Revista Matemática Universitária, vol. 1, 2024
ISSN: 2675-5254 — **DOI:** 10.21711/26755254/rmu20241

UM CONVITE AO PENSAMENTO CATEGÓRICO

JOSÉ SIQUEIRA

Resumo. A pesquisa em teoria das categorias é relativamente recente no Brasil, mas tem ganhado muito interesse em diversos centros no país. Aproveitando este momento de crescimento introduzimos alguns dos conceitos e maneiras de pensar fundamentais à teoria das categorias e fazemos um convite, voltado primariamente aos alunos de graduação e pós-graduação em matemática, computação e áreas adjacentes, para que juntem-se a nós no desenvolvimento desta belíssima e empolgante nova área da matemática.

1. Introdução

A primeira vez que ouvimos falar em "fundamentos da matemática", a imagem que vem à mente é um tanto literal: concebemos um grande edifício, "*A Matemática*", que repousa sobre um alicerce (a Teoria dos Conjuntos, certo?) que escondemos atrás de argamassa, pintura, e alguma decoração escolhida com bom-gosto. O matemático padrão (para não falar em físicos, engenheiros, e demais visitantes do prédio) normalmente gasta o mesmo tempo pensando em Fundamentos quanto um de nós gasta ponderando quanto a escolha de materiais usada para fazer sua casa — a atitude em ambos os casos é a de que, desde que *alguém* tenha verificado que o prédio não vai cair na sua cabeça e nenhum cano estoure, pensaremos nisso nunca. A utilidade dos fundamentos começa e termina em sua existência.

Essa visão é desafiada pela primeira vez, normalmente, quando participamos de um curso de Lógica de Primeira-Ordem e Teoria dos Conjuntos, o que infelizmente nunca chega a acontecer para a maioria das pessoas. O primeiro choque é que *"O Universo dos Conjuntos" não existe* num sentido platônico. As teorias matemáticas procuram encapsular um conceito abstrato (por exemplo, simetria para grupos, distância para espaços métricos, etc), e a dos conjuntos não é diferente: os axiomas da teoria dos conjuntos usual ZF(C) axiomatizam um universo de *coleções pequenas*, e se a teoria for consistente então temos *mais de um* tal universo, com propriedades diferentes; esses universos são chamados *modelos* da teoria dos conjuntos, e o fato

Data de aceitação: 20 de Outubro de 2022.
Palavras chave. Fundamentos, teoria das categorias.

de podermos ter mais de um não é mais estranho do que pensar que temos mais de um grupo e que todos servem como uma possível coleção de simetrias. Os exemplos mais famosos dessas divergências dizem respeito ao Axioma da Escolha (AC) e a Hipótese do Continuum (CH): se ZF é consistente, então existem modelos que satisfazem AC e modelos que não satisfazem, e o mesmo pode ser dito sobre CH. Mas então se é apenas uma "questão de gosto" trabalhar num universo que satisfaz AC ou não (tanto quanto escolher especializar em grupos abelianos, ou livre de torção, ou que tenham sua propriedade algébrica favorita), qual deve contar como "fundação da matemática"? A dúvida piora ainda mais quando ficamos sabendo que existem alternativas fundacionais à Teoria dos Conjuntos, baseadas na Teoria dos Tipos ou na Teoria das Categorias, por exemplo. Por que então nos damos ao trabalho de estudar tantas formas diferentes de fundamentos? Tem algo errado com conjuntos (e, talvez, os *meus* teoremas)? É porque secretamente desconfiamos que o prédio é bambo?

A verdade é que pensar as diversas formas propostas de fundamentos para a matemática como o esqueleto para o arranha-céu matemático nunca foi uma boa analogia. Uma comparação um tanto mais precisa quanto mais útil é uma que ouvi contada pela primeira vez por M. Shulman [1]: cada teoria de fundamentos é como uma linguagem de programação para a Matemática e, assim como na engenharia de software certas linguagens são mais adequadas para certos propósitos. Não há uma razão fundamental para dizer que *Python* é a linguagem de programação correta, ou *Haskell*, ou *Java*, ou C++; cada uma tem seu estilo e ferramentas próprias e tem vantagens e desvantagens ao tentar codificar certos programas. Ainda, há uma expectativa de que toda linguagem de programação decente seja expressiva o suficiente para implementar todos os algoritmos fundamentais (por exemplo, busca binária), embora o código pareça diferente. A situação é semelhante na Matemática: tanto conjuntos quanto categorias providenciam uma formulação para os números naturais, por exemplo, que serve os mesmos propósitos práticos mas tem uma codificação diferente. De modo mais importante, a escolha de linguagem de programação (ou de fundamentos) influencia sua maneira de pensar os problemas, e é aí que está o maior ganho para um matemático que se voluntariar a aprender mais a respeito.

