onde usamos a Proposição 4 e o Corolário 1.

Sabendo que X é homotético, então ψ é constante e satisfaz

$$\psi = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{y}v = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{y}v,$$

implicando que

$$(10) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{y} v \right) = \frac{1}{y} \psi.$$

Por outro lado, temos que

$$\frac{\partial(y^{-1}v)}{\partial y} = \frac{1}{y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{y} v \right) = \frac{1}{y} \psi,$$

que nos fornece

$$v(x, y) = \psi y \ln y + y\sigma(x),$$

onde $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ depende apenas de x .

Diante do exposto, tem-se que

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = \sigma'(x),$$

que juntamente com (10) nos permite obter

$$\sigma''(x) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y} \psi,$$

donde deduzimos que $\psi = 0$ e $\sigma'' \equiv 0$.

Nessas condições, podemos escrever

$$\sigma(x) = 2ax + b,$$

implicando que

$$(11) \quad v(x, y) = (2ax + b)y,$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$.

Para além disso, vamos ter

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2ax + b \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2ay,$$

portanto $u(x, y) = a(x^2 - y^2) + bx + c$ e junto com a expressão (11), obtemos

$$X = [a(x^2 - y^2) + bx + c]\partial_x + (2ax + b)y\partial_y,$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$. □

Finalmente, obtemos a descrição explícita dos campos conformes gradiente sobre o plano hiperbólico que corresponde a um caso particular da descrição dos campos conformes gradiente no espaço hiperbólico (cf. Silva Filho [15]).

Corolário 7. *Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2)$ um campo conforme gradiente, então sua função potencial é dada por*

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2y} [a(x^2 + y^2) + 2bx + 2cy + 2d],$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e o fator conforme satisfaz $\psi \equiv \varphi - c$.

Demonstração. Inicialmente, vamos definir uma função complexa $f : \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ pela expressão

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

onde $u = \langle X, \partial_x \rangle$ e $v = \langle X, \partial_y \rangle$. Decorre do Teorema 1 que f é holomorfa, portanto

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

onde usamos a Proposição 4.

Por outro lado, usamos a fórmula do gradiente da mudança conforme de métrica (cf. Obata e Yano [12]) para obter

$$(12) \quad y^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = u \quad \text{e} \quad y^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v,$$

então definindo $\zeta : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por $\zeta(x, y) = 2y\varphi(x, y)$, podemos reescrever as relações anteriores na forma

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{2}{y}u \quad \text{e} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 2\varphi + \frac{2}{y}v.$$

Fazendo um cálculo direto, obtemos

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{2}{y}u_x \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 2\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{2}{y}v_y - \frac{2}{y^2}v = \frac{2}{y}v_y,$$

logo,

$$\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial y} = 0,$$

portanto $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = a$.

Diante do exposto, podemos escrever

$$\zeta(x, y) = a(x^2 + y^2) + 2bx + 2cy + 2d,$$

implicando que

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2y}[a(x^2 + y^2) + 2bx + 2cy + 2d],$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Finalmente, aplicamos o Corolário 1 e usamos as expressões (12) para inferir

$$(13) \quad \psi = y^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - y \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

no entanto,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{a}{y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{y}\varphi(x, y) - \frac{ay + c}{y},$$

que substituídas em (13) nos permite concluir que $\psi \equiv \varphi - c$. □

Agradecimentos: Os autores agradecem ao parecerista pelas valiosas contribuições e à Revista Matemática Universitária pela oportunidade. Ademais, Larissa Braga Fernandes agradece ao programa BICT da Funcap pelo suporte financeiro durante sua Graduação, que possibilitou sua participação neste trabalho.

REFERÊNCIAS

- [1] G. S. Ávila. *Variáveis Complexas e Aplicações*. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000.
- [2] A. A. Barros e P. Sousa. Compact graphs over a sphere of constant second order mean curvature. *Proceedings of the American Mathematical Society*. **139**, n. 9 (2009), 3105-3114.
- [3] F. Begun, A. Moroianu e L. Ornea. Essential points of conformal vector fields. *Journal of Geometry and Physics*, **61** (2011), 589-593.
- [4] A. Besse. *Einstein manifolds*. Springer-Verlag, New York (2008).
- [5] M. P. Carmo. *Geometria Riemanniana*. IMPA, Rio de Janeiro (2005).
- [6] B. Chow, P. Lu e L. Ni. *Hamilton's Ricci Flow*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010.
- [7] H. L. Guidorizzi. *Curso de Cálculo - Volume 1*. 5. ed. São Paulo: LTC, 2011.
- [8] H. L. Guidorizzi. *Curso de Cálculo - Volume 3*. 5. ed. São Paulo: LTC, 2011.
- [9] A. Lins Neto. *Funções de uma Variável Complexa*. 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- [10] G. Manno e G. Metafune. On the extendability of conformal vector fields of 2-dimensional manifolds. *Differential Geometry and its Applications*, **30** (2012), 365-369.
- [11] A. C. Muniz Neto. The geometry of closed conformal vector fields on Riemann spaces. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society. (N.S.)*, **42** (2011), 277-300.
- [12] M. Obata e K. Yano. Conformal changes of Riemannian metrics. *Journal of Differential Geometry*, **4** (1970), 53-72.
- [13] B. O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry with Application to Relativity*. Academic Press, New York (1983).
- [14] P. Petersen. *Riemannian Geometry*. New York: Springer-Verlag, 1998. (Graduate Texts in Mathematics).
- [15] J. F. da Silva Filho. *Solitons de Ricci e Métricas Quasi-Einstein em Variedades Homogêneas*. 2013. 84 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Pós Graduação em Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.
- [16] M. G. Soares. *Cálculo em uma Variável Complexa*. 5. ed. IMPA, Rio de Janeiro, 2014.
- [17] S. Pigola, M. Rimoldi e A. Setti. Remarks on non-compact gradient Ricci solitons. *Mathematische Zeitschrift*, **258** (2011), 347-362.
- [18] Y. Tashiro. Complete Riemannian manifolds and some vector fields. *Transaction of the American Mathematical Society*, **117** (1965), 251-275.

UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
 INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
 REDENÇÃO - CE
 Email address: joaofilho@unilab.edu.br

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
 PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DA FFCLRP
 RIBEIRÃO PRETO - SP
 Email address: larissa.fernandes1234545@gmail.com

SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO E CULTURA
 BARREIRA - CE
 Email address: marinaldobraga37@gmail.com

MODELAGEM DE TEMPERATURA NO DISCO

CLEUBER SILVA

RESUMO. Este texto tem o intuito de apresentar uma proposta de solução para o problema de distribuição de temperatura no disco. É apresentada solução através do método de separação de variáveis por coordenadas polares, complementando com o Software Mathematica com condição de simetria trigonal e borda com temperatura nula.

1. INTRODUÇÃO

O problema da transferência de calor no disco se mostra bastante interessante do ponto de vista matemático, pois além do envolvimento de coordenadas polares, aparecem as funções de Bessel não comuns em problemas de uma placa retangular, por exemplo. O conhecimento do comportamento dessas funções é de extrema importância para a solução deste problema, visto que se ganha tanto a análise quando $r \rightarrow 0$ quanto em relação ao tamanho do disco de raio $r = b$ através dos Zeros de Bessel. Falando especificamente das funções de Bessel, elas são obtidas a partir de uma equação diferencial de segunda ordem do tipo:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2)y = 0$$

cujas soluções de 1° e 2° espécies são dadas, respectivamente, por

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m} \text{ e } Y_m(x) = \frac{J_m(x) \cos m\pi - J_{-m}(x)}{\sin m\pi}.$$

Desse modo, sob o viés destas funções, pode-se chegar a resultados bastante concretos. Com ajuda do Software de álgebra computacional **Mathematica**, com a condição de simetria trigonal e borda com temperatura nula. A saber, tomando-se as $u_0(r, \theta) = J_3(\zeta_3 r) \cos(3\theta)$ e $u_0^*(r, \theta) = \sin(r) \sin(r-1) \cos(3\theta)$ como condições iniciais, obteremos a solução do problema.

Palavras chave. Modelagem Matemática, Separação de Variáveis, Funções de Bessel.

2. SITUAÇÃO PROBLEMA

O problema consiste uma placa circular de raio b , homogeneamente constituída de um material de difusividade térmica α . Considerando as condições de fronteira do disco $u(b, \theta, t) = 0$ e $u(r, \theta, t) = u\left(r, \theta + \frac{2n\pi}{3}, t\right)$, $n \in \mathbb{N}$ e $r < b$. Sob as seguintes condições iniciais descritas:

i)

$$u_0(r, \theta) = J_3(\zeta_3 r) \cos(3\theta)$$

ii)

$$u_0^*(r, \theta) = \sin(r) \sin(r - 1) \cos(3\theta)$$

Admitindo-se que este problema não possui fonte interna de calor pode-se dizer que a formulação do problema é dada por:

$$(1) \quad \alpha \nabla^2 u(r, \theta, t) = \frac{\partial u}{\partial t}$$

donde,

$$(2) \quad \nabla^2 u(r, \theta, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{r \partial r} + \frac{\partial^2 u}{r^2 \partial \theta^2}$$

Através desta formulação, pretende-se estudar o comportamento radial e angular da temperatura ao longo do tempo.

