RMU
REVISTA MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Revista Matemática Universitária, vol. 1, 2024
ISSN: 2675-5254 — **DOI:** 10.21711/26755254/rmu20243

O NASCIMENTO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

PEDRO ROBERTO DE LIMA

Resumo. O presente texto aborda o conceito de "equação diferencial" apresentando alguns fatos e personagens associados ao seu desenvolvimento. Com isso, espera-se fornecer uma perspectiva de como ocorreu o seu surgimento localizando, no tempo, o ponto em que a definição atual passou a ser utilizada.

1. Introdução

Um problema bastante antigo da matemática é o hoje chamado **problema da tangente**, que consiste em determinar a reta tangente a uma dada curva num dado ponto. Modernamente, determinar a tangente significa encontrar sua equação. Porém, versões desse problema vêm sendo estudadas desde a antiguidade – época na qual a determinação da tangente era feita por meio de uma construção geométrica. Por exemplo, o Corolário da Proposição 16 do Livro III da célebre obra *Os Elementos*, de Euclides de Alexandria ($\approx$ 300 a.C.), resolve o problema da tangente no caso em que a curva é um círculo. Disse Euclides:

> Disso, então, é evidente que a traçada em ângulos retos com o diâmetro, a partir de uma extremidade, é tangente ao círculo ([8], p. 167).

Em outras palavras: para obter a tangente a um círculo num ponto P, basta traçar o diâmetro que tem P como extremidade e, por P, a reta perpendicular ao diâmetro (veja a Figura 1). Cabe salientar que Euclides entendia a reta tangente a um círculo como sendo uma reta que apenas tocava o círculo, sem o cortar quando prolongada ([8], p. 151).

A obra de Euclides não é a única da antiguidade a tratar sobre retas tangentes. Por exemplo, as proposições 33 e 34 do Livro I da obra *Cônicas*, de Apolônio de Perga ($\approx$ 225 a.C.), resolve o problema da tangente no caso em que a curva é uma cônica (isto é, uma elipse, hipérbole ou parábola). Para Apolônio, a tangente a

Data de aceitação: 1 de outubro de 2023.
Palavras chave. Equações Diferenciais. História da Matemática. Cálculo Diferencial.

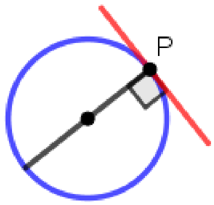

Figura 1. Como demonstrou Euclides, a reta que passa pelo ponto P de um círculo perpendicularmente ao diâmetro que tem P como extremidade é tangente ao círculo.

uma cônica era uma reta que possuía um ponto em comum com ela, mas que ficava inteiramente do lado de fora dela ([21], p. 94). A descrição da construção geométrica de Apolônio pode ser vista em [9].

O estudo das tangentes subsistiu através do tempo até que, no século XVII, diversos matemáticos dispunham de métodos próprios para determiná-las. Por exemplo, os métodos de Isaac Barrow, René Descartes e Pierre de Fermat podem ser vistos em [23]. Na verdade, o método de Descartes (publicado em sua obra *A Geometria*, que teve importante papel no desenvolvimento da geometria analítica) não abordava o problema da tangente diretamente, mas sim o problema equivalente de determinar a reta normal (perpendicular à tangente). A importância desse problema foi manifestada por Descartes do seguinte modo:

> E ouso dizer que esse é o problema mais útil e mais geral, não somente do qual tenho conhecimento, mas também aquele que sempre desejei conhecer na geometria ([24], p. 405).

Dispondo de métodos para determinar tangentes a curvas dadas, alguns matemáticos começaram a pensar no problema inverso – que ficou conhecido como **problema** (ou **método**) **inverso das tangentes**: determinar uma curva a partir de propriedades conhecidas de suas tangentes ([15], p. 1). Em correspondência destinada a Christiaan Huygens em 1691, o matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz manifestou a importância desse problema do seguinte modo:

> De tudo o que nos resta para investigar em geometria, nada é mais importante do que o método inverso das tangentes, ou seja: dada uma propriedade das tangentes de uma curva, ser capaz de encontrar a construção da própria curva. Porque, na aplicação da geometria à física, acontece com bastante frequência que uma curva é conhecida a partir da propriedade de suas tangentes, de onde sua construção e outras propriedades devem ser investigadas ([27], p. 67).

Como será visto nas próximas seções, o problema da tangente e o problema inverso das tangentes estão intimamente relacionados ao surgimento das equações diferenciais, enquanto nome e enquanto conceito.

2. O significado de "diferencial" no Cálculo de Leibniz

Como será visto na Seção 3, a expressão "equação diferencial" foi introduzida por Leibniz. Assim, para compreender o seu significado, é necessário começar compreendendo o significado de "diferencial" no Cálculo de Leibniz – aqui entendido como sendo o Cálculo introduzido por Leibniz publicamente em [11], desvendado e praticado principalmente pelos irmãos suiços Jakob e Johann Bernoulli e apresentado numa versão mais madura pelo francês Guillaume François Antoine de l'Hôpital (aluno de Johann) em [12].