Esse artigo focará em introduzir o leitor à maneira categórica de pensar nas coisas *sem adentrar em tecnicalidades ou ser preciso demais*, mas a mensagem fundamental vale para motivar aprender a Teoria dos Tipos, dos Conjuntos, ou outras formas de fundamentos. Não se preocupe se houver alguma palavra estranha, ou algo que não foi definido, o foco é na maneira de pensar nas coisas. Se o artigo for bem-sucedido e o leitor quiser aprender os detalhes, recomendamos que busque as obras listadas ao final do artigo — há algo para matemáticos em todos os estágios de aprendizado!

2. Categorias, composicionalidade e propriedades universais

Se a Teoria dos Conjuntos é a teoria das coleções pequenas, a Teoria das Categorias é a teoria das *comparações*. O princípio geral é a de que devemos focar em como um dado objeto se relaciona com os demais do mesmo tipo, e não em como o objeto se apresenta de maneira concreta — pensando nas estruturas matemáticas (conjuntos, grupos, espaços topológicos, etc) como membros de uma rede interconectada, tudo o que for importante sobre um dado espécime estará capturado na forma com que ele perturba o resto da rede [1]. No fundo, a pergunta fundamental é: como um objeto se compara aos demais? Comecemos relembrando um formalismo para comparar coisas que todo matemático já encontrou:

Definição 1. *Um conjunto pré-ordenado é um conjunto X equipado com uma relação binária $\leq$ tal que:*

(1) *Para todo x em X, temos $x \leq x$;*
(2) *Para todos x, y, z em X, se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$*

Num conjunto pré-ordenado temos no máximo uma maneira de comparar dois elementos x e y dados: pode ser que $x \leq y$ (ou vice-versa), ou que x seja incomparável a y. Além disso, sempre temos que x é comparável a si próprio. Essa noção e demais conceitos derivados são extremamente úteis (vide toda a Teoria da Ordem), mas ainda assim um tanto restritivos. Um jeito de pensar numa categoria é como uma coleção pré-ordenada em que podemos talvez comparar x e y de mais de uma forma:

Definição 2. *Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste em:*

- *Uma coleção de* objetos*;*
- *Para cada par de objetos A e B de $\mathcal{C}$, uma coleção de* morfismos *de A para B, denotada $\mathcal{C}(A, B)$. Os elementos $f \in \mathcal{C}(A, B)$ são denotados por uma flecha $f\colon A \to B$;*
- *Para cada trio A, B e C de objetos, uma* operação de composição

$$\circ\colon \mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C)$$

associativa e tal que para cada objeto A de $\mathcal{C}$, existe um morfismo $1_A : A \to A$ (o morfismo identidade *de A), tal que $1_A \circ f = f$ e $g \circ 1_A = g$, onde $f : B \to A$ e $g : A \to B$ são morfismos quaisquer.*

A ideia é que um morfismo $f\colon A \to B$ é uma comparação ordenada entre A e B: sempre há uma maneira canônica de comparar A com si próprio que não concede informações novas (representada por 1_A), e se consigo comparar A com B e B com C, então consigo comparar A com C por meio da operação de composição (compare isso à transitividade da ordem em conjuntos ordenados). Se por acaso tivermos $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to A$ com $f \circ g = 1_B$ e $g \circ f = 1_A$, então A e B se relacionam com os demais objetos das mesmas formas, logo são indistinguíveis do ponto de vista categórico. Dizemos que A e B são *isomorfos* (compare essa ideia com a propriedade de anti-simetria de um conjunto parcialmente ordenado). Nosso primeiro princípio é o de que **propriedades categóricas são invariantes com relação a isomorfismos** (apesar de que outras formas de equivalência podem ser mais úteis em certos contextos).

Além dos conjuntos ordenados, exemplos típicos incluem coleções de estruturas matemáticas (grupos, espaços topológicos, variedades diferenciáveis, etc) com os

[1] Isso pode ser formalizado por meio de um resultado fundamental da Teoria das Categorias: o Lema de Yoneda.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C
\end{tikzcd}$$

FIGURA 1. Se f compara A a B e g compara B a C, então $g \circ f$ compara A a C

morfismos sendo funções que preservam essa estrutura (homomorfismos, funções contínuas, funções suaves, etc), mas de modo algum estão restritos a isso. Temos por exemplo uma categoria cujos objetos são os números naturais e um morfismo $n \to k$ é uma matriz $k \times n$ com coeficientes reais (com composição dada pela multiplicação de matrizes). Sempre que conceber uma definição nova, pense em que tipo de transformação entre coisas desse tipo preservam as estruturas envolvidas e verifique se uma categoria é obtida dessa maneira.