3. METODOLOGIA

De posse do método de separação de variáveis pode-se ter,

$$(3) \quad u(r, \theta, t) = f(r)\omega(\theta)g(t)$$

Podemos escrever a equação 1, da seguinte forma:

$$(4) \quad \frac{g'}{\alpha g} = \frac{f''}{f} + \frac{f'}{rf} + \frac{\omega''}{r^2 \omega} = -\lambda$$

Reescrendo a equação 4,

$$(5) \quad \frac{r^2}{f} \left(f'' + \frac{f'}{r} + \lambda f \right) = -\frac{\omega''}{\omega} = \mu$$

E assim resume-se o problema em resolver o sistema,

$$\begin{cases} g' + \alpha \lambda g = 0 \\ \omega'' + \mu \omega = 0 \\ r^2 f'' + r f' + (\lambda r^2 - \mu) f = 0 \end{cases}$$

Para a primeira equação, obtém-se a solução geral,

$$(6) \quad g(t) = c_1 e^{-\alpha t}$$

Para que se possa solucionar a segunda equação do sistema, tem-se os seguintes casos:

3.1. Caso 1. $\mu = 0$

Isso implica em:

$$(7) \quad \omega(\theta) = c_2 \theta + c_3 = \omega\left(\theta + \frac{2n\pi}{3}\right) = c_2\left(\theta + \frac{2n\pi}{3}\right) + c_3 = c_2 \theta + \frac{c_2 2n\pi}{3} + c_3$$

Portanto, $c_2 = 0$ e determina-se,

$$(8) \quad \omega(\theta) = c_3$$

3.2. Caso 2. $\mu = \beta^2 > 0$

$$\omega(\theta) = c_4 \cos \beta \theta + c_5 \sin \beta \theta = \omega\left(\theta + \frac{2n\pi}{3}\right)$$

Que equivalente a escrever:

$$\begin{aligned} \omega\left(\theta + \frac{2n\pi}{3}\right) &= c_4 (\cos(\beta\theta) \cos(\beta 2n\pi/3)\theta - \sin(\beta\theta) \sin(\beta 2n\pi/3)\theta) + \\ &+ c_5 (\sin(\beta\theta) \cos(\beta 2n\pi/3)\theta + \cos(\beta\theta) \sin(\beta 2n\pi/3)\theta) \end{aligned}$$

Igualando estas equações, obtém-se

$$\begin{cases} \cos \beta \frac{2n\pi}{3} = 1 \\ \sin \beta \frac{2n\pi}{3} = 0 \end{cases}$$

Portanto,

$$(9) \quad \beta \frac{2n\pi}{3} = 2k\pi \iff \beta = \frac{3k}{n}$$

Então:

$$(10) \quad \omega(\theta) = c_4 \cos \frac{3k}{n} \theta + c_5 \sin \frac{3k}{n} \theta$$

3.3. **Caso 3.** $\mu = -\beta^2 < 0$, pode-se escrever:

$$(11) \quad \omega(\theta) = c_6 e^{\beta\theta} + c_7 e^{-\beta\theta} = c_6 e^{\beta(\theta + \frac{2n\pi}{3})} + c_7 e^{-\beta(\theta + \frac{2n\pi}{3})}$$

Segue portanto que equação 11 é válida se $\beta = 0$ e assim $\mu = 0$ que é justamente o caso 1, já analisado anteriormente.

Finalmente vamos analisar a terceira equação do sistema com os seguintes casos:

3.4. **Caso 4.** $\mu = 0$ e $\lambda = 0$

A equação se tornará:

$$(12) \quad r^2 f'' + r f' = 0$$

Cuja solução geral é dada por:

$$(13) \quad f(r) = c_8 \ln r + c_9$$

Tomando $r = b$ tem-se:

$$(14) \quad f(b) = 0 = c_8 \ln b + c_9, \quad c_9 = -c_8 \ln b$$

Segue portanto,

$$(15) \quad f(r) = c_8 \ln \frac{r}{b}$$

3.5. **Caso 5.** $\lambda = 0$ e $\mu > 0$

Portanto a terceira equação do sistema se tornará:

$$(16) \quad r^2 f'' + r f' - \mu f = 0$$

Façamos uma análise da solução usando-se série de potência, definindo-se:

$$(17) \quad f(r) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i r^{i+j}$$

onde as respectivas derivadas são:

$$(18) \quad f'(r) = \sum_{i=0}^{\infty} (i+j) a_i r^{i+j-1}$$

$$(19) \quad f''(r) = \sum_{i=0}^{\infty} (i+j)(i+j-1) a_i r^{i+j-2}$$

Substituindo as equações 17, 18, 19 em 16 tem-se:

$$(20) \quad \sum_{i=0}^{\infty} a_i((i+j)^2 - \mu)r^{i+j} = 0$$

Logo $a_i = 0, \forall i = 1, 2, 3, \dots$

3.6. **Caso 6.** $\lambda = \gamma^2 > 0$ e $\mu = 0$

$$(21) \quad r^2 f'' + r f' + (\gamma r)^2 f = 0$$

Cuja solução é dada por:

$$(22) \quad f(r) = c_{10}J_0(\gamma r) + c_{11}Y_0(\gamma r)$$

Quando $r \rightarrow 0^+$ tem-se que $Y_0(\gamma r) \rightarrow -\infty$, logo:

$$(23) \quad f(r) = c_{10}J_0(\gamma r)$$

Como $f(b) = 0$, temos que $J_0(\gamma b) = 0$. Seja x_i alguma raiz de $J_0(\gamma b)$, tem-se:

$$\gamma_i = \frac{x_i}{b}$$

Portanto,

$$(24) \quad f(r) = c_{10}J_0\left(\frac{x_i r}{b}\right)$$

3.7. **Caso 7.** $\lambda = \gamma^2$ e $\mu = \left(\frac{3k}{n}\right)^2$

a solução dada por:

$$(25) \quad f(r) = c_{12}J_{\frac{3k}{n}}(\gamma r)$$

Novamente, fazendo-se $f(b) = 0$ e seja z_i a raiz de $J_{\frac{3k}{n}}(\gamma r)$ tem-se:

$$\gamma_i = \frac{z_i}{b}$$

A equação 25 se tornará:

$$(26) \quad f(r) = c_{12}J_{\frac{3k}{n}}\left(\frac{z_i r}{b}\right)$$

3.8. **Caso 8.** $\lambda = -\gamma^2$ e $\mu = 0$

Essa análise é análoga ao caso 6. A modificação geral se dá pela equação de Bessel modificada que nós representaremos por I_n . De fato a solução geral deste caso é dada por:

$$(27) \quad f(r) = c_{13} I_0 \left(\frac{s_i}{b} r \right)$$

Cujo s_i é raiz $I_0(\gamma r)$ em $r = b$

3.9. **Caso 9.** $\lambda = -\gamma^2$ e $\mu = \left(\frac{3k}{n}\right)^2$

análogo o caso 7 tem-se

$$(28) \quad f(r) = c_{14} I_{\frac{3k}{n}} \left(\frac{t_i}{b} r \right)$$

Agora finalmente aglomerando todas as soluções usando-se o fato de $u(\theta, r, t) = f(r)g(t)\omega(\theta)$, temos:

$$\begin{aligned} u(\theta, r, t) = & a_{0,0} \ln \frac{r}{b} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{0,i} J_0 \left(\frac{x_i r}{b} \right) e^{-\alpha t \left(\frac{x_i}{b} \right)^2} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{k,i} J_{\frac{3k}{n}} \left(\frac{z_i r}{b} \right) \cos \left(\frac{3k}{n} \theta \right) e^{-\alpha t \left(\frac{z_i}{b} \right)^2} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} b_{k,i} J_{\frac{3k}{n}} \left(\frac{z_i r}{b} \right) \sin \left(\frac{3k}{n} \theta \right) e^{-\alpha t \left(\frac{z_i}{b} \right)^2} + \sum_{i=1}^{\infty} c_{0,i} I_0 \left(\frac{s_i r}{b} \right) e^{\alpha t \left(\frac{s_i}{b} \right)^2} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} d_{k,i} I_{\frac{3k}{n}} \left(\frac{t_i r}{b} \right) \cos \left(\frac{3k}{n} \theta \right) e^{\alpha t \left(\frac{t_i}{b} \right)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} f_{k,i} I_{\frac{3k}{n}} \left(\frac{t_i r}{b} \right) \sin \left(\frac{3k}{n} \theta \right) e^{\alpha t \left(\frac{t_i}{b} \right)^2} \end{aligned}$$

Supondo $t = 0$ tem-se $u(r, \theta, 0) = u_0(r, \theta)$

Segue que:

$$\begin{aligned} u_0(\theta, r) = & a_{0,0} \ln \frac{r}{b} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{0,i} J_0 \left(\frac{x_i r}{b} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{k,i} J_{\frac{3k}{n}} \left(\frac{z_i r}{b} \right) \cos \left(\frac{3k}{n} \theta \right) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} b_{k,i} J_{\frac{3k}{n}} \left(\frac{z_i r}{b} \right) \sin \left(\frac{3k}{n} \theta \right) + \sum_{i=1}^{\infty} c_{0,i} I_0 \left(\frac{s_i r}{b} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} d_{k,i} I_{\frac{3k}{n}} \left(\frac{t_i r}{b} \right) \cos \left(\frac{3k}{n} \theta \right) \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} f_{k,i} I_{\frac{3k}{n}} \left(\frac{t_i r}{b} \right) \sin \left(\frac{3k}{n} \theta \right) \end{aligned}$$

4. **CONDIÇÃO** $u_0(r, \theta) = J_3(\zeta_3 r) \cos(3\theta)$

Dado que $u_0(r, \theta) = J_3(\zeta_3 r) \cos(3\theta)$ temos que:

$$(29) \quad u_0(r, \theta) = J_3(\zeta_3 r) \cos(3\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{k,i} J_{\frac{3k}{n}}\left(\frac{z_i}{b} r\right) \cos\left(\frac{3k}{n}\theta\right)$$

Façamos primeiro o caso $n = 1$ e fazendo $b = 1$ a equação 34 se tornará:

$$u_0(r, \theta) = J_3(\zeta_3 r) \cos(3\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{k,i} J_{3k}(z_i r) \cos(3k\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,1} J_{3k}(z_1 r) \cos(3k\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,2} J_{3k}(z_2 r) \cos(3k\theta) + \dots$$

Pela lei de formação de $u_0(r, \theta)$, toma-se o valor de $k = 1$ em cada somatório e portanto:

$$(30) \quad u_0(r, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{1,i} J_3(z_i r) \cos(3\theta)$$

Usando-se a ortogonalidade da função J podemos escrever:

$$(31) \quad a_{1,i} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^1 u_0(r, \theta) J_3(z_i r) \cos(3\theta) r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^1 [J_3(z_i r) \cos(3\theta)]^2 r dr d\theta}$$

5. **CONDIÇÃO** $u_0^*(r, \theta) = \sin(r) \sin(r - b) \cos(3\theta)$

De maneira análoga a seção anterior, tem-se

$$(32) \quad u_0^*(r, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{1,i} J_3(z_i r) \cos(3\theta) + \sum_{j=1}^{\infty} d_{1,j} I_{3k}(t_j r) \cos(3\theta)$$

Logo, como $t_j = 0$ é raiz única de I_3 , tem-se que $\sum_{j=1}^{\infty} d_{1,j} I_{3k}(t_j r) \cos(3\theta) = 0$.