Em linhas gerais, o objetivo do Cálculo moderno é o estudo de funções por meio de derivadas e integrais (as duas últimas definidas através de limites). Entretanto, na ocasião de seu surgimento no final do século XVII, o objetivo do Cálculo de Leibniz era outro. Conforme aponta [13] (p. 5), a perspectiva era geométrica e o objetivo principal era o estudo de curvas – o que fica explícito no título do primeiro livro de Cálculo Diferencial da história, publicado em 1696 por l'Hôpital: *Análise do infinitamente pequeno, para o entendimento das linhas curvas* ([25], p. v). No contexto da época, a análise era feita por meio do estudo de equações que envolviam diversas variáveis geométricas definidas a partir de um ponto variável sobre a curva, dentre as quais estão a abscissa, a ordenada, a tangentes e a subtangente – mostradas na Figura 2 (num diagrama moderno, para facilitar a compreensão).

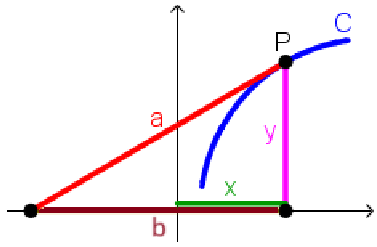

Figura 2. No Cálculo de Leibniz, o estudo de uma curva C era feito por meio meio de variáveis definidas geometricamente a partir de um ponto variável P sobre curva, como por exemplo a ordenada y (segmento vertical que liga P ao eixo horizontal), a abscissa x (segmento horizontal que liga a base da ordenada ao eixo vertical), a tangente a (veja descrição na Figura 3) e a subtangente b (segmento horizontal que liga a ordenada à intersecção da tangente com o eixo horizontal).

Nessa situação, a curva C era entendida como sendo formada por infinitos segmentos de comprimentos "infinitamente pequenos" ligando pontos "infinitamente próximos" e a tangente no ponto P como sendo o prolongamento do segmento que contém P ([25], p. xlix e 11; [13], p. 14-15; [26], p. 49). A Figura 3 ilustra essa ideia (que não é satisfatória para os padrões atuais).

A ideia de "infinitamente pequeno" aparecia relacionada não só à definição de tangente mas também ao conceito de "diferencial", o qual foi introduzido publicamente por Leibniz num artigo publicado em 1684 no periódico científico da época *Acta Eruditorum* com o título *Novo método para máximos e mínimos, bem como para tangentes, que não se detém ante as quantidades fracionárias ou irracionais,*

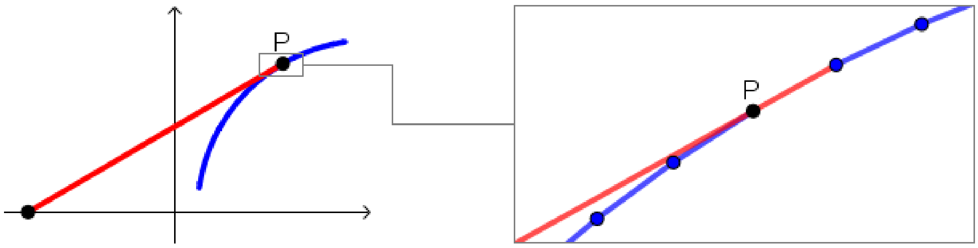

FIGURA 3. No Cálculo de Leibniz, uma curva era concebida como sendo formada por segmentos de reta ligando pontos "infinitamente próximos" e a tangente num ponto P como sendo obtida pelo prolongamento do segmento "infinitamente pequeno" que contém P. Note que prolongando o segmento à esquerda de P conforme a figura, obtém-se um segmento diferente daquele que está indicado como tangente de modo que a tangente parece não estar bem definida; isso ocorre porque não é possível desenhar dois pontos "infinitamente próximos" (conceito esse que tem significado apenas intuitivo e não é satisfatório para os padrões atuais).

e é um singular gênero do cálculo para estes problemas ([26], p. 47). Nesse texto, hoje considerado a primeira publicação sobre Cálculo Diferencial da história ([3], p. 403), Leibniz:

(i) Definiu o diferencial dy de uma ordenada y como sendo o segmento de reta que satisfaz a proporção $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{b}$, onde dx é um segmento dado e b é a subtangente ([13], p. 63).
(ii) Forneceu um conjunto de regras para a determinação de diferenciais (de somas, produtos, quocientes e potências) chamando-o de *cálculo diferencial*, sendo esta a primeira ocorrência da expressão que nomeia a disciplina até os dias de hoje ([21], p. 377; [5], p. 271).
(iii) Apresentou aplicações na determinação de extremos (onde usou a condição $dy = 0$), de pontos de inflexão (onde usou a condição $d\,dy = 0$) e de tangentes ([21], p. 377; [5], p. 271).