Pensar em categorias como generalizações de conjuntos ordenados imediatamente sugere certas noções centrais. Na teoria da ordem temos os conceitos de *ínfimo* e de *supremo* de um subconjunto, que caracterizam "o elemento mais próximo ao subconjunto" por baixo ou por cima, respectivamente (se existir), e nesse caso cada ponto do subconjunto pode então ser retroativamente visto como parte de uma aproximação de tal elemento especial de certo modo. A mesma ideia pode ser explorada de maneira muito mais rica numa categoria. Em vez de aproximar subconjuntos de uma ordem, podemos fazer o mesmo com *diagramas* de uma categoria (uma coleção de objetos e morfismos da categoria como ilustrado na Figura 1)

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[d] & B \\
C
\end{tikzcd} \; . \tag{1}$$

e procurar por um objeto especial (equipado com certos morfismos que o comparam aos objetos do diagrama) que faça um papel análogo ao de ínfimo ou supremo para ordens: em vez de interagir com o diagrama, podemos lidar com um só objeto. Esse processo toma um diagrama qualquer e o utiliza para formar algo novo, o que pode ser feito de duas maneiras fundamentalmente distintas (porém duais): intuitivamente, um jeito é pegar um objeto já existente e o utilizar como o mármore a partir do qual esculpimos o que queremos, seguindo o projeto de escultura determinado pela informação contida no diagrama, e outro é colar um componente do diagrama no outro, identificando os pedaços que se sobrepõe para obter um todo (tenha em mente o jeito que construímos uma casa de LEGO™ — os morfismos do diagrama nos dizem como encaixar as peças). No linguajar categórico, o resultado do primeiro tipo de processo é o que chamamos de um *limite* (correspondente a um ínfimo), enquanto o segundo método gera *colimites* de diagramas (que são supremos generalizados). Vale a pena parar para pensar nas categorias relevantes para suas áreas favoritas da matemática e verificar quais de suas construções favoritas soam como um limite ou um colimite! Estas noções exemplificam um dos temas comuns no pensamento categórico, a ideia de **composicionalidade**: podemos descrever e quantificar fenômenos complexos ao enxergá-los como o resultado das interações entre partes simples. Fazemos isso toda vez que provamos um teorema de fatoração para facilitar nossa vida.

Exemplo 1. *Seja S um subconjunto de B e $f\colon A \to B$ uma função. Suponha que queiramos relacionar essas duas informações. Podemos primeiro tomar o produto cartesiano $A \times B$ e extrair dele somente os pares (a, b) em $A \times B$ tais que $b = f(a)$ está em S. Isto essencialmente nos dá a pré-imagem $f^{-1}(S)$, que é o limite do diagrama*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "f"] \\ S \arrow[r, hook] & B \end{tikzcd}$$

*na categoria dos conjuntos (o que chamamos de um **pullback**). Outro tipo importante de limite surge ao tomar duas funções $f, g\colon A \to B$ e extrair de A o subconjunto $\{a \in A\colon f(a) = g(a)\}$, o **equalizador** de f e g. Se f e g são funções reais, isto nos dá o conjunto-solução da equação $f(x) = g(x)$.*

Exemplo 2. *Seja p um número primo. Temos um jeito natural de encaixar um grupo cíclico $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ no grupo $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ sempre que $n \geq m$ via um homomorfismo de grupos, logo talvez haja um jeito de utilizar esses grupos finitos para construir um grupo maior que possa ser estudado por essas partes simples. Para fazer isso, tomamos um colimite do diagrama*

$$0 \leftarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \leftarrow \cdots$$

*na categoria dos grupos, e assim obtemos o grupo $\mathbb{Z}_p$ dos **inteiros p-ádicos**. No espírito da composicionalidade ele acaba por se comportar de maneira semelhante a um grupo finito, sendo um **grupo profinito** (por exemplo, ele satisfaz versões dos teoremas de Lagrange e Sylow)* [2] [3].

Um limite para um diagrama é comparável a cada objeto do mesmo de uma maneira compatível com as informações nele contidas, e é *universal* com essa propriedade — isso quer dizer que qualquer outro objeto com essa mesma propriedade é canonicamente comparável com o limite de um modo que respeita todos os demais morfismos envolvidos (por exemplo, o ínfimo de um subconjunto de $\mathbb{R}$ é menor que todos os elementos desse subconjunto, e qualquer outro elemento com essa propriedade é menor que o ínfimo) [2]. Um categorista caracteriza construções matemáticas por suas propriedades universais porque é mais importante saber como algo se comporta do que como este algo se apresenta concretamente. Isso nos permite formalizar certas definições com uma liberdade muito maior do que conjuntos nos permitiriam; uma noção só de "produto", por exemplo faz sentido em muitas categorias logo podemos usá-la para tratar de álgebra, topologia, geometria, etc, recuperando definições clássicas.

[2] Um objeto com uma propriedade universal é um "primo bem-sucedido" da categoria. Se tiver qualquer outro com a mesma propriedade, ele será inevitavelmente comparado a ele.

