

## QUANTOS OCTAEDROS CONVEXOS EXISTEM?

ROBERTO RIBEIRO PATERLINI

RESUMO. O nome *octaedro* significa “poliedro com oito faces”, podendo ser regular ou não, convexo ou não. Neste texto consideramos apenas poliedros convexos. Existe um único octaedro regular, um sólido de Platão. Existem dois octaedros semirregulares: o prisma hexagonal e o tetraedro 4-truncado, sendo este último o único sólido de Arquimedes com oito faces. Existem quatro octaedros que são sólidos de Johnson, com faces regulares. Existem ainda diversos outros octaedros convexos. Veremos, sem lançar mão de muitas técnicas, como são enumerados e classificados os octaedros convexos mediante operações em grafos planares. Nossas observações se aplicam também à classificação e enumeração dos poliedros convexos em geral. Este texto se destina a estudantes universitários.

### 1. INTRODUÇÃO

De acordo com o que se lê em [24], pág. 155, Jacob Steiner, em 1832, referindo-se a poliedros convexos, e observando que existem 1 poliedro com quatro faces, 2 com cinco faces, 7 com seis faces, perguntou: Quantos poliedros diferentes são possíveis com sete faces, oito faces, nove faces, e assim por diante?

Segundo relata B. Grünbaum em [9], L. Euler investigou esse problema em 1752. Ele generalizou a relação  $F - A + V = 2$  para todos os poliedros convexos, mas não foi bem sucedido em resolver o problema de sua enumeração e classificação. Pelo que vimos, Jacob Steiner, por ser um geômetra famoso, estimulou o estudo desse assunto. Explicaremos mais adiante as ideias de alguns matemáticos. Antes disso fazemos observações relativas ao ensino de poliedros e à sua classificação.

Não sei quanto ao leitor, mas eu, no início do meu aprendizado de Matemática, conhecia apenas o octaedro regular, um sólido de Platão. Eu o chamava de “octaedro”, sem me preocupar em acrescentar a palavra “regular”. Posteriormente, ao estudar Geometria Espacial, descobri que existia uma infinidade de figuras similares ao “meu” octaedro.

---

Data de aceitação: 23 de maio de 2023.

*Palavras chave.* Poliedros; poliedros convexos; enumeração e classificação de poliedros convexos; octaedros.

Sabemos que um plano reparte o espaço em dois lados. Tomando um vértice em cada lado, e tomando um quadrilátero no plano, podemos desenhar uma infinidade de octaedros, como os da Figura 1. Esses octaedros têm similaridades com o octaedro regular, por exemplo, todas as faces são triangulares. Dependendo da posição dos dois vértices fora do plano, o octaedro pode ser convexo ou não. O quadrilátero pode ser não convexo, e, nesse caso, obtemos octaedros não convexos. Outra variação: o quadrilátero referido não precisa ser planar, já que ele não é uma face do poliedro. Ainda sob o ponto de vista métrico, existem infinitos octaedros regulares, pois podemos variar a medida (comum) de suas arestas.

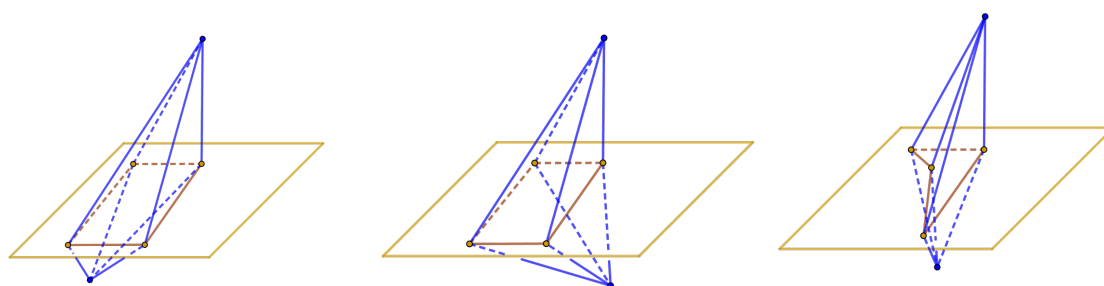


FIGURA 1. Octaedros “parecidos” com o octaedro regular, com medidas diferentes nas arestas e nos ângulos.

Para encontrar um octaedro com faces não todas triangulares basta considerar a pirâmide heptagonal. Também se trata de um octaedro, no qual uma das faces é um heptágono (e as outras são triangulares), como se vê no desenho da direita da Figura 2. Mas não me lembro de ter posto atenção nisso no tempo em que era estudante, pois nunca tive a ideia de me fazer a pergunta de Steiner, e ninguém tampouco me estimulou a ela.