Apesar desses tópicos serem familiares aos estudantes atuais de Cálculo, o artigo não era fácil de entender na época de sua publicação tendo sido descrito como "um enigma ao invés de uma explicação" por Johann Bernoulli ([7], p. 355-356). Foi só a partir de 1696, por intermédio do livro de l'Hôpital, que o método de Leibniz começou a se popularizar; antes dessa data pouquíssimas pessoas o entendiam – dentre as quais os irmãos Bernoulli ([25], p. v-vi) que, apesar da dificuldade do artigo, foram capazes (nas palavras do próprio Johann) de "dominar todos os seus segredos em poucos dias" ([7], p. 361).

A palavra originalmente utilizada por Leibniz, hoje traduzida como "diferenciais", foi *differentiae* – que em latim significa "diferenças" ([5], p. 271). Entretanto, o significado das "diferenças" nesse contexto não ficou claro porque a conexão entre sua definição (conforme o item (i) acima) e as quantidades "infinitamente pequenas" não foi feita de forma clara por Leibniz nesse primeiro artigo ([13], p. 63-64).

A mesma palavra "diferenças", em sua versão francesa *différences*, foi utilizada no livro de l'Hôpital ([25], p. 2) – mas dessa vez o significado foi dado com maior clareza. Nesse livro, que foi fortemente influenciado por Johann Bernoulli ([25], p. x), o diferencial de uma variável é definido como sendo a "porção infinitamente pequena pela qual uma quantidade variável continuamente aumenta ou diminui" ([25], p. 2) e a interpretação geométrica é dada explicitamente: o diferencial dy é a diferença entre a ordenada y e uma ordenada tomada infinitamente próxima enquanto dx é a diferença entre as respectivas abscissas. O ponto crucial é que, em razão das ordenadas serem tomadas infinitamente próximas, a hipotenusa do triângulo de lados dx e dy está sobre a tangente a de modo que (por semelhança de triângulos) vale a relação $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{b}$ ([25], p. 11). A Figura 4 ilustra essa ideia (que está fortemente baseada na concepção da curva como sendo formada por segmentos de reta infinitamente pequenos e da tangente como sendo o prolongamento de um desses segmentos).

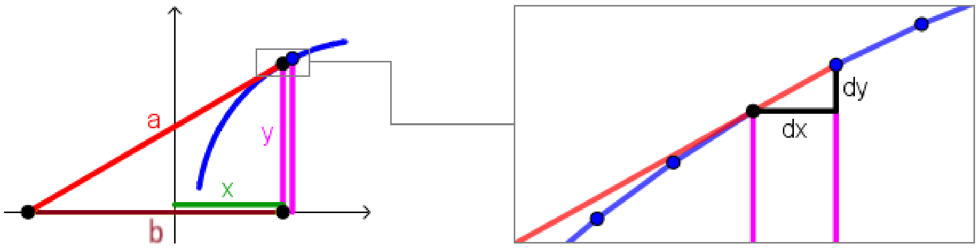

FIGURA 4. Interpretação geométrica dos diferenciais dx e dy no Cálculo de Leibniz. Como dx é "infinitamente pequeno", a hipotenusa do triângulo de catetos dx e dy cai sobre a tangente a (prolongamento de um segmento que une dois pontos "infinitamente próximos") de modo que o triângulo de lados dx e dy é semelhante ao triângulo de lados b e y.

3. ORIGEM DA EXPRESSÃO "EQUAÇÃO DIFERENCIAL"

Segundo [6] (p. 3), a expressão "equação diferencial" (no original em latim, *aequatio differentialis*) foi utilizada pela primeira vez por Leibniz em 1676 para designar uma equação que relaciona duas variáveis x e y com seus diferenciais dx e dy. A obra mencionada não cita qual é o texto de Leibniz de 1676, mas um registro de uso com a referida acepção pode ser encontrado em [11] – artigo de Leibniz de 1684 que, como visto na Seção 2, introduziu publicamente o conceito de "diferencial". Nesse texto de Leibniz, a expressão *aequatio differentialis* (equação diferencial) ocorre duas vezes: uma na página 469 e uma na página 472. Na primeira ocorrência, lê-se

> Daqui pode-se escrever com qualquer equação proposta sua **equação diferencial** ([26], p. 49; grifo nosso).

Em seguida, Leibniz explica como fazer isso: substituindo cada termo da equação por sua "quantidade diferencial" que é calculada conforme o conjunto de regras previamente apresentado ([26], p. 49). Esse procedimento pode ser visto como uma versão ancestral do moderno "derivar os dois lados da equação" e fica ilustrado na segunda ocorrência da expressão:

> Portanto teremos ω igual $h\sqrt{l} + r\sqrt{m}$, cuja **equação diferencial** desta equação (suposto que $d\omega$ seja 0, no caso de mínimo) é 0 igual a $+hdl : 2\sqrt{l} + rdm : 2\sqrt{m}$, segundo as regras de nosso cálculo dadas ([26], p. 51; grifo nosso).