Tratemos um exemplo de propriedade universal em mais detalhe, fixando uma categoria que contenha um *objeto terminal* (denotado por 1). Tais objetos nos fornecem uma noção de *elemento* para objetos de uma categoria — um elemento x de N, em abstrato, é um morfismo $x\colon 1 \to N$ (pense em como elementos de um conjunto A são identificados com funções $1 = \{\bullet\} \to A$). A ideia é que para capturarmos os números naturais precisamos apenas de um ponto de partida e de um mapa para aplicar: pensamos num número como sendo a quantidade de iterações do mapa, o mesmo raciocínio que está por trás dos *numerais de Church* do λ-cálculo. Consideremos então um objeto N na categoria que contém um elemento $z\colon 1 \to N$ (nosso "zero") e um morfismo $S\colon N \to N$ (a "função sucessora"). Pode ser que tenhamos vários tais trios (N, z, S), como é o caso na categoria de conjuntos (considere qualquer conjunto infinito), então claramente não basta parar por aí — intuitivamente os números naturais devem providenciar "o menor tal trio possível", o que podemos capturar postulando uma propriedade universal:

Definição 3. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria admitindo um objeto terminal. Um* objeto de números naturais *é um trio $(N, z\colon 1 \to N, S\colon N \to N)$ tal que, dado qualquer outro trio $(N', z'\colon 1 \to N', S'\colon N' \to N')$ na categoria, existe um único morfismo $u\colon N \to N'$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "z"] \arrow[dr, "z'"'] & N \arrow[r, "S"] \arrow[d, "u"] & N \arrow[d, "u"] \\
& N' \arrow[r, "S'"'] & N'
\end{tikzcd}$$

comuta, isto é, $u \circ z = z'$ e $u \circ S = S' \circ u$.

O trio $(\mathbb{N}, 0, S)$ é um objeto de números naturais na categoria dos conjuntos, e como todo objeto definido por uma propriedade universal é único a menos de isomorfismo. Digamos que N' seja um conjunto infinito, z' uma escolha de um elemento dele, e S' uma operação de sucessão neste conjunto. Então as equações acima nos dizem que há um único mapa $\mathbb{N} \to N'$ que leva 0 a z' e que, para cada $n \in \mathbb{N}$, leva $n+1$ a S' da imagem de n. Isto captura a ideia de que podemos mergulhar $\mathbb{N}$ em qualquer tal conjunto ao determinar para onde enviar 0 e então escolher um "novo elemento" para mapear cada sucessor por vez.

Uma vantagem considerável de se ter essa noção categórica em vez da noção clássica é que, apesar de termos considerado aqui a categoria dos conjuntos para exemplificar e raciocinar, isto foi apenas por motivos de familiaridade — a definição continua válida em outras categorias bem diferentes que tenham apenas algumas propriedades categóricas básicas, de modo que imediatamente sabemos o que procurar se precisarmos de algo que se comporte como os números naturais em outro contexto. Ainda, as propriedades fundamentais dos números naturais podem ser obtidas deste ponto de vista em qualquer categoria com estrutura suficiente. Por exemplo, numa categoria cartesiana-fechada (uma em que "funções de duas variáveis" podem ser sempre representadas por uma com uma só [3]) com um objeto de números naturais N podemos provar que toda função recursiva primitiva é representável por um morfismo $N^k \to N$ — isto inclui, é claro, *fan favourites* como adição, multiplicação, exponenciação, e afins. Isto nos permite acessar certas formas de indução em contextos inesperados, como na geometria algébrica [4].

3. Funtorialidade e dualidade

Considere as seguintes duas experiências bem comuns numa graduação em matemática:

(1) Ana está cansada. Ela adora álgebra, mas esta é a *terceira vez* em dois anos que ela tem de assistir a uma demonstração de um teorema que soa um tanto familiar. A professora acaba de escrever:

Teorema 1. *Seja $\phi\colon R \to S$ um homomorfismo de **anéis**. Então o **anel** quociente $R/\ker(\phi)$ é isomorfo à imagem de ϕ.*

Enquanto ela escreve a prova, Ana resolve consultar seu caderno de Grupos. Lá ela vê o seguinte:

Teorema 2. *Seja $\phi\colon G \to H$ um homomorfismo de **grupos**. Então o **grupo** quociente $G/\ker(\phi)$ é isomorfo à imagem de ϕ.*

Transtornada, ela dá uma checada no curso de Álgebra Linear e se depara com:

Teorema 3. *Seja $\phi\colon V \to W$ uma transformação linear entre **espaços vetoriais**. Então o **espaço** quociente $V/\ker(\phi)$ é isomorfo à imagem de ϕ.*

É claro que o núcleo $\ker(\phi)$ é algo ligeiramente diferente em cada caso (um ideal, um subgrupo normal, e um subespaço, respectivamente) e que os objetos envolvidos são estruturas algébricas diferentes, mas a prova que a professora está escrevendo é basicamente a mesma que ela já tem anotada.