Usando-se a ortogonalidade da função J pode-se escrever:

$$(33) \quad a_{1,i} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^1 u_0^*(r, \theta) J_3(z_i r) \cos(3\theta) r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^1 [J_3(z_i r) \cos(3\theta)]^2 r dr d\theta}$$

Portanto,

$$(34) \quad u(r, \theta, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^1 u_0^*(r, \theta) J_3(z_i r) \cos(3\theta) r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^1 [J_3(z_i r) \cos(3\theta)]^2 r dr d\theta} J_3(z_i r) \cos(3\theta) e^{-at(z_i)^2}$$

6. RESULTADOS OBTIDOS

Para uma modelagem computacional deste problema foi utilizado o Software **Mathematica** tendo como referência o alumínio cuja difusividade térmica $\alpha = 98,8 \frac{mm^2}{s}$ e raio $b = 1$. Tomando-se a condição $u_0(r, \theta) = J_3(\zeta_3 r) \cos(3\theta)$ foram obtidos os resultados mostrados na figura 1 considerando um tempo de 0 a 0,0002s com intervalos de $\Delta t = 0,00005s$ e escala para $u(r, \theta, t)$ entre $-0,5K$ e $0,5K$ representada no eixo vertical.

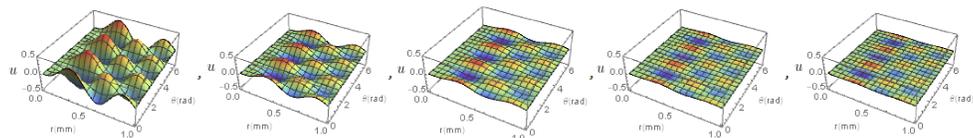


FIGURA 1. Evolução do perfil de temperatura da Placa

É importante notar que no instante inicial o perfil de $u(r, \theta, t)$ obedece a condição $J_3(\zeta_3 r) \cos(3\theta)$, e, portanto, é periódico. Dado que $u(b, \theta, t) = 0$, de certo o perfil de temperatura da placa irá convergir para 0 no regime permanente. É fato que tal resultado diante da boa difusividade térmica do alumínio tem convergência rápida e em pouco tempo como se vê a figura 1.

Por outro lado, na figura 2, tem-se um exemplo do perfil de temperatura no instante inicial para $\theta = 0$, ou seja $u(r, 0, 0)$. É importante notar que os valores máximos e mínimos da u correspondem as cores vermelho e azul na figura 1. Equanto a cor verde corresponde a uma faixa intermediária de temperatura.

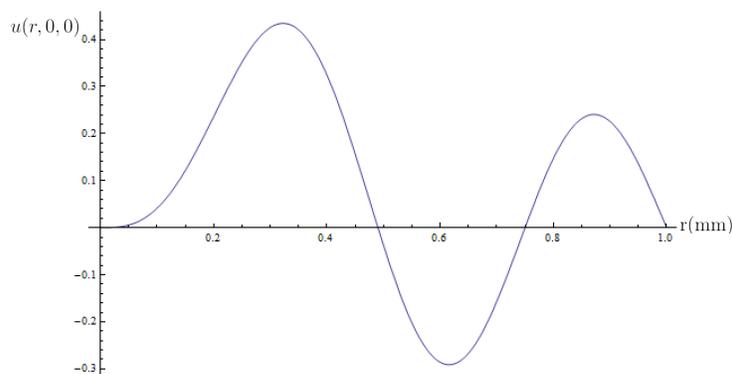


FIGURA 2. Perfil de temperatura $u(r, 0, 0)$

Na figura 3 encontra uma tabela de temperatura para $\theta = 0$. É importante notar a a convergência para 0 em todas as análises para diferentes raios sejam eles mais perto do centro ou mais afastados.

Cada resultado mostrado na tabela 4 foi definido para 20 termos da série de $u(r, \theta, t)$. Como teste aumentou-se para 40 termos e os resultados continuaram convergindo. Isso acontece pelo fato dos coeficientes da série de u serem muito pequenos quando $n \rightarrow \infty$ acarretando uma convergência para os valores da tabela.

$\theta = 0$	$t = 0$	$t = 0,00005s$	$t = 0,0001s$	$t = 0,00015s$	$t = 0,0002s$
$r = 0,1$	0,0412699	0,0178735	0,0077408	0,00335245	0,00145191
$r = 0,3$	0,425319	0,184201	0,0797753	0,0345497	0,0149631
$r = 0,5$	-0,0375571	-0,0162655	-0,00704442	-0,00305086	-0,00132129
$r = 0,7$	-0,157435	-0,0681833	-0,0295294	-0,0127888	-0,0055387
$r = 0,9$	0,22589	0,0978301	0,0423691	0,0183496	0,00794698

FIGURA 3. Tabela de Temperatura do disco em $\theta = 0$

Em seguida, para $u_0^*(r, \theta) = \sin(r) \sin(r-1) \cos(3\theta)$ a figura 4 tem-se a evolução de temperatura considerando a mesma placa de alumínio com raio $b = 1$. Foi analisado um tempo de 0 a 0,0008s com intervalos de $\Delta t = 0,00005s$.

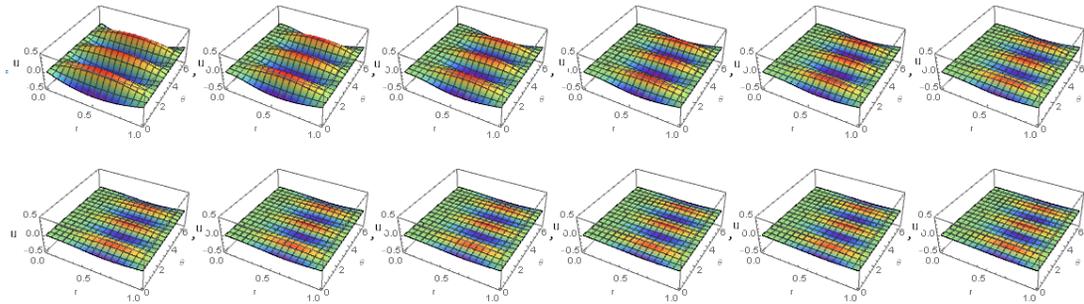


FIGURA 4. Evolução do mapa de Temperatura no tempo

É importante notar que, devido a $u_0^*(r, \theta)$, o mapa de temperatura na evolução temporal entrou em regime permanente em tempo superior ao analisado em u_0 . Novamente os trechos de temperatura vermelha e azul representam, respectivamente, as máximas e mínimas de u , enquanto a cor verde, representa uma faixa intermediária. A figura 5 representa um exemplo de perfil de temperatura no instante inicial para $\theta = \frac{\pi}{3}$.

A convergência de temperaturas para o ângulo de $\frac{\pi}{3}$ são verificadas na figura 6. Todas as temperaturas calculadas são para os 20 primeiros termos da série de u . Aumentando-se a quantidade de termos para 40, os resultados mostraram uma convergência para os valores desta figura. De fato, cada coeficiente da série converge para 0 e, portanto, os valores de temperatura convergem para esta tabela.

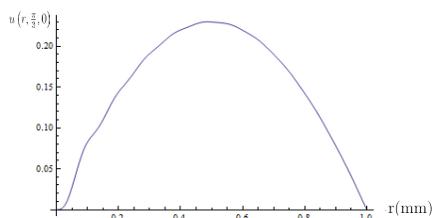


FIGURA 5. Perfil de temperatura para $u\left(r, \frac{\pi}{3}, 0\right)$

$\theta = \frac{\pi}{3}$	$t = 0s$	$t = 0,00005s$	$t = 0,0002s$	$t = 0,00015s$	$t = 0,0002s$
$r = 0,1$	0.08264787544	0.010062918410	0.004738020210	0.002884333192	0.001960508046
$r = 0,3$	0.190897	0.114705	0.0739043	0.051251	0.0373494
$r = 0,5$	0.229679	0.18311	0.144567	0.114001	0.090252
$r = 0,7$	0.19009	0.162463	0.137154	0.114781	0.0954223
$r = 0,9$	0.0780473	0.0649174	0.0547787	0.046334	0.0390918

FIGURA 6. Evolução da Temperatura no tempo para $\theta = \frac{\pi}{3}$

7. CONCLUSÃO

Verifica-se então, que o mapa de temperatura no disco com bordo nulo é bastante influenciado pela função $u_0(r, \theta)$ dada. De fato, para $u_0(r, \theta) = J_3(\zeta_3 r) \cos(3\theta)$, a função de Bessel exerce grande influência na convergência mais rápida em comparação a $u_0^*(r, \theta) = \sin(r) \sin(r-1) \cos(3\theta)$. Com a implementação computacional do problema foi possível verificar que essa convergência mais rápida foi decorrência de cada coeficiente da série ser da ordem de 10^{-16} .