Note que, interpretando os diferenciais com uma perspectiva moderna, o resultado descrito na citação precedente pode ser obtido derivando $\omega(x) = h\sqrt{l(x)} + r\sqrt{m(x)}$, igualando a zero e multiplicando os dois lados por dx – entretanto Leibniz não dispunha do conceito de derivada ([13], p. 8) de modo que sua ideia de diferencial, apesar da semelhança de notação e nomenclatura, difere da moderna; os diferenciais que Leibniz tinha em mente eram as quantidades "infinitamente pequenas" descritas na Seção 2.

Diante do exposto, parece correto afirmar que a expressão "equação diferencial":

- Foi concebida por Leibniz com significado original "equação envolvendo diferenciais" (onde os "diferenciais" são entendidos conforme descritos na Seção 2).
- Foi publicada pela primeira vez em [11] (primeira publicação de Leibniz sobre o Cálculo Diferencial que é, também, a primeira da história sobre o tema) de modo que, no que se refere a publicações oficiais, nasceu junto com o próprio Cálculo.
- Surgiu no contexto do problema da tangente, pois é com a resolução e aplicações desse tipo de problema que [11] se preocupa.

4. Origem do conceito de "equação diferencial"

A raiz do conceito moderno de equação diferencial está no que era chamado "problema inverso das tangentes". São exemplos desse tipo de problema:

- **Problema da isócrona (ou tautócrona):** Determinar a curva sobre a qual um peso sob influência apenas da gravidade (desconsideradas quaisquer outras forças como, por exemplo, o atrito) gasta sempre o mesmo tempo para atingir o ponto mais baixo, independentemente do ponto de partida (veja a Figura 5). Esse problema, que já tinha sido resolvido por Huygens em 1659, foi resolvido em 1690 com o Cálculo de Leibniz por Jakob Bernoulli ([20], p. 97).
- **Problema da catenária:** Determinar a curva gerada por um cabo flexível e inextensível fixado pelas extremidades e sujeito apenas à força de seu próprio peso (veja a Figura 6). Em 1638, Galileu Galilei tinha sugerido que essa curva seria uma parábola – o que Huygens demostrou estar incorreto em 1646. Em 1691, Leibniz e Johann Bernoulli encontraram a solução correta de forma independente ([15], p. 5-6).

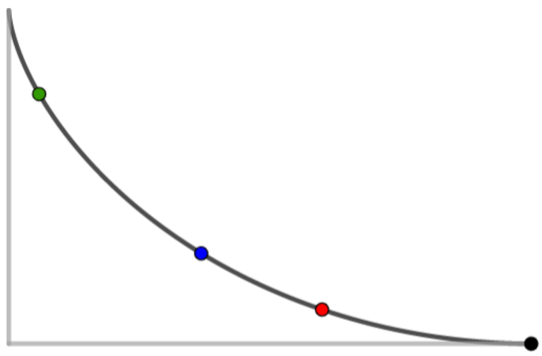

FIGURA 5. Sobre uma rampa no formato da curva isócrona e sob influência apenas da gravidade, bolinhas que partem de posições distintas chegam sempre juntas no ponto final. Veja uma ilustração dinâmica no link https://www.geogebra.org/m/p7efrp8b.

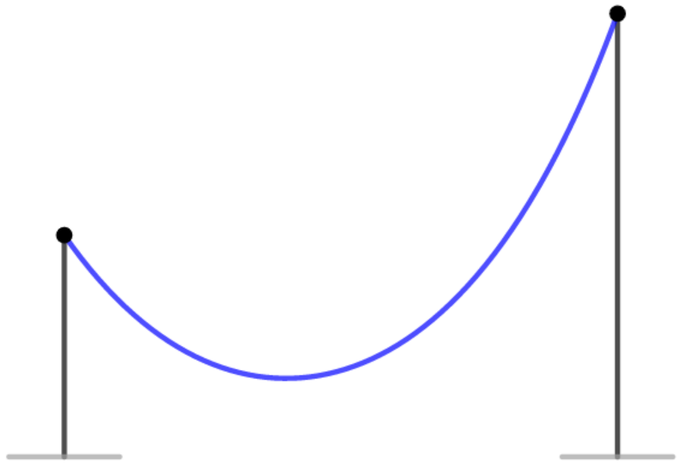

FIGURA 6. A catenária é a curva gerada por cabos flexíveis e inextensíveis suspensos entre postes. Seu formato muda a depender da altura dos postes e da distância entre eles. Veja uma ilustração dinâmica no link https://www.geogebra.org/m/udqxbhs5.

- **Problema da tractriz:** Determinar a curva gerada por um peso puxado por um cabo inextensível que tem a outra extremidade movida ao longo de uma reta que não contém o peso (veja a Figura 7). Esse problema foi proposto por Claude Perrault a Leibniz na década de 1670, que o resolveu e publicou uma solução utilizando seu Cálculo em 1693 ([14], p. 1 e 22).
- **Problema da braquistócrona:** Determinar a curva sobre a qual um peso sob influência apenas da gravidade (desconsideradas quaisquer outras forças como, por exemplo, o atrito) desliza de um ponto a outro (que está fora da mesma vertical) no menor tempo possível (veja a Figura 8). Esse problema foi resolvido por Johann Bernoulli e por ele proposto em 1696 como um desafio aos matemáticos da época, dentre os quais enviaram soluções corretas: Leibniz, L'Hôpital (com ajuda de Johann Bernoulli, que recebia