(2) Jeremias está se aventurando pela topologia e tem uma ideia excelente: fixe um ponto e veja de quantas formas diferentes podemos desenhar um laço (direcionado) que passa por aquele ponto. Considere dois laços equivalentes se for possível encurtar um deles (sem passar por nenhum buraco) até obter o outro: saber quais "tipos de laço" existem nesse sentido nos permite estudar o formato do espaço e quantos buracos ele tem. Ele conta essa ideia para Ana, que imediatamente repara que os tipos de laço que passam por um dado ponto formam um grupo: basta concatenar os laços para obter um novo, e sempre podemos obter um novo laço a partir de um existente indo na direção oposta, e isso satisfaz os axiomas de grupo[4]. Ela suspeita fortemente que se

[3] Para conjuntos, uma função $f\colon A \times B \to C$ corresponde à função $g\colon A \to C^B$, onde C^B é o conjunto das funções $B \to C$. Basta definir $g(a)$ como sendo a função $B \to C$ que leva $b \in B$ a $f(a, b)$.

[4] Deixe os detalhes técnicos pra lá.

dois espaços diferentes forem postos lado a lado, então os grupos obtidos desse jeito para cada um também devem ser comparáveis.

Uma teoria de comparações é, inevitavelmente, uma teoria das analogias, e este é um dos grande fortes da Teoria das Categorias — ela permite fazer isso de maneira sistemática. A grande observação é a de que temos uma boa noção de morfismo *entre categorias*, os chamados **funtores**. Um funtor nada mais é que um mapa entre duas categorias que respeite sua estrutura: mapeia objetos a objetos e morfismos a morfismos, de modo que morfismos identidade e domínios, codomínios e composições de morfismos sejam preservados. Isso nos permite formalizar situações como a do exemplo envolvendo Ana e Jeremias: a maneira com que dois espaços se comparam parece similar com a maneira com que dois grupos se comparam, e isso é capturado construindo um funtor entre a categoria dos espaços topológicos com um ponto especial fixado e funções contínuas que o preserve, e a categoria dos grupos e homomorfismos. A teoria então ajuda a estudar as propriedades de tais funtores e ocasionalmente guiar como os construir. A moral é que, sempre que tentar comparar duas áreas da matemática, um bom ponto de partida é pensar em como construir funtores entre categorias adequadas. Alguns funtores (chamados funtores adjuntos) permitem migrar de uma categoria à outra de uma maneira particularmente boa, generalizando as conexões de Galois.

A primeira situação é de uma natureza um pouco distinta, e representa o valor da **abstração**. O ponto é que as noções envolvidas no enunciado e na prova dos três teoremas (morfismo, quociente, núcleo e imagem) não requerem nada *específico* à categoria de grupos, anéis ou espaços vetoriais, mas podem ser formuladas em qualquer categoria com um certo mínimo de estrutura. O argumento para o teorema é então essencialmente o mesmo, mas tem uma encarnação concreta ligeiramente distinta para cada categoria específica. Isso não é meramente um jeito de ganhar tempo: a teoria das categorias está *separando as propriedades gerais das específicas*. Um matemático que não é um categorista ainda se beneficia de um tratamento categórico justamente por ele facilitar distinguir entre o que é especial em seu objeto de estudo, e o que o mesmo satisfaz meramente por ser parte de uma classe mais abrangente de estruturas. Para quem está familiarizado com lógica, há de se comparar esta situação com a seguinte: existem propriedades dos números naturais que são inerentes a um modelo específico dos axiomas de Peano (se consistente) e algumas que decorrem da teoria em si pela correção da lógica de primeira-ordem (e portanto valem em qualquer modelo), mas nem sempre é óbvio dizer se uma propriedade está no primeiro grupo ou no segundo. Qualquer ferramenta que ajude com algo assim é valiosa.

Existem outras situações em que provamos algo mais de uma vez desnecessariamente. Certos argumentos são perfeitamente simétricos (por exemplo, a prova de que um supremo para um subconjunto de números reais é único se existir, e a mesma para um ínfimo), e notamos que a conversão de um deles para o outro sempre ocorre da mesma maneira. Podemos tratar desses casos categoricamente por meio da seguinte observação: se $\mathcal{C}$ for uma categoria, então podemos construir uma nova categoria $\mathcal{C}^{op}$ que tem os mesmos objetos de $\mathcal{C}$, mas tem um morfismo na *direção* *oposta* para cada morfismo $A \to B$ em $\mathcal{C}$ (com a composição óbvia e os mesmos morfismos identidade), isto é, $\mathcal{C}^{op}(A,B) = \mathcal{C}(B,A)$. Trivialmente, $\mathcal{C}^{op}$ é uma categoria. Agora suponha que provemos que uma propriedade vale para toda categoria. Então em particular ela vale para $\mathcal{C}^{op}$, o que pode ser traduzido novamente como uma propriedade de $\mathcal{C}$ (invertendo todos os morfismos que ocorrem). Este é o **princípio da dualidade**. Computar um limite em $\mathcal{C}^{op}$ corresponde a obter um colimite em $\mathcal{C}$ por exemplo, logo provar um fato sobre limites nos providencia automaticamente um fato dual sobre colimites. Procure identificar as ocorrências de dualidade no futuro.