No entanto, o alumínio precisa ser citado pelo fato de ter uma alta condutividade térmica. Mesmo com convergência diferente para as condições apontadas no problema, vê-se de fato uma boa convergência para ambos os métodos. Abre-se a possibilidade para trabalhos futuros, comparar convergência de temperatura para diferentes materiais acrescentando fonte térmica interna, modificando a solução da EDP original.

8. REFERÊNCIAS

- ZILL, D.G; CULLEN M.R. **Matemática Avançada para Engenharia**.3.ed. Porto Alegre, Bookman, 2009.
- DELYRA, JORGE L. **Funções de Bessel**

INSTITUTO FEDERAL FLUMINENSE - CENTRO
 RUA DR. SIQUEIRA, 273, PQ. DOM BOSCO
 CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
 Email address: cleuber.silva30@gmail.com,

SOBRE A INTEGRABILIDADE DE FORMAS PFAFFIANAS NO \mathbb{R}^n

PEDRO F. DA SILVA JÚNIOR

RESUMO. Este artigo detalha as condições menos conhecidas no \mathbb{R}^n para a integrabilidade das formas pfaffianas, ou 1-formas. É dada ênfase na localidade de tais condições e são fornecidas provas, com alguns detalhes adicionais, dos teoremas devidos a Clairaut e Carathéodory. Considerando a importância da integrabilidade das formas pfaffianas, em particular na física-matemática, este artigo mostra que: existe um conteúdo oculto no teorema de Carathéodory no sentido de uma integrabilidade global.

1. INTRODUÇÃO

As formas pfaffianas são um caso particular de formas diferenciais: as *1-formas*. O tratamento deste assunto através de formas diferenciais, incluindo a utilização de álgebra exterior e de variedades diferenciáveis mais gerais do que o \mathbb{R}^n , ultrapassa o escopo deste artigo¹. O estudo das formas pfaffianas tem relevância teórica e prática em si mesmo, particularmente, na física-matemática [3, 4].

Este artigo tem dois objetivos principais. O primeiro é apresentar ao leitor, com algum detalhe, as condições menos conhecidas para a integrabilidade das formas pfaffianas no \mathbb{R}^n , as quais têm um caráter *local* e raramente aparecem em livros de equações diferenciais e formas diferenciais. O segundo é discutir a possibilidade e obtenção de um critério de integrabilidade *global* para as formas pfaffianas. O Teorema de Frobenius não se enquadra no roteiro proposto para este trabalho e, por isso, será omitido. A exceção é um breve comentário na seção 4.

Bem, primeiro estudadas por Clairaut, Fontaine, e Euler, de acordo com Katz [5], as formas pfaffianas foram assim nomeadas em honra a Pfaff, que entre 1814

Data de aceitação: 1 de outubro de 2019.

Palavras chave. Formas pfaffianas, integrabilidade de formas pfaffianas, teorema de Carathéodory.

¹Para o leitor interessado numa abordagem extensiva do assunto através de formas diferenciais sugerimos a consulta do livro de Flanders [1], para uma exposição aplicada em física, ou do livro de Morita [2], para uma com foco em matemática pura.

e 1815, tratou do assunto em mais detalhes [6]. Mais tarde, matemáticos notáveis expandiram o trabalho de Pfaff, com destaque para Frobenius [7] e Cartan [8].

Uma forma adequada de aqui definirmos formas pfaffianas é semelhante a como faz Morita [2].

Definição 1.1. (Forma pfaffiana). *Seja uma coleção de n variáveis independentes x_1, x_2, \dots, x_n no \mathbb{R}^n , e uma coleção de n funções $F_i = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de classe C^∞ em um conjunto aberto $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Para os objetos $\delta\xi$,*

$$\delta\xi = \sum_{i=1}^n F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i,$$

definidos em B , com $\delta\xi$ representando o infinitésimo de uma certa quantidade finita ξ em B , damos o nome de formas pfaffianas em n variáveis.

Doravante quando nos referirmos a uma forma pfaffiana genérica estaremos nos baseando em uma forma pfaffiana $\delta\xi$, cujos parâmetros são exemplificados a partir da Definição 1.1. Agora, uma forma pfaffiana pode, ou não, remeter ao que chamamos de diferencial de uma função. Quando uma forma pfaffiana $\delta\xi$ não possui as funções F_i identificadas como as derivadas parciais de uma função $\xi = \xi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ com relação as respectivas variáveis x_i , ($F_i = \partial\xi/\partial x_i$), então ela não representa o diferencial de uma tal função ξ e chamamos $\delta\xi$ de diferencial inexata. Ou seja, nesse caso, a quantidade $\delta\xi$ representa apenas o infinitésimo de uma certa quantidade finita ξ , e ξ não é uma função das n variáveis independentes x_i no sentido de $\xi = \xi(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Do contrário, se a forma pfaffiana $\delta\xi$ possuir as funções F_i identificadas como as derivadas parciais de uma função $\xi = \xi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ com relação as respectivas variáveis x_i , ($F_i = \partial\xi/\partial x_i$), então ela é o diferencial de uma tal função ξ , de fato existente. Além disso, nesse caso, também chamamos $\delta\xi$ de diferencial exata e substituímos, na simbologia da sua designação, o símbolo δ pelo habitual símbolo d , tradicionalmente utilizado para designar o infinitésimo de uma quantidade que é uma função ordinária.

Ocorre que, em alguns casos, mesmo que a forma pfaffiana $\delta\xi$ seja uma diferencial inexata, ela pode ser identificada como o resultado do produto de uma função $\mu = \mu(x_1, x_2, \dots, x_n)$ com uma diferencial exata $d\psi$, onde ψ é uma função das n variáveis independentes x_1, x_2, \dots, x_n , em termos de $\psi = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Isto é, existindo μ , e sendo $\mu(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$, em um conjunto aberto A , onde $A \subseteq B$, segue que a quantidade $\delta\xi/\mu$ será uma diferencial exata $d\psi$ em A . Quando isso acontece dizemos que $\delta\xi$ é integrável em A , e chamamos a função μ^{-1} de fator integrante de $\delta\xi$. Além disso, dada a suavidade das funções F_i em todo B , para a discussão da integrabilidade queremos assumir também que as formas pfaffianas sejam *não-singulares* em B ; i.e., não identicamente nulas em todo B .

Definição 1.2. (Forma pfaffiana integrável). *Seja $\delta\xi$ uma forma pfaffiana não-singular. Se existirem funções $\mu = \mu(x_1, x_2, \dots, x_n)$, com $\mu(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$, e $\psi = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tais que*

$$\delta\xi = \mu d\psi,$$

em um aberto $A \subseteq B$, então $\delta\xi$ é dita ser integrável em A . Ainda, a função μ^{-1} é chamada de fator integrante de $\delta\xi$.

Naturalmente, pela Definição 1.2, toda $\delta\xi$ tal que $\delta\xi = d\xi$ é integrável. Para continuarmos a nossa discussão precisamos mencionar a importante situação que ocorre nos caminhos em B tais que uma forma pfaffiana se anula, onde obtemos a chamada equação de Pfaff associada a essa forma pfaffiana.

Definição 1.3. (Equação de Pfaff). *A equação de Pfaff associada a forma pfaffiana $\delta\xi$ é*

$$\delta\xi = 0.$$

É muito importante ser dito que uma equação de Pfaff *não* diz que $\delta\xi$ é identicamente nula em B ; essa equação diz em quais *caminhos* de B a equação $\delta\xi = 0$ tem solução². Em seguida, para buscar mais familiaridade com a ideia de formas pfaffianas integráveis, vamos buscar analisar as soluções das equações de Pfaff a elas associadas.

Definição 1.4. (Equação de Pfaff Exata e Integrável). *A equação de Pfaff associada a forma pfaffiana $\delta\xi$,*

$$\delta\xi = 0,$$

é chamada exata se, e somente se, $\delta\xi$ for uma diferencial exata, $\delta\xi = d\xi$; se, e somente se, a forma pfaffiana $\delta\xi$ for integrável, a equação de Pfaff associada é chamada de integrável.

Se $\delta\xi$ for uma forma pfaffiana que constitui uma diferencial exata, então $\delta\xi = d\xi$ e a equação de Pfaff associada $d\xi = 0$ possui como solução $\xi = \xi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{constante}$, o que se trata geometricamente de uma hipersuperfície de dimensão $n - 1$ em B .

Por outro lado, se $\delta\xi$ for uma forma pfaffiana que é uma diferencial inexata, porém, integrável, então $\delta\xi = 0$ ocorre nos mesmos caminhos em que $d\psi = 0$, i.e., onde $\delta\xi = \mu d\psi$ vale, conforme a Definição 1.2. Nessa situação, a solução de $\delta\xi = 0$ é $\psi = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{constante}$, o que define uma hipersuperfície de dimensão $n - 1$, agora, em A . Naturalmente, se $\delta\xi$ for uma forma pfaffiana não integrável, então a solução da equação $\delta\xi = 0$ não precisa delimitar nenhum objeto geométrico restringido a $n - 1$ dimensões como nos casos anteriores.

Isto posto, já podemos realizar a pergunta principal: em quais situações uma forma pfaffiana é integrável? As seções 2 e 3 nos dão essa resposta.

2. INTEGRABILIDADE LOCAL

Esta seção trata das condições de integrabilidade que possuem caráter *local* para as formas pfaffianas; i.e., condições que, quando satisfeitas, o são restritamente a

²Isso pode ser exemplificado com alguns usos das equações de Pfaff na física. Na Mecânica Analítica, os *vínculos* mecânicos são frequentemente modeladas por uma equação de Pfaff [9], e na Termodinâmica Clássica a representação usual de um *processo infinitesimal* adiabático $\delta Q = 0$ é precisamente a equação de Pfaff da forma pfaffiana *calor*, δQ [10].

alguma vizinhança M contida em B , em torno de um algum ponto p de B . Isso ficará mais claro na seção 3, onde discutiremos condições para uma integrabilidade *global*. Por ora, é interessante que uma definição para a integrabilidade local seja formalizada.