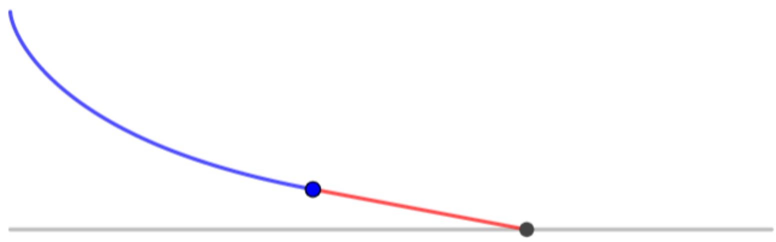

FIGURA 7. A tractriz é a curva gerada por um peso atado a uma corda inextensível que tem a outra extremidade puxada ao longo de uma reta que não contém o peso. Veja uma ilustração dinâmica no link https://www.geogebra.org/m/jktckreq.

por sua tutoria), Jakob Bernoulli (certamente sem ajuda de Johann, dado que a relação entre os irmãoes era conflituosa) e Isaac Newton (que tinha desenvolvido seu próprio Cálculo, independentemente de Leibniz). A solução de Newton foi enviada anonimamente, mas Johann Bernoulli identificou seu dono afirmando ser capaz de "reconhecer o leão por sua garra" ([20], p. 104-106).

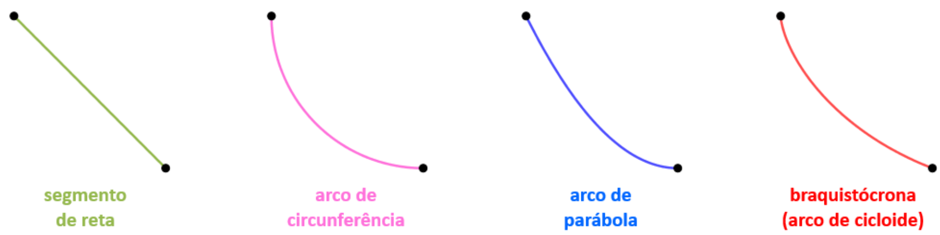

FIGURA 8. Dentre todos os formatos possíveis de rampa ligando dois pontos dados (não ambos sobre a mesma vertical), a braquistócrona é aquela sobre a qual uma bolinha sob influência apenas da gravidade chega ao fim no menor tempo possível. Veja uma ilustração dinâmica no link https://www.geogebra.org/m/tkm3gmx5.

A relação entre os enunciados apresentados e as tangentes (o que justifica eles serem chamados de "problemas inversos das tangentes") não é óbvia. Para visualizá-la, é necessário reformular os problemas. Dentre os exemplos vistos, a reformulação mais simples é a da tractriz: como (em qualquer curva) a tangente tem a direção do movimento, e como (na tractriz) o movimento do peso se dá na direção do cabo que o puxa, o cabo é tangente em cada ponto da curva descrita. Assim, resolver o problema da tractriz equivale a determinar a curva que possui todas as tangentes com o mesmo comprimento (onde a tangente é entendida como definida na Seção 2; veja a Figura 9).

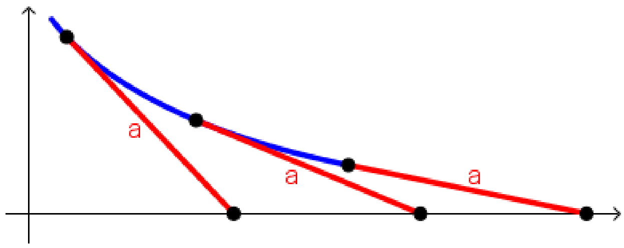

Figura 9. Na tractriz, todas as tangentes possuem o mesmo comprimento.

Em termos de diferenciais (veja a Figura 10), obtém-se:

$$\frac{-dy}{dx} = \frac{y}{b} \qquad \text{(semelhança de triângulos)}$$

$$dx = -\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}\, dy \qquad \text{(Teorema de Pitágoras)}$$

que (conforme [14], p. 22) foi a equação obtida por Leibniz.

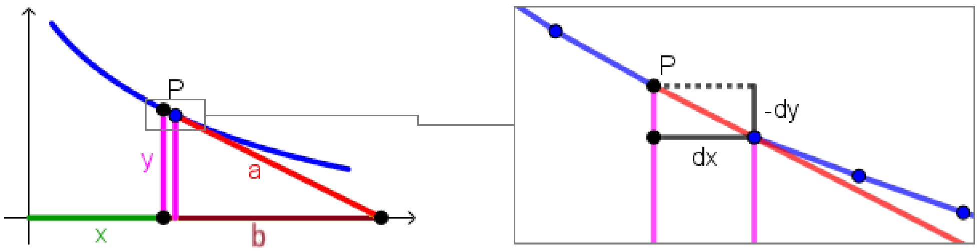

Figura 10. Interpretação geométrica dos diferenciais para a tractriz. Nesse caso, o lado vertical do "triângulo infinitesimal" mede $-dy$ em razão de dy representar um decréscimo.