O leitor atento deve ter percebido que mencionamos que vários exemplos de categoria são da forma "estruturas + mapas que as preservam", e que os funtores supracitados são "mapas que preservam a estrutura de uma categoria". Moralmente, então, categorias e funtores devem formar também uma categoria, o que realmente acontece [5]. Isso significa que a teoria das categorias reflete a respeito de si própria: todo o arcabouço que desenvolvemos para tratar de categorias em geral pode ser utilizado para falar sobre uma categoria de categorias, o que quer dizer que podemos falar em categorias com propriedades universais, limites e colimites de categorias, dentre outras coisas neste espírito. Algo semelhante se repete quando notamos que há uma maneira boa de *comparar funtores* entre duas categorias, e que isto providencia uma *categoria de funtores*. Grande parte do poder lógico da teoria advém desta capacidade de introspecção. Relacionado a isso está o **princípio do microcosmo**: versões de uma estrutura algébrica podem ser definidas em qualquer categoria equipada com uma versão categorificada da mesma estrutura. Por exemplo, a noção de monóide faz sentido em qualquer *categoria monoidal*.

4. Ok, me convenceu. O que vem a seguir?

Em seus primórdios a teoria das categorias servia como uma mera linguagem para organizar os pensamentos em assuntos como topologia e geometria algébrica, mas do mesmo jeito que a teoria de grupos deixou de ser, faz muito tempo, uma mera técnica para tratar de equações polinomiais, a teoria das categorias se tornou sua própria rica subárea da matemática, com diversos teoremas e noções não triviais (embora retenha uma distinção de frequentemente ter definições mais importantes do que teoremas) e aplicações dentro e fora da matemática, embora ainda esteja em sua juventude. Essa seção se dedica a mencionar algumas das realizações da área desde sua criação e algumas das direções que toma no momento (embora a lista não seja de modo algum exaustiva).

- A noção revolucionária de *topos*, que são categorias bem especiais, vem em dois sabores: os chamados *toposes de Grothendieck* tem um viés geométrico (são generalizações categóricas de espaços topológicos) e foram utilizados de maneira primorosa pela escola epônima para modernizar e avançar consideravelmente a geometria algébrica ao empregar uma perspectiva funtorial, enquanto o conceito mais geral de *topos elementar* de W. Lawvere e M. Tierney serve como um arcabouço teórico para tratar simultaneamente de

[5] Existem certas ressalvas relativas ao tamanho das categorias para evitar paradoxos do tipo Russel, mas deixemos isso de lado por hora.

topologia, lógica e teoria dos conjuntos. A teoria dos toposes foi utilizada para ampliar a noção clássica de modelo (com teoremas de completude associados), estudar a relação entre a lógica e a geometria, servir como uma nova ferramenta para estudar problemas de independência na teoria dos conjuntos [5], por exemplo demonstrar a independência do axioma da escolha com relação aos demais axiomas de ZF, e até mesmo para relacionar a física quântica à clássica [6] e modelar protocolos de segurança para veículos autônomos, como aeronaves [7].