Definição 2.1. (Integrabilidade local). *Se a forma pfaffiana $\delta\xi$ não-singular é integrável restritamente a alguma vizinhança $M \subset B$ de todo ponto $p \in B$, dizemos que $\delta\xi$ é localmente integrável em B .*

Vamos discutir primeiro os casos mais simples para a integrabilidade local: os de formas pfaffianas em duas e em três variáveis.

2.1. Formas pfaffianas em duas e em três variáveis. Para evitar repetições desnecessárias, daqui em diante passaremos a assumir apenas formas pfaffianas *não-singulares*. De acordo com a Definição 1.2, seja uma forma pfaffiana $\delta\xi$ em duas variáveis, x_1 e x_2 :

$$(1) \quad \delta\xi = F_1(x_1, x_2)dx_1 + F_2(x_1, x_2)dx_2.$$

A respectiva equação de Pfaff associada a forma pfaffiana da expressão (1), é,

$$(2) \quad F_1(x_1, x_2)dx_1 + F_2(x_1, x_2)dx_2 = 0,$$

a qual define a seguinte equação diferencial ordinária de primeira ordem,

$$(3) \quad \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{F_1(x_1, x_2)}{F_2(x_1, x_2)} \equiv f(x_1, x_2),$$

onde $x_2 = x_2(x_1)$. Agora, pelo Teorema da Existência e Unicidade para equações diferenciais ordinárias³, se forem $f(x_1, x_2)$ e $\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2$ contínuas no aberto B , dado algum ponto $p = (x_1^0, x_2^0) \in B \subseteq \mathbb{R}^2$, existe então em B uma única curva $\psi(x_1, x_2(x_1)) = \text{constante}$, parametrizada por x_1 , que fornece a função $x_2 = x_2(x_1)$ solução da equação (3), tal que satisfaz $x_2^0 = x_2(x_1^0)$ em algum intervalo aberto I contendo x_1^0 . Garantimos que as funções $F_1(x_1, x_2)$ e $F_2(x_1, x_2)$ são C^∞ em B por definição, e devemos assumir aqui que também são, por construção, não-nulas em B , dada a arbitrariedade gerada por montarmos a equação (3) de modo que $x_2 = x_2(x_1)$, ao invés de $x_1 = x_1(x_2)$. Do contrário, por essa arbitrariedade, poderia ser $\delta\xi$ identicamente nula, ou indeterminada. Estas colocações permitem o uso deste teorema para a equação (3). Com isso em mente, estamos aptos a tratar de um dos mais importantes teoremas da teoria da integrabilidade das formas pfaffianas.

Teorema 1. *Toda forma pfaffiana em duas variáveis em um aberto B é localmente integrável em B .*

³Atenção despendida para enunciar formalmente esse teorema é redundante ao propósito deste artigo. Para maiores detalhes desse teorema fundamental sugerimos a leitura do livro de Coddington e Levinson [11].

Demonstração. Toda equação de Pfaff de uma forma pfaffiana em duas variáveis, sendo essa equação exata ou não, define uma equação diferencial ordinária de primeira ordem como a equação (3) que garante, pelo Teorema da Existência e Unicidade, ao menos *localmente*, a existência de uma única curva solução $\psi(x_1, x_2(x_1)) = \text{constante}$. Considere $d\psi$ em um aberto $B \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$(4) \quad d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2} dx_2 = 0.$$

Observe que a equação (4) descreve as mesmas curvas $x_2 = x_2(x_1)$ que a equação (3). Substituindo então a equação (3) na equação (4), nós temos:

$$(5) \quad d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x_1} dx_1 - \frac{F_1(x_1, x_2)}{F_2(x_1, x_2)} \frac{\partial\psi}{\partial x_2} dx_1 = 0.$$

Reorganizando a equação (5), e em vista da Definição 1.2, somos convidados a definir a função $\mu = \mu(x_1, x_2)$, claramente não nula, dada por,

$$(6) \quad \mu(x_1, x_2)^{-1} \equiv \frac{1}{F_1(x_1, x_2)} \frac{\partial\psi}{\partial x_1} = \frac{1}{F_2(x_1, x_2)} \frac{\partial\psi}{\partial x_2},$$

de onde imediatamente segue que:

$$(7) \quad \mu d\psi = F_1(x_1, x_2) dx_1 + F_2(x_1, x_2) dx_2 = \delta\xi.$$

□

Outra prova para o Teorema 1 pode ser encontrada em [12]. No estudo da integrabilidade de uma forma pfaffiana $\delta\xi$ em três variáveis, x_1 , x_2 e x_3 ,

$$(8) \quad \delta\xi = F_1(x_1, x_2, x_3) dx_1 + F_2(x_1, x_2, x_3) dx_2 + F_3(x_1, x_2, x_3) dx_3,$$

é mais pertinente o uso da notação vetorial: $\mathbf{F} \equiv (F_1, F_2, F_3)$, $d\mathbf{r} \equiv (dx_1, dx_2, dx_3)$. Assim, $\delta\xi$ e a sua equação de Pfaff associada são representadas por, respectivamente: $\delta\xi = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ e $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$. Em um conjunto aberto, a verificação da seguinte equação é necessária e suficiente para a integrabilidade da forma pfaffiana em questão:

$$(9) \quad \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{F} = 0.$$

A afirmação anterior é um teorema. A prova deste resultado usando dos meios discutidos até agora é longa, em particular se a equação (9) é suficiente para a integrabilidade, e por isso será omitida neste artigo. Adiante, quando tratarmos da integrabilidade de formas pfaffianas em um número qualquer de variáveis, a demonstração da condição (9) para o caso de três variáveis será imediatamente recuperada. Um fato a ser destacado agora é que na demonstração da condição de integrabilidade (9) se faz uso do Teorema 1 para a conclusão da integrabilidade das formas pfaffianas em três variáveis [13]. Como previamente discutido, o Teorema 1 possui caráter exclusivamente *local*. O resultado disso é que a condição (9) garante

a integrabilidade de formas pfaffianas em três variáveis também apenas *localmente*, para um aberto $B \subseteq \mathbb{R}^3$ apropriado.

Teorema 2. *Uma forma pfaffiana em três variáveis em um aberto B é localmente integrável em B se, e somente se, $\mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{F} = 0$ em B .*

Demonstração. Observando o Teorema 1, veja o Capítulo 1 do Livro de Sneddon [13].

Entretanto, não é difícil de ver que a equação (9) é uma condição necessária para a integrabilidade de uma forma pfaffiana em três variáveis. Vejamos, adotando a notação vetorial dada após (8), do Cálculo Vetorial tiramos que se $\nabla \times \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ então $\delta\xi$ é uma diferencial inexata, graças ao Teorema de Schwarz. Para que $\delta\xi$ seja integrável é preciso então que exista uma função μ tal que $\nabla \times (\mu^{-1}\mathbf{F}) = \mathbf{0}$. Ou seja,

$$(10) \quad \mu^{-1}\nabla \times \mathbf{F} + \nabla(\mu^{-1}) \times \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Multiplicando escalarmente (10) por \mathbf{F} , obtemos que a condição procurada é:

$$(11) \quad \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{F} = 0.$$

Para formas pfaffianas em n variáveis, começamos por encontrar uma condição necessária para a integrabilidade que generaliza (11).

2.2. Formas pfaffianas em n variáveis. Os importantes primeiros resultados que seguem foram inicialmente [5] obtidos por Clairaut.

Lema 1. *Uma condição necessária à integrabilidade de uma forma pfaffiana em n variáveis é que \mathfrak{R}_{ijk} ,*

$$\mathfrak{R}_{ijk} \equiv F_i \left[\frac{\partial F_k}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial x_k} \right] + F_j \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_k} - \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \right] + F_k \left[\frac{\partial F_j}{\partial x_i} - \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right],$$

se anule, para quaisquer i, j, k .

Demonstração. Começamos escrevendo uma forma pfaffiana $\delta\xi$ em n variáveis, x_1, x_2, \dots, x_n :

$$(12) \quad \delta\xi = \sum_{i=1}^n F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i.$$

Da Definição 1.2, se $\delta\xi$ é integrável, então existem funções μ e ψ que, nas condições apropriadas, satisfazem $\delta\xi = \mu d\psi$. Disso vem que, para cada i :

$$(13) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = \frac{1}{\mu} F_i.$$

Agora, se derivarmos a equação (13) com relação a alguma outra variável, a saber x_j , teremos,

$$(14) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial \mu^{-1}}{\partial x_j} F_i + \mu^{-1} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}.$$

Pelo Teorema de Schwarz, $\partial^2 \psi / \partial x_j \partial x_i = \partial^2 \psi / \partial x_i \partial x_j$, logo,

$$(15) \quad \frac{\partial \mu^{-1}}{\partial x_i} F_j + \mu^{-1} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \mu^{-1}}{\partial x_j} F_i + \mu^{-1} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}.$$

Reagrupando (15) e multiplicando toda a equação por μ ,

$$(16) \quad \frac{\partial F_j}{\partial x_i} - \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \mu F_i \frac{\partial \mu^{-1}}{\partial x_j} - \mu F_j \frac{\partial \mu^{-1}}{\partial x_i}.$$

Em comparação com a condição (11) para três variáveis, o lado esquerdo de (16) nos convida a procurar meios de anulá-lo e, assim, obtermos uma condição de integrabilidade que dependa apenas das derivadas das funções F_i . Isso ocorre se multiplicarmos (16) por uma outra função F_k , e então somarmos ciclicamente termos análogos a $F_k[\partial F_j / \partial x_i - \partial F_i / \partial x_j]$ de modo que,

$$(17) \quad \mathfrak{R}_{ijk} \equiv F_i \left[\frac{\partial F_k}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial x_k} \right] + F_j \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_k} - \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \right] + F_k \left[\frac{\partial F_j}{\partial x_i} - \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right] = 0,$$

porque os termos do lado direito de (16) se cancelam com os termos análogos quando nós os adicionamos. \square

Imediatamente se vê a recuperação da condição (11) ao fixarmos $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ em (17). A recíproca do Lema 1 é válida, ao menos *localmente*. Para mostrar isso, primeiro precisamos observar que: se a quantidade \mathfrak{R}_{ijk} é nula em uma coleção de variáveis, permanecerá nula por uma mudança de variáveis.