Para as demais curvas, argumentos mais sofisticados produzem

$$(1) \qquad dy\sqrt{b^2y - a^3} = dx\sqrt{a^3}, \qquad dy = \frac{adx}{\sqrt{x^2 + 2ax}} \qquad \text{e} \qquad dy = dx\sqrt{\frac{x}{a - x}}$$

que (conforme [22], p. 471; [15], p. 6 e 23) foram as equações encontradas por Jakob Bernoulli para a isócrona e por Johann Bernoulli para a catenária e braquistócrona, respectivamente.

Note que as igualdades vistas são "equações diferenciais" no sentido original exposto na Seção 3 ("equações envolvendo diferenciais"). A diferença é que, nesses casos, a curva que gera a equação não é conhecida. Foi o desenvolvimento do estudo desse tipo de equação que culminou no conceito atual. Na época, "determinar a curva" (o que pode ser interpretado como sendo uma versão do moderno "resolver a equação") significava apresentar uma construção geométrica para ela ([15], p. 5). Por exemplo, da equação da braquistócrona Johann Bernoulli concluiu que curva procurada era uma cicloide (veja a Figura 11). Como a cicloide era uma curva de construção conhecida, o problema era considerado resolvido.

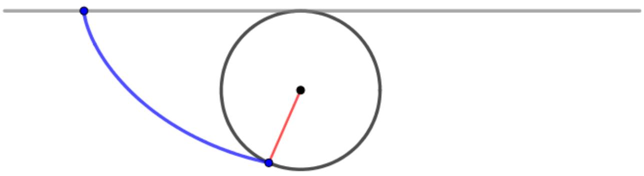

FIGURA 11. A cicloide é a curva gerada por um ponto de um círculo que rola sobre uma reta. Veja uma ilustração dinâmica no link https://www.geogebra.org/m/ctt62ymn.

Entretanto, nem sempre a equação diferencial produzia uma curva já conhecida de construção simples. Assim, em geral, tentava-se utilizar a equação diferencial para deduzir uma construção da curva por meio do processo de "quadratura" ([14], p. 21-22), isto é, construção de retângulos com áreas iguais a de regiões limitadas por curvas. Por exemplo: da equação da catenária, Johann Bernoulli obteve uma construção baseada na quadratura da hipérbole (veja Figura 12).

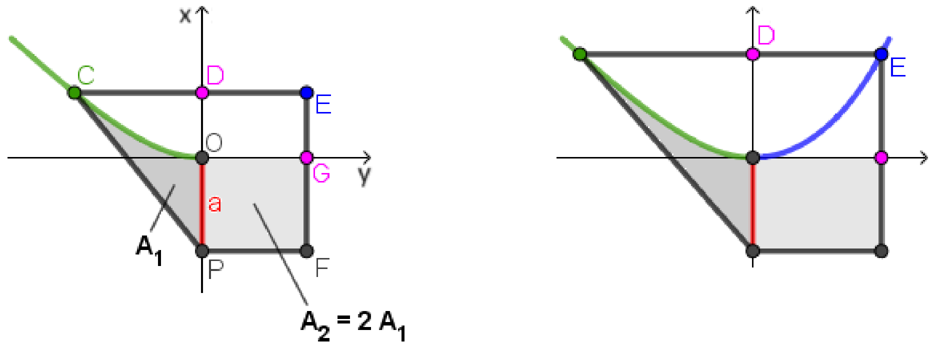

FIGURA 12. Construção da catenária pela quadratura da hipérbole por Johann Bernoulli. Seu objetivo era construir uma curva satisfazendo a segunda equação de (1), onde $a > 0$, pois ele já tinha provado que essa era a equação diferencial da catenária. A descrição original e sua explicação podem ser vistas em [16]; aqui, para facilitar a compreensão, apresenta-se a ideia da construção utilizando notações modernas: Seja O a origem. Chamando o eixo horizontal de y e o vertical de x, trace a hipérbole $(x+a)^2 - y^2 = a^2$, o segmento OP de comprimento a sobre a parte negativa do eixo vertical e tome um ponto $D = (0, x)$ sobre a parte positiva do mesmo eixo. Trace DC horizontal que encontra a hipérbole em $C = (-\sqrt{x^2 + 2ax}, x)$. Marque $G = (y, 0)$ de modo que a área do retângulo $GOPF$ seja duas vezes a área da região OCP. Variando D, o ponto $E = (y, x)$ descreve uma curva. Para cada ponto (y, x) dessa curva, tem-se (por construção) $ya = 2[\text{área}(PDC) - \text{área}(ODC)] = (x + a)\sqrt{x^2 + 2ax} - 2\int_0^x \sqrt{t^2 + 2at}\, dt$. Daí, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a}\left[\sqrt{x^2 + 2ax} + \frac{(x+a)^2}{\sqrt{x^2+2ax}} - 2\sqrt{x^2 + 2ax}\right] = \frac{a}{\sqrt{x^2+2ax}}$. Isso mostra que a curva construída de fato satisfaz a equação diferencial desejada.