- A *Correspondência de Curry-Howard* estabelece uma equivalência entre lógica e programação, e Lambek posteriormente estendeu essa relação para abarcar categorias cartesiana-fechadas [8] [9]. A grosso modo, uma prova de uma proposição é um λ-termo tipado, que é um programa, que é um morfismo numa categoria cartesiana-fechada. Em suma, há uma classe simples de categorias *com a estrutura necessária para replicar a execução de um programa ou uma demonstração lógica de um teorema*. Existem diversas variações dessa *trindade computacional* que capturam tipos diferentes de lógica (como a lógica linear) e a relacionam a outras noções de algoritmo e tipos de categoria, um dos motivos pelos quais interesse na teoria das categorias tem crescido vertiginosamente nos departamentos de computação [6]. Categorias também têm sido extremamente frutíferas no estudo da lógica em si, providenciando ambientes para a semântica de teorias lógicas e ferramentas como hiperdoutrinas, triposes, toposes, e fibrações.
- Existem diversas abordagens categóricas para a álgebra universal, com flexibilidade superior à clássica (a mesma técnica permite formalizar grupos, grupos topológicos, grupos de Lie, etc). Teorias algébricas correspondem a certos tipos de categoria (as chamadas *teorias de Lawvere*), e um modelo para uma dada teoria (ex.: um grupo, um anel, etc) é simplesmente um funtor com certas propriedades. Ainda, um teorema importante estabelece uma equivalência entre essas categorias de modelos de uma teoria algébrica e as chamadas categorias de álgebras para uma mônada (finitária). Mônadas são objetos muito bem estudados na teoria das categorias, com amplas aplicações na matemática e na teoria da computação (é de onde vêm as *monads* da linguagem de programação *Haskell*), e temos teoremas para reconhecer quando uma categoria é secretamente algébrica (ou, dualmente, co-algébrica) no sentido de que é equivalente a categoria das álgebras de uma mônada, o que imediatamente fornece uma série de propriedades [10] [11];
- Mencionamos que há uma maneira de comparar funtores e obter uma categoria, o que é feito utilizando as chamadas *transformações naturais*. Podemos comparar transformações naturais também. E comparar as comparações, e assim por diante. Isso leva a uma primeira ideia de *categoria de dimensão superior*, e situações semelhantes se repetem em outros contextos (no caso da topologia por exemplo podemos considerar homotopias, e homotopias entre

[6]Há mais categoristas no departamento de computação em Cambridge, Oxford, Edimburgo, Birmingham e outras universidades britânicas do que no de matemática!

as homotopias, e assim por diante, o que naturalmente gera uma tal categoria). Nesse sentido podemos pensar em conjuntos como sendo categorias 0-dimensionais e as categorias usuais como sendo unidimensionais. A teoria das categorias de alta dimensão é um tópico de pesquisa extremamente popular no momento [12];

- Com a maturidade maior da teoria, começam a surgir as aplicações mais robustas. Fora o que já foi citado anteriormente, destaco a formulação da mecânica quântica em termos de categorias monoidais oriunda do *Quantum Group* em Oxford, que tem sido utilizada para modelar e provar teoremas para a computação quântica [13] [14], o uso da teoria para a modelagem de situações estudadas pela epidemiologia [15], e seu papel no entendimento de protocolos criptográficos [16]. Fortemente recomendamos "*An Invitation to Applied Category Theory: Seven Sketches in Compositionality*" [7] àqueles interessados em aplicações da teoria das categorias a problemas do "mundo real".

5. Uma palavra final

Apesar de ser uma área da matemática muito rica e em grande expansão, com presença em vários grandes centros da Europa, Estados Unidos, Canadá, África e Austrália, seu desenvolvimento no Brasil ainda está em seus primórdios. Interesse na área, entretanto, tem ganho momento: o 1º encontro brasileiro de Teoria das Categorias ocorreu em janeiro de 2021, contando com cerca de 150 participantes, e um segundo encontro ocorreu em março de 2023 com a participação de grandes nomes brasileiros e estrangeiros. Asseguramos ainda uma excelente seção temática de Teoria das Categorias como parte do Encontro Brasil-Portugal em Matemática em 2022, e também durante o VII Congresso Latino-Americano e do Caribe de Matemática (CLAM). No Brasil, a pesquisa na área ou a utilizando como ferramenta está concentrada no momento no IME-USP, na UFBA, na PUC-RJ, na UFMG e na UFES, mas tende a se espalhar conforme mais cursos a respeito são lecionados e encontros são realizados.

Caso queira se juntar a nós, mas não sabe por onde começar, temos algumas sugestões em ordem da maturidade matemática necessária:

(1) *Conceptual Mathematics: A First Introduction to Categories* [17] é um livro brilhante, escrito por dois dos maiores categoristas até então e desprovido da presunção de que os leitores tenham cursado Matemática. É uma leitura agradável e instigante para todos, mas que não aborda aspectos técnicos profundos. Também muito acessível é o "*Category Theory for the Sciences*" [18], voltado a não-matemáticos e focado em aplicações.

(2) *Teoria das Categorias para Matemáticos: uma breve introdução* [19] e *Teoria das Categorias para Ciência da Computação* [20] são os únicos livros publicados no Brasil que abordam o assunto[7] e fornecem uma introdução ao tema em língua portuguesa.

[7]Embora mais um esteja em preparo. Aguarde!

(3) *Basic Category Theory* [21] do Leinster é uma excelente introdução ao tema, embora não chegue a abordar temas importantes como adjunções e mônadas. O livro *Category Theory* [22] de Steve Awodey também não pressupõe muitas coisas, mas aborda esses tópicos. Ler estes livros seria um bom ponto de partida para estudantes no fim de um curso de graduação em matemática ou computação. Leitores com boa maturidade matemática podem apreciar mais o livro *Category Theory in Context* [23] da Emily Riehl, uma das melhores categoristas desta geração, que aborda os mesmos tópicos.