Lema 2. *A nulidade de \mathfrak{R}_{ijk} é invariante por uma mudança de variáveis.*

Demonstração. Seja uma forma pfaffiana $\delta\xi$ em n variáveis x_1, x_2, \dots, x_n tal que sofra uma mudança de variáveis para novas n variáveis $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$. O diferencial de uma variável $x_i = x_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ é, então:

$$(18) \quad dx_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j} d\bar{x}_j.$$

A forma pfaffiana $\delta\xi$ pode ser representada em ambas as coleções de variáveis, com as respectivas funções associadas. Logo,

$$(19) \quad \delta\xi = \sum_{i=1}^n F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i = \sum_{j=1}^n \bar{F}_j(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) d\bar{x}_j,$$

onde, substituindo (18) em (19), obtemos:

$$(20) \quad \bar{F}_j(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j} F_i(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Suprimindo a dependência explícita com as variáveis, por (17), na coleção das novas variáveis, a quantidade $\bar{\mathfrak{R}}_{ijk}$ é:

$$(21) \quad \bar{F}_i \left[\frac{\partial \bar{F}_k}{\partial \bar{x}_j} - \frac{\partial \bar{F}_j}{\partial \bar{x}_k} \right] + \bar{F}_j \left[\frac{\partial \bar{F}_i}{\partial \bar{x}_k} - \frac{\partial \bar{F}_k}{\partial \bar{x}_i} \right] + \bar{F}_k \left[\frac{\partial \bar{F}_j}{\partial \bar{x}_i} - \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial \bar{x}_j} \right].$$

Vamos analisar inicialmente apenas o segundo termo de (21), substituindo assim apropriadamente as novas funções dadas em (20). Fazendo isso,

$$(22) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j} F_i \left[\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial F_k}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_k} - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_k} \frac{\partial F_j}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_i} \right],$$

vemos que obtemos um termo proporcional ao primeiro termo de \mathfrak{R}_{ijk} , uma vez que as derivadas parciais de segunda ordem nas variáveis somem, pelo Teorema de Schwarz. Repetindo o mesmo para os termos restantes de (21), temos que:

$$(23) \quad \bar{\mathfrak{R}}_{ijk} = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_k} \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_i} \right] \mathfrak{R}_{ijk}.$$

Logo, se $\mathfrak{R}_{ijk} = 0$, então, $\bar{\mathfrak{R}}_{ijk} = 0$. □

Teorema 3. *Uma condição suficiente à integrabilidade local de uma forma pfaiana em n variáveis, em um aberto B , é que \mathfrak{R}_{ijk} se anule, para quaisquer i, j, k .*

Demonstração. Apresentaremos uma prova via indução finita que, inicialmente, busca mostrar que a condição $\mathfrak{R}_{ijk} = 0$, para quaisquer i, j, k , é suficiente para a integrabilidade. Disso virá que o máximo que podemos afirmar sobre tal condição é que, de fato, ela é suficiente a uma integrabilidade *local*, apenas.

Para uma forma pfaiana em uma variável, x_1 , por construção, fica evidente que $\delta\xi$ é sempre integrável. Já para uma forma pfaiana em n variáveis,

$$(24) \quad \delta\xi = \sum_{i=1}^n F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i,$$

supomos que $\mathfrak{R}_{ijk} = 0$, para quaisquer i, j, k . Em seguida, escolhemos examinar $\delta\xi$ por um caminho em um aberto $B \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $dx_n = 0$. A forma pfaiana que resulta de fixarmos o valor da variável x_n em (24), é,

$$(25) \quad \delta\eta = \sum_{i=1}^{n-1} F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i,$$

de forma que naturalmente $\mathfrak{R}_{ijk} = 0$ permanece inalterada em (25), como a hipótese de indução, uma vez que a nulidade dessa quantidade não muda por fixarmos uma variável. Supomos então que $\delta\eta$ é integrável, sob a circunstância $\mathfrak{R}_{ijk} = 0$, para quaisquer i, j, k diferentes de n em B . Por conta disso, devem existir funções λ , com $\lambda(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \neq 0$, e $\sigma = \sigma(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, em algum aberto $A \subseteq B$, tais que:

$$(26) \quad \delta\eta = \lambda d\sigma = \lambda \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} dx_i.$$

Agora, deixando x_n variar, podemos reescrever $\delta\xi$ em função de $\delta\eta$, com $\delta\eta$ integrável por hipótese, como colocamos. Isto é,

$$(27) \quad \delta\xi = \lambda d\sigma + F_n dx_n,$$

onde, uma vez que $\delta\xi$ é uma forma pfaffiana em n variáveis, escrever (27) equivale a uma mudança de variáveis em $\delta\xi$, das variáveis x_1, x_2, \dots, x_n , para certas novas variáveis $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-2}, \sigma, x_n$. Nessa nova coleção de variáveis ocorre que $\bar{F}_i = 0$, para todo $i = \{1, 2, \dots, n-2\}$. Do Lema 2, a hipótese da nulidade de \mathfrak{R}_{ijk} permanece para a nova coleção de variáveis. Novamente, essa relação se preserva ao examinarmos apenas a coleção de variáveis $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-2}$. Explicitamente,

$$(28) \quad \bar{\mathfrak{R}}_{ijk} = \lambda \frac{\partial F_n}{\partial \bar{x}_i} - F_n \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{x}_i} = 0,$$

e obtemos que, nas variáveis $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-2}, \sigma, x_n$, o quociente F_n/λ deve depender unicamente de σ e x_n . Com $\lambda \neq 0$, podemos reescrever (27) como:

$$(29) \quad \delta\xi = \lambda \left(d\sigma + \frac{F_n}{\lambda} dx_n \right),$$

O termo em parênteses em (29) é uma forma pfaffiana em duas variáveis, que é, pelo Teorema 1, localmente integrável. Portanto, existem funções μ e ψ , tais que,

$$(30) \quad \delta\xi = \lambda \mu d\psi,$$

nas condições apropriadas, e assim $\delta\xi$ é localmente integrável em B . \square

Apresentaremos agora um último resultado. Originalmente obtido na formalização da Termodinâmica Clássica de C. Carathéodory em 1909 [14], e provavelmente figurando como o critério para integrabilidade das formas pfaffianas mais ausente nos livros didáticos de equações diferenciais desde então. Esta é uma verificação que fornece a integrabilidade local de uma forma pfaffiana a partir de uma condição topológica do conjunto B ao qual reside a forma pfaffiana em questão. A prova desse teorema é apresentada aqui com um pouco mais de detalhes do que nas obras que primeiro a investigaram [15, 16], após a prova original de Carathéodory [14].

Teorema 4. (Teorema de Carathéodory). *Uma condição necessária e suficiente à integrabilidade local de uma forma pfaffiana $\delta\xi$ em n variáveis em um aberto B , é que em toda vizinhança $M \subset B$ arbitrariamente próxima de um ponto qualquer $p \in B$ existam pontos inatingíveis desde p pelas curvas tais que $\delta\xi = 0$.*

Demonstração [15]. Sejam a forma pfaffiana $\delta\xi$ em n variáveis, num aberto $B \subseteq \mathbb{R}^n$, e $p = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, $q = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, $r = (x_1^{**}, x_2^{**}, \dots, x_n^{**})$ pontos de B . Sejam as curvas γ_1 e γ_2 em B , suaves, parametrizadas por um parâmetro t ,

$$(31a) \quad \gamma_1(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)) \equiv (f_i(t)),$$

$$(31b) \quad \gamma_2(t) = (f_1(t) + \nu g_1(t), f_2(t) + \nu g_2(t), \dots, f_n(t) + \nu g_n(t)) \equiv (f_i(t) + \nu g_i(t)),$$

com ν real, tais que $\delta\xi = 0$, com as seguintes condições, respectivamente,

$$(32a) \quad \gamma_1(t_0) = p, \quad \gamma_1(t_*) = q,$$

$$(32b) \quad \gamma_2(t_0) = p, \quad \gamma_2(t_{**}) = r,$$

onde $t_0 < t_* < t_{**}$, com $|t_* - t_0| < \epsilon_1$ e $|t_{**} - t_*| < \epsilon_2$, para ϵ_1 e ϵ_2 arbitrariamente pequenos. Com um ν suficientemente pequeno, nosso objetivo é examinar a situação $\epsilon_2 \rightarrow 0$. A equação de Pfaff a qual γ_2 é solução se dá por,

$$(33) \quad \begin{aligned} & \sum_{i=1}^n F_i(f_i(t) + \nu g_i(t)) d(f_i(t) + \nu g_i(t)) = 0 \\ & = \sum_{i=1}^n F_i(f_i(t) + \nu g_i(t)) [\dot{f}_i(t) + \nu \dot{g}_i(t)], \end{aligned}$$

com $df_i(t)/dt \equiv \dot{f}_i(t)$, $dg_i(t)/dt \equiv \dot{g}_i(t)$. Derivando (33) por ν , em $\nu = 0$,

$$(34) \quad \sum_{i=1}^n F_i(f_i(t)) \dot{g}_i(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i(f_i(t))}{\partial x_j} \dot{f}_i(t) g_j(t) = 0,$$

ou

$$(35) \quad \sum_{i=1}^n F_i(f_i(t)) \dot{g}_i(t) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i(f_i(t))}{\partial x_j} \dot{f}_i(t) g_j(t).$$