Construções como a de Johann Bernoulli, baseadas na quadratura de círculos ou hipérboles, eram consideradas satisfatórias. Porém, construções baseadas na quadratura de curvas mais complicadas não eram consideradas soluções completas ([14], p. 23; [27], p. 153-154), o que fica ilustrado pela seguinte declaração de Leibniz em correspondência destinada a Huygens em 1694:

> Eu sou da sua opinião, senhor, no que você acredita que o problema ainda não está bem resolvido quando apenas tem-se reduzido-o a alguma quadratura ([27], p. 154).

Conforme aponta [15] (p. 8-9), com o passar do tempo, a perspectiva mudou: o Cálculo deixou de ser visto apenas como uma ferramenta para estudar curvas, as equações diferenciais passaram a ser estudadas de forma independente (sem conexão com problemas geométricos) e a construção das curvas associadas às equações deixou de ser requerida – o que ocorreu devido à influência do matemático suíço Leonhard Euler que considerou o Cálculo como "sendo sobre *expressões formais* e substituindo o conceito de curva pelo de *função*". A perspectiva de Euler, que entendia não só o Cálculo mas também a matemática em geral como sendo "uma ciência de expressões formais", "reestruturou amplamente a teoria matemática". No contexto das equações diferenciais ele "não via necessidade de uma interpretação geométrica".

Um registro dessa mudança de perspectiva é a obra *Fundamentos do Cálculo Integral*, de Euler, que busca apresentar como obter a relação entre x e y a partir de uma dada relação entre dx e dy ([19], p. 1) ou, em palavras modernas, busca apresentar métodos de resolução de diversos tipos de equações diferenciais. Por exemplo, no contexto da abordagem de Euler, a solução da equação $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{y}$ é a expressão $\ln(x-y) = C - \frac{x}{x-y}$ ([19], p. 432-433); nenhum apelo geométrico é utilizado, nem na formulação do problema nem na apresentação de sua solução.

Entretanto, a abordagem de Euler possui uma característica substancialmente diferente da moderna: o entendimento dos diferenciais. Euler ainda trabalhava com a ideia introduzida por Leibniz, de grandeza infinitamente pequena. Aqui está como ele os descrevia:

> [...] uma vez que eles são sem quantidade, eles também são chamados de *infinitamente pequenos*. Portanto, por sua natureza, eles devem ser interpretados como absolutamente nada [...] ([18], p. vii).

Assim, apesar da abordagem de Euler ter muita similaridade com parte daquilo que geralmente é feito modernamente num primeiro curso de equações diferenciais, a formulação conceitual se assentava numa perspectiva teórica bastante distinta.

Com o passar do tempo, o conceito de derivada se desenvolveu e as noções de "diferenciais" e de "equações diferenciais" foram reformuladas em termos dele. Por exemplo, na década de 1820 o matemático francês Augustin-Louis Cauchy já utilizava formulações mais próximas das atuais: a derivada $y' = f'(x)$ de $y = f(x)$ foi definida como sendo o limite (caso existisse) da razão $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ ([4], p. 11-12), os diferenciais dy e dx foram definidos também em termos de limites de tal modo que satisfaziam a relação usual $dy = f'(x)dx$ ([4], p. 17) e as equações diferenciais foram definidas como sendo equações envolvendo esses diferenciais ou derivadas ([1], p. 1). Entretanto, a noção de "limite" utilizada por Cauchy (ver [10, 17]) não era baseada na definição ε-δ exatamente como é apresentada modernamente (que viria a ser introduzida pelo matemático alemão Karl Weierstrass apenas em 1861). Exceto pelo rigor na definição de limite implicitamente utilizada na definição de "equação diferencial", a mesma definição atual já estava em circulação em meados do século XIX. Por exemplo, a seguinte definição que poderia fazer parte de um livro introdutório moderno data de 1870:

> Chamamos de *equação diferencial de ordem* m a uma relação
> $$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^my}{dx^m}\right) = 0$$
> entre uma variável x, a função y dessa variável e as derivadas de diversas ordens dessa função em relação a essa variável até a m-ésima inclusive ([2], p. 211).

5. Considerações finais

Muitas notações, nomenclaturas e técnicas de cálculos que surgiram nos séculos XVII e XVIII no contexto das equações diferenciais são utilizadas, praticamente sem alterações, até os dias de hoje. Entretanto, rigorosamente falando, do ponto de vista conceitual as equações diferenciais da atualidade são coisas diferentes das equações diferenciais dos matemáticos dos referidos séculos: devido ao aperfeiçoamento natural pelos quais os conceitos matemáticos passam no decurso do tempo em busca do aumento da generalidade, precisão e rigor, aquilo que originalmente foi chamado de "equação diferencial" não coincide com aquilo que modernamente recebe esse nome; aquilo que originou o que hoje recebe o nome de "equação diferencial" nem sempre foi assim chamado (tendo, inicialmente, recebido o nome de problema inverso das tangentes). O objetivo do presente texto foi destacar fatos e personagens que ilustram momentos distintos dessa transição – desde o surgimento da expressão equação diferencial no final do século XVII até a formulação moderna do conceito que apareceu em meados do século XIX.