(4) A referência clássica que contém todo o essencial que um matemático deva saber sobre categorias, *Categories for the Working Mathematician* [24], foi escrita por um dos fundadores da área. Sua leitura deve vir depois de um dos anteriormente citados. Recomendamos que dê preferência à leitura dos três volumes do *Handbook of Categorical Algebra* [25] de Francis Borceux, que tem uma exposição brilhante e completa de muitos dos principais tópicos em categorias. Confiamos que a partir de então o leitor possa buscar por conta própria referências para as especialidades que preferir.

O 3º Encontro Brasileiro de Categorias está planejado para o segundo semestre de 2025. Esperamos acolher vários leitores lá e nos próximos anos!

Referências

[1] Michael Shulman, *Complementary foundations for mathematics: when do we choose?*, https://home.sandiego.edu/~shulman/papers/jmm2022-complementary.pdf.

[2] Luis Ribes, Pavel Zalesskii, *Profinite Groups - Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (Volume 40)*, Second Edition, Springer, 2010.

[3] Colin David Reid, *Finiteness Properties of Profinite Groups*, PhD Thesis, University of London, 2010.

[4] Ingo Blechschmidt, *Using the internal language of toposes in algebraic geometry*, PhD Thesis, University of Augsburg.

[5] Peter Freyd, *The Axiom of Choice*, Journal of Pure and Applied Algebra, 19, 1980, pp. 103–125.

[6] Andreas Doering, Christopher John Isham, *A topos foundation for theories of physics: I. Formal languages for physics*, Journal of Mathematical Physics, Vol:49, 2008, ISSN:0022-2488.

[7] Brendan Fong , David Isaac Spivak, *An Invitation to Applied Category Theory: Seven Sketches in Compositionality*, 1st edition, Cambridge University Press, ISBN: 978-1108482295.

[8] Joachim Lambek, *Deductive systems and categories III*, Lecture Notes in Mathematics, volume 274, pages 57–82. Springer, 1972.

[9] Joachim Lambek, *Functional completeness of cartesian categories*, Annals of Mathematical Logic, 6:259–292, 1974.

[10] Francis William Lawvere, *Functorial Semantics of Algebraic Theories and Some Algebraic Problems in the context of Functorial Semantics of Algebraic Theories*, Reprints in Theory and Applications of Categories, No. 5, 2004, pp. 1-121.

[11] Jiri Adamek, Jiri Rosicky, *Locally presentable and accessible categories (chapter 3)*, LMS Lecture Notes 189, Cambridge University Press, 1994.

[12] Eugenia Cheng, Aaron Lauda, *Higher-Dimensional Categories: an illustrated guide book*, University of Cambridge, 2004.

[13] Samson Abramsky, Bob Coecke, *A categorical semantics of quantum protocols*, Proceedings of the 19th IEEE conference on Logic in Computer Science (LiCS'04). IEEE Computer Science Press, 2004.

[14] Christopher Heunen, Jamie Vicary, *Categories for Quantum Theory*, Oxford University Press, 2019.
[15] Sophie Libkind, Andrew Baas, Micah Halter, Evan Patterson, James Fairbanks, *An Algebraic Framework for Structured Epidemic Modeling*, 2022, arXiv:2203.16345.
[16] Anne Broadbent, Martti Karvonen, *Categorical composable cryptography*, International Conference on Foundations of Software Science and Computation Structures, Part of the Lecture Notes in Computer Science book series (LNCS,volume 13242), 2022.
[17] Francis William Lawvere, Stephen Hoel Schanuel, *Conceptual Mathematics: A First Introduction to Categories*, Cambridge University Press, 2nd edition, 2009.
[18] David Isaac Spivak, *Category Theory for the Sciences*, The MIT Press, 2014, ISBN: 978-0262028134.
[19] Maico Felipe Silva Ribeiro, *Teoria das Categorias para Matemáticos: uma breve introdução*, SBM, 2020, ISBN: 9786599039515.
[20] Paulo Blauth Menezes, Edward Hermann Haeusler, *Teoria das Categorias - Para Ciência da Computação*, Bookman; 2ª edição, 2008. ISBN: 978-8577803491.
[21] Thomas Leinster, *Basic Category Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Series Number 143, Cambridge University Press, 2014, ISBN: 978-1107044241.
[22] Steve Awodey, *Category Theory*, Oxford Logic Guides, 52, 2010. ISBN: 978-0199237180.
[23] Emily Riehl, *Category Theory in Context*, Dover Publications, 2016, ISBN: 978-0486809038.
[24] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, NY, 1978. ISBN: 978-0-387-98403-2.
[25] Francis Borceux, *Handbook of Categorical Algebra*, Cambridge University Press, 1994.

Departamento de Matemática Pura e Estatística Matemática
Universidade de Cambridge
Cambridge, Inglaterra
E-mail address: jvp27@cam.ac.uk