A equação (35) é equivalente a escolhermos $n - 1$ das funções $g_j(t)$ de maneira arbitrária e a n -ésima asseguramos obedecer (35). Seja então essa n -ésima função $g_k(t)$, de modo que, isolando os termos de índice k , temos:

$$(36) \quad F_k(f_l(t))\dot{g}_k(t) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{\partial F_i(f_l(t))}{\partial x_k} \dot{f}_i(t)g_k(t) = \\ - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n F_j(f_l(t))\dot{g}_j(t) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{\partial F_i(f_l(t))}{\partial x_j} \dot{f}_i(t)g_j(t).$$

A função $g_k(t)$ então se torna o objeto a ser estudado se fazemos $\epsilon_2 \rightarrow 0$. O lado esquerdo de (36) é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem linear em $g_k(t)$, logo, pelo método de Leibniz do fator integrante, seja a função $\eta = \eta(t)$, não nula, tal que:

$$(37) \quad \frac{d(\eta(t)F_k(f_l(t))g_k(t))}{dt} = \eta(t) \left[F_k(f_l(t))\dot{g}_k(t) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{\partial F_i(f_l(t))}{\partial x_k} \dot{f}_i(t)g_k(t) \right].$$

Desenvolvendo o lado esquerdo de (37):

$$(38) \quad \frac{d(\eta(t)F_k(f_l(t))g_k(t))}{dt} \\ = \eta(t)F_k(f_l(t))\dot{g}_k(t) + \eta(t) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{\partial F_k(f_l(t))}{\partial x_i} \dot{f}_i(t)g_k(t) + \dot{\eta}(t)F_k(f_l(t))g_k(t),$$

e com a comparação entre (37) e (38) segue,

$$(39) \quad \dot{\eta}(t)F_k(f_l(t)) = \eta(t)\dot{f}_i(t) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \left[\frac{\partial F_i(f_l(t))}{\partial x_k} - \frac{\partial F_k(f_l(t))}{\partial x_i} \right].$$

Agora, perpetuando o método de Leibniz e multiplicando os dois lados de (36) por $\eta(t)$, usando (38) e (39), podemos isolar $g_k(t)$ pela integração do lado esquerdo de (37), o que se revela ser igual ao lado direito de (36) quando multiplicamos o último por $\eta(t)$. Temos então:

$$(40) \quad \eta(t')F_k(f_l(t'))g_k(t') = - \int_{t_0}^{t'} \eta(t) \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n F_j(f_l(t))\dot{g}_j(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{\partial F_i(f_l(t))}{\partial x_j} \dot{f}_i(t)g_j(t) \right] dt,$$

onde $g_i(t_0) = 0$ para todo i , pelas condições (32). Integrando por partes o primeiro termo no integrando de (40), usando (39) e novamente que $g_i(t_0) = 0$, obtemos diretamente:

$$(41) \quad - \int_{t_0}^{t'} \eta(t) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n F_j(f_l(t)) \dot{g}_j(t) dt = -\eta(t') \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n F_j(f_l(t')) g_j(t')$$

$$+ \int_{t_0}^{t'} \eta(t) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \dot{f}_i(t) g_j(t) \left(\frac{F_j(f_l(t))}{F_k(f_l(t))} \left[\frac{\partial F_i(f_l(t))}{\partial x_k} - \frac{\partial F_k(f_l(t))}{\partial x_i} \right] + \frac{\partial F_j(f_l(t))}{\partial x_i} \right) dt.$$

Substituindo (41) em (40), e colocando a função $F_k(f_l(t))$ em evidência no integrando, temos:

$$(42) \quad \eta(t') F_k(f_l(t')) g_k(t') = -\eta(t') \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n F_j(f_l(t')) g_j(t')$$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \int_{t_0}^{t'} \frac{\eta(t) \dot{f}_i(t) g_j(t)}{F_k(f_l(t))} \left(F_j(f_l(t)) \left[\frac{\partial F_i(f_l(t))}{\partial x_k} - \frac{\partial F_k(f_l(t))}{\partial x_i} \right] + F_k(f_l(t)) \left[\frac{\partial F_j(f_l(t))}{\partial x_i} - \frac{\partial F_i(f_l(t))}{\partial x_j} \right] \right) dt.$$

Uma vez que, pela curva γ_1 é verdade que,

$$(43) \quad \sum_{i=1}^n F_i(f_l(t)) \dot{f}_i(t) = 0,$$

então,

$$(44) \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \int_{t_0}^{t'} \frac{\eta(t) \dot{f}_i(t) g_j(t)}{F_k(f_l(t))} F_i(f_l(t)) \left[\frac{\partial F_k(f_l(t))}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j(f_l(t))}{\partial x_k} \right] dt = 0.$$

Substituindo (44) em (42), isolando $g_k(t')$ no processo e identificando \mathfrak{A}_{ijk} no integrando, temos:

$$(45) \quad g_k(t') = \frac{1}{\eta(t') F_k(f_l(t'))} \left\{ -\eta(t') \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n F_j(f_l(t')) g_j(t') \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \int_{t_0}^{t'} \frac{\eta(t) \dot{f}_i(t) g_j(t)}{F_k(f_l(t))} \mathfrak{A}_{ijk} dt \right\}.$$

Se $t' \rightarrow t_*$, com ϵ_1 arbitrariamente pequeno, onde $|t_* - t_0| < \epsilon_1$, bem como ϵ_2 , onde $|t_{**} - t_*| < \epsilon_2$, então, no limite $\epsilon_2 \rightarrow 0$, teremos a formação de uma vizinhança $M \subset B$ em torno de p , arbitrariamente próxima de p , tal que existem pontos atingíveis desde p pelas curvas nas quais $\delta\xi = 0$. A única exceção a isso é se toda função $g_k(t)$ for identicamente nula, para todo t . No integrando de (45), isso requer que:

$$(46) \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \dot{f}_i(t) \mathfrak{R}_{ijk} = 0,$$

uma vez que, por construção, $\eta = \eta(t) \neq 0$, as $g_j(t)$ não podem ser fixadas como zero e, obviamente, $F_k(f_i(t))^{-1} \neq 0$, para todo k . Uma vez que as $\dot{f}_i(t)$ podem ser arbitrárias, exceto $\dot{f}_k(t)$, a qual não comparece em (46), concluímos que $\mathfrak{R}_{ijk} = 0$, para todo i, j, k . Pelo Lema 1 e o Teorema 3 essa prova se encerra. \square

3. INTEGRABILIDADE GLOBAL

O Teorema de Carathéodory 4 tem sido historicamente colocado em debate por garantir apenas uma integrabilidade *local* para as formas pfaffianas [17]. No entanto, seu uso na Termodinâmica Clássica fornece pistas de que sua natureza local reside na generalidade de sua premissa em termos topológicos. Mais do que isso, quando analisado de acordo com as necessidades descritivas da Termodinâmica Clássica [10], esse teorema parece pedir mais do que se precisa para obter um fator integrante, ao presumir uma relação de não conexão entre pontos no espaço (no presente contexto, o \mathbb{R}^n) válido para qualquer vizinhança, arbitrariamente pequena, neste espaço.

Isso indica a possibilidade de um conteúdo oculto no Teorema de Carathéodory que pode ser revelado pela modificação apropriada da noção de *vizinhança*. Faremos isso a seguir e obteremos como resultado uma condição suficiente para a integrabilidade das formas pfaffianas em todo B , exceto para um conjunto de medida nula contido em B ; o que chamaremos aqui de integrabilidade *global* em B .

Definição 3.1. (Reta cercante). *Dado um ponto $p = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in B \subseteq \mathbb{R}^n$, para a reta $\Pi(x_i)$ dos pontos $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_i, \dots, x_n^0)$, com a variável arbitrária x_i chamada de variável livre, damos o nome de reta cercante a p associada com x_i .*

Perceba que a união $\bigcup_{i=1}^n \Pi(x_i)$ das n retas cercantes $\Pi(x_i)$ possíveis a um ponto $p \in B \subseteq \mathbb{R}^n$ não constitui uma vizinhança M de p .

Teorema 5. *Uma condição suficiente à integrabilidade global de uma forma pfaffiana $\delta\xi$ em n variáveis em um aberto B é que na reta cercante $\Pi(x_i)$ de um ponto qualquer $p \in B$, para alguma variável livre x_i , existam pontos arbitrariamente próximos de p inatingíveis desde p pelas curvas tais que $\delta\xi = 0$.*

Demonstração. Sejam a forma pfaffiana $\delta\xi$ em n variáveis, num aberto $B \subseteq \mathbb{R}^n$, e $p = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ um ponto arbitrário de B . Sejam também $q = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^*)$ um ponto da reta cercante a p associada a variável x_n , $\Pi(x_n)$, e γ uma curva em B tal que:

$$(47) \quad \sum_{i=1}^n F_i(\gamma) dx_i(\gamma) = 0.$$

Com $|x_n^* - x_n^0| < \varepsilon$, vamos supor que γ passa por p mas não passa por q , para qualquer ε arbitrariamente pequeno. Segue disso que a equação,

$$(48) \quad dx_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} dx_i,$$

advinda de (47), denota dx_n como o diferencial de uma função $x_n = x_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, de modo que, como sabemos, a função $F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ não é identicamente nula. Obtemos $x_n = x_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ explicitamente integrando (48),

$$(49) \quad x_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = x_n^0 - \int_{(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0)}^{(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} dx_i,$$

onde $x_n^0 = x_n(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0)$. Agora, se fizermos as quantidades $x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0$ variarem, teremos x_1, x_2, \dots, x_{n-1} como as novas variáveis independentes das quais a função x_n , agora $x_n = x_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, depende. A função x_n é contínua em relação as variáveis $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^0$, e diferenciável em relação as variáveis x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , graças a (48). Portanto:

$$(50) \quad \frac{\partial x_n}{\partial x_i} = - \frac{F_i}{F_n}.$$

Além disso, pela equação (49), os quocientes F_i/F_n poderão depender de x_n^0 de alguma forma. Porém, se fixarmos as outras variáveis x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , em (49), obteremos que $x_n = x_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^0)$ é uma função monótona de x_n^0 . Isso não muda para qualquer intervalo fechado contido em $\Pi(x_n)$ no qual possamos assumir as mesmas hipóteses que foram postas até aqui. Como consequência, pelo Teorema de Lebesgue da Diferenciação [18], $x_n = x_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^0)$ é uma função diferenciável de x_n^0 em todo B , com exceção a um conjunto de medida nula contido em B . Assim, observamos que o diferencial da função $x_n = x_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^0)$,

$$(51) \quad dx_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^0) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial x_n}{\partial x_n^0} dx_n^0,$$

da mesma maneira se refere a todo B , com exceção ao mesmo conjunto de medida nula contido em B . Retomando (47) explicitamente, e usando (51) e (50), temos:

$$\begin{aligned}
 \delta\xi &= \sum_{i=1}^{n-1} F_i dx_i + F_n dx_n \\
 (52) \quad &= \sum_{i=1}^{n-1} F_i dx_i + F_n \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial x_n}{\partial x_n^0} dx_n^0 \right) \\
 &= F_n \frac{\partial x_n}{\partial x_n^0} dx_n^0.
 \end{aligned}$$