Agradecimentos

O autor agradece ao parecerista anônimo por seus comentários que ajudaram a melhorar a versão inicial do trabalho.

Referências

[1] Augustin-Louis Cauchy. *Équations différentielles ordinaires. Cours inédit: fragment* Paris: Études Vivantes, 1981.

[2] Abel Souchon. *Elements de calcul differentiel et de calcul integral. Volume 2.* Paris: Arthus-Bertrand, 1870.

[3] Carl Benjamin Boyer. *A history of mathematics.* 2. ed. John Wiley & Sons, Inc., 1991.

[4] Dennis M. Cates. *Cauchy's Calcul Infinitésimal. An Annotated English Translation.* Switzerland: Springer, 2019.

[5] Dirk Jan Struik. *A Source Book in Mathematics, 1200-1800.* New Jersey: Princeton University Press, 1986.

[6] Edward Lindsay Ince. *Ordinary Differential Equations.* Longmans, Green and Company Limited, 1927.

[7] Enrique A. González-Velasco. *Journey through Mathematics. Creative Episodes in Its History.* New York: Springer, 2011.

[8] Euclides, *Os Elementos*. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

[9] Gabriela R. Sanchis, *Historical Activities for the Calculus Classroom, Module 2: Tangent Lines Then and Now*. Disponível em: https://old.maa.org/press/periodicals/convergence/historical-activities-for-calculus-module-2-tangent-lines-then-and-now . Acesso em: 22 mar. 23. https://old.maa.org/press/periodicals/convergence/historical-activities-for-calculus-module-2-tangent-lines-then-and-now

[10] Gordon M. Fisher. *Cauchy and the infinitely small*. Historia Mathematica, v. 5, n. 3, p. 313-331, 1978.

[11] Gottfried Wilhelm Leibniz. *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus.* Acta Eruditorum (Oct. 1684), p. 467-473, 1684.

[12] Guillaume François Antoine de l'Hôpital. *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes.* Paris: Imprimerie Royale, 1696.

[13] H. J. M. Bos. *Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus*. Archive for History of Exact Sciences, v. 14, p. 1-90, 1974.

[14] H. J. M. Bos. *Tractional Motion and the Legitimation of Transcendental Curves*. Centaurus, v. 31, p. 9-62, 1988.

[15] Jeremy Gray. *Change and Variations. A History of Differential Equations to 1900*. Switzerland: Springer Nature, 2021.

[16] Johann Bernoulli. Translated by William A. Ferguson, Jr. *Lectures on The Integral Calculus*. 21st Century Science & Technology, Spring 2004. Disponível em: https://21sci-tech.com/translations/Bernoulli.pdf. Acesso em: 29 abr. 23.

[17] Judith V. Grabiner. *Who Gave You the Epsilon? Cauchy and the Origins of Rigorous Calculus.* The American Mathematical Monthly, v. 90, n. 3, p. 185-194, 1983.

[18] Leonhard Euler. *Foundations of Differential Calculus*. Translated by John D. Blanton. New York: Springer-Verlag New York, Inc., 2000.

[19] Leonhard Euler. *Institutionum calculi integralis*. Translated and annotated by Ian Bruce, 2010. Disponível em: http://www.17centurymaths.com/contents/euler/intcalvol1/part2ch1.pdf. Acesso em: 30 abr. 23.

[20] Margaret B. W. Tent. *Leonhard Euler and the Bernoullis: mathematicians from Basel.* Natick, MA: A K Peters, Ltd., 2009.

[21] Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Volume 1. New York: Oxford University Press, 1972.

[22] Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Volume 2. New York: Oxford University Press, 1972.

[23] Raphael Alcaires de Carvalho. *Descartes, Barrow e Fermat: método das tangentes*. Revista do Professor de Matemática, v. 75, p. 34-37, 2011. Disponível em: https://www.rpm.org.br/cdrpm/75/9.html. Acesso em: 22 mar. 23.

[24] René Descartes, *Discurso do método e ensaios* . Organizado por Pablo Rubén Mariconda. São Paulo: Editora UNESP Digital, 2018.

[25] Robert E. Bradley; Salvatore J. Petrilli; C. Edward Sandifer. *L'Hôpital's Analyse des infiniments petits: An Annotated Translation with Source Material by Johann Bernoulli.* Birkhäuser, 2015.

[26] Thiago Augusto Silva Dourado. *Cálculo Diferencial de Gottfried Wilhelm Leibniz*. Revista Brasileira de História da Matemática, v. 22, n. 44, p. 45-60, 2022. Disponível em: https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/377. Acesso em: 26 mar. 23.

[27] Viktor Blåsjö. *Transcendental Curves in the Leibnizian Calculus*. Duxford: Elsevier/Academic Press, 2017.

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Seropédica, RJ
E-mail address: pedrorobertodelima@ufrrj.br