Logo, $\delta\xi$ é integrável em quase toda parte de B . □

4. APLICAÇÕES E COMENTÁRIOS FINAIS

Neste artigo apresentamos ao leitor as condições de integrabilidade das formas pfaffianas no \mathbb{R}^n , com exceção do conhecido Teorema de Frobenius. Dividimos nossa discussão entre aspectos locais, na seção 2, e aspectos globais, na seção 3, no que diz respeito à integrabilidade. Inspirado no Teorema de Carathéodory, e seu uso na Termodinâmica Clássica [10], um critério de integrabilidade de caráter *global*, a saber, o Teorema 5, foi obtido na seção 3.

O Teorema 5 quando aplicado à Termodinâmica Clássica pode gerar um resultado muito importante: a construção de uma função entropia diferenciável em quase toda parte, de modo que as regiões onde a diferenciabilidade desaparece sejam, pela justificativa experimental da teoria, os pontos no espaço termodinâmico de estados relacionados com transições de fase. Com efeito, introduzindo a lei zero da termodinâmica e consequentemente o conceito de temperatura empírica ϑ , esta quantidade pode agora ser identificada como a variável livre no contexto do Teorema 5; ou seja, assumimos que $\vartheta = x_n$. Em seguida, de acordo com [16], identificando também $\delta\xi$ como a quantidade de calor $\delta\mathcal{Q}$, $F_n = F_\vartheta$, e $x_n^0 = \vartheta^0$, a última expressão em (52) pode ser reescrita se observarmos a dedução da premissa do Teorema 5 a partir do enunciado de Kelvin, ou Clausius, da segunda lei da termodinâmica [10]. Então, fazendo uma mudança para novas variáveis, μ e σ , obtém-se,

$$\delta\mathcal{Q} = \mu d\sigma,$$

onde não é difícil verificar que σ é uma função diferenciável em quase toda parte das variáveis apropriadas em consideração. Com um pouco mais de argumentos [16], obtemos a segunda lei da termodinâmica para processos quase-estáticos,

$$\delta\mathcal{Q} = T d\mathcal{S},$$

sendo T a temperatura absoluta e \mathcal{S} a entropia absoluta. Esta função entropia absoluta, ou simplesmente função entropia, possui as seguintes propriedades: a) aditividade (sobre sistemas termodinâmicos); b) extremização (maximização ou minimização⁴) sobre um processo adiabático irreversível (a premissa do Teorema 5 pode

⁴Para o leitor com familiaridade em física, a aparente lacuna da possibilidade de maximização ou minimização, e a ausência de uma propriedade de variação monótona crescente da entropia em relação à energia interna, são características suportadas por várias evidências experimentais [19].

ser generalizada a partir do ponto de vista da termodinâmica de processos irreversíveis); c) diferenciabilidade em quase toda parte. Com a suposição experimental de variação localmente limitada das grandezas termodinâmicas [20], podemos assumir que a função entropia também tem suas primeiras derivadas com a mesma propriedade de variação localmente limitada. Isso, juntamente com a propriedade de diferenciabilidade em quase toda parte, gera uma propriedade final para a função entropia em questão: d) continuidade localmente Lipschitz. Na verdade, devido ao Teorema de Rademacher, as propriedades desta função entropia podem ser resumidas em: aditividade, extremização, e continuidade localmente Lipschitz.

Também na Mecânica Analítica, a aplicação de um critério de integrabilidade para formas pfaffianas é o procedimento que leva a verificar se os vínculos não-holônomos são, ou não, integráveis. Vínculos são relações entre as coordenadas mecânicas generalizadas, velocidades generalizadas e, eventualmente, a coordenada de tempo; quando um vínculo é uma relação apenas entre as coordenadas generalizadas e o tempo, ele é chamado de holônomo, caso contrário, é chamado de não-holônomo. Um conjunto de n vínculos não-holônomos impostos a um sistema mecânico são frequentemente representados por n correspondentes equações de Pfaff: $\delta\xi_1 = 0, \dots, \delta\xi_n = 0$. Há uma importância prática para a Mecânica Analítica na verificação da integrabilidade de vínculos não-holônomos: os vínculos podem ser aplicados diretamente na função lagrangiana do sistema mecânico, facilitando assim a obtenção das equações de movimento resolvendo as equações de Euler-Lagrange [21]. Além disso, o método tradicional para fazer o teste de integrabilidade é utilizando o Teorema de Frobenius, que exige manuseio de álgebra exterior e conhecimento analítico das equações de Pfaff em questão.

Por outro lado, em termos do Teorema de Carathéodory 4, o teste de integrabilidade para vínculos não-holônomos pode ser realizado sem mais recursos matemáticos, ao invés disso fazendo uso de inferências físicas no espaço de fase do sistema mecânico e suas respectivas restrições. Por exemplo, o problema tradicional de um cilindro perfeito rolando sem deslizar em um plano inclinado pode ser facilmente visualizado na perspectiva de que existem estados no espaço de fase do sistema que não são acessíveis graças ao vínculo de rolar sem deslizar, portanto, esse vínculo precisa ser integrável. Nesse ponto de vista, o Teorema de Carathéodory 4 mostra-se fisicamente mais substancial do que o Teorema de Frobenius, embora este último tenha maior rigor e seja mais útil, especialmente com vínculos mais complicados. No entanto, a aplicação de um derivado do Teorema de Carathéodory 4, como o Teorema 5, na integrabilidade de vínculos não-holônomos deve ser melhor investigada.

REFERÊNCIAS

- [1] Flanders, H. *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*, Revised ed., Dover Publications, 1989.
- [2] Morita, S. *Geometry of Differential Forms*, American Mathematical Society, 2001.
- [3] Antoniou, I. *Caratheodory and the Foundations of Thermodynamics and Statistical Physics*, Foundations of Physics (V. 32, n. 4, pp. 627-641), 2002.
- [4] Arens, R. *Differential-Geometric Elements of Analytic Dynamics*, Journal of Mathematical Analysis and Applications (V. 9, pp. 165-202), 1964.

- [5] Katz, V. J. *The history of differential forms from Clairaut to Poincaré*, Historia Mathematica (V. 8, n. 2, pp. 161-188), 1981.
- [6] Samelson, H. *Differential Forms, the Early Days; or the Stories of Deahna's Theorem and of Volterra's Theorem*, The American Mathematical Monthly (V. 108, n. 6, pp. 522-530), 2001.
- [7] Frobenius, G. *Über das Pfaffsche Problem*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (V. 82, pp. 230-315), 1877.
- [8] Cartan, E. *Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff*, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure (V. 16, pp. 239-332), 1899.
- [9] Papastavridis, J. G. *Analytical Mechanics: A Comprehensive Treatise on the Dynamics of Constrained Systems; For Engineers, Physicists, and Mathematicians*, Oxford University Press, 2002.
- [10] Silva Júnior, P. F. *Sobre a Dedução do Axioma de Carathéodory da Segunda Lei da Termodinâmica dos Princípios de Clausius e Kelvin*, Revista Brasileira de Ensino de Física (V. 43), 2021.
- [11] Coddington, E. A. e Levinson, N. *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill Inc., 1955.
- [12] Díaz, A. A. *Las ecuaciones de Pfaff*, Universidad de Sevilla, Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, 2017.
- [13] Sneddon, I. N. *Elements of Partial Differential Equations*, Dover Publications, 2006.
- [14] Carathéodory, C. *Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik*, Mathematische Annalen (V. 67, pp. 355-386), 1909.
- [15] Buchdahl, H. A. *Integrability Conditions and Carathéodory's Theorem*, American Journal of Physics (V. 22, pp. 182-183), 1954.
- [16] Buchdahl, H. A. *The Concepts of Classical Thermodynamics*, Cambridge University Press, 1966.
- [17] Boyling, J. B. *Carathéodory's principle and the existence of global integrating factors*, Communications in Mathematical Physics (V. 10, n. 1, pp. 52-68), 1968.
- [18] Botsko, M. W. *An Elementary Proof of Lebesgue's Differentiation Theorem*, The American Mathematical Monthly (V. 110, n. 9, pp. 834-838), 2003.
- [19] Lavis, D. A. *The question of negative temperatures in thermodynamics and statistical mechanics*, Studies in History and Philosophy of Modern Physics (V. 67, pp. 26-63), 2019.
- [20] Lieb, E. H. e Yngvason, J. *The physics and mathematics of the second law of thermodynamics*, Physics Reports (V. 310, pp. 1-96), 1999.
- [21] Lemos, N. A. *Vínculos dependentes de velocidades e condição de integrabilidade de Frobenius*, Revista Brasileira de Ensino de Física (V. 37, n. 4), 2015.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO, DEPARTAMENTO DE FÍSICA
RECIFE, PE

Email address: pedro.fsilva2@ufpe.br