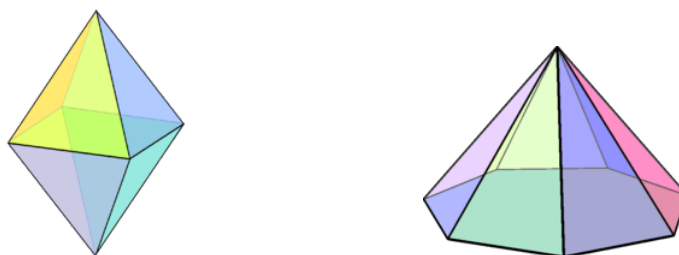


FIGURA 2. À esquerda, desenho do octaedro convencional. À direita, desenho da pirâmide heptagonal, que também é um octaedro. Figuras obtidas de [28] e [27], respectivamente.

Levando em conta as construções da Figura 1, vemos que existem infinitos octaedros. Por outro lado, levando em conta a Figura 2, vemos que, de um outro ponto de vista, talvez não existam muitos. Por exemplo, podemos constatar, usando desenhos, que um octaedro não pode ter faces com oito lados ou mais.

Certamente que a pergunta de Steiner se referia a esse segundo ponto de vista, e assim precisamos esclarecer isso. Mas, inicialmente, vejamos exemplos de octaedros.

## 2. OS OCTAEDROS CONVEXOS MAIS CONHECIDOS

Para ver exemplos de octaedros percorremos as famílias mais importantes de poliedros convexos. Começamos com os poliedros regulares, ou sólidos de Platão. Existem cinco poliedros regulares, e o único com oito faces é o octaedro regular. Ele está representado na Figura 2, desenho da esquerda. O octaedro regular é também chamado de bipirâmide quadrada regular, pois pode ser visto como a junção, por suas bases, de duas pirâmides quadradas com faces regulares. Ele é ainda o único deltaedro com oito faces (deltaedros são poliedros convexos nos quais todas as faces são triângulos equiláteros; confira [18], pág. 177).

A seguinte família importante de poliedros são os semirregulares. São eles: os prismas regulares, os antiprismas regulares, e os sólidos de Arquimedes, estes em número de 13. Para obter mais detalhes consulte o texto [16]. O único prisma com oito faces é o hexagonal, representado na Figura 3, desenho da esquerda. O único antiprisma octaédrico é o triangular, equivalente ao octaedro regular. O tetraedro 4-truncado (com faces regulares) é o único sólido arquimediano com oito faces, e está representado na Figura 3, desenho da direita.



FIGURA 3. À esquerda, modelo do prisma hexagonal (com faces regulares). À direita, modelo do tetraedro 4-truncado (com faces regulares). Figuras obtidas de [28].

A próxima família importante de poliedros são os chamados sólidos de Johnson. Norman W. Johnson elaborou, em 1966, uma lista de 92 poliedros convexos com faces regulares, excluídos os regulares e os semirregulares. Para ver a lista completa desses sólidos consulte o título *Sólidos de Johnson* de [28]. Examinando essa lista vemos que ela tem quatro octaedros: a cúpula triangular, o girobiprisma triangular, o prisma triangular aumentado e o icosaedro tridiminuído, apresentados nas Figuras 4 e 5.

Um octaedro famoso que não faz parte dessas famílias é o trapezoedro triangular truncado, apresentado na Figura 6. Esse poliedro, segundo alguns estudos, é o que está desenhado na clássica pintura *Melencolia I* de 1514, de autoria do pintor alemão renascentista Albrecht Dürer. Para ler mais detalhes consulte o título *Truncated triangular trapezohedron* de [28].

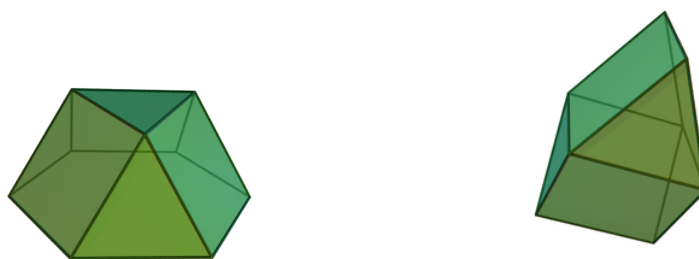


FIGURA 4. Da esquerda para a direita, os sólidos de Johnson J3 cúpula triangular e J26 girobiprisma triangular. Figuras obtidas de [28].



FIGURA 5. Da esquerda para a direita, os sólidos de Johnson J49 prisma triangular aumentado e J63 icosaedro tridiminuído. Figuras obtidas de [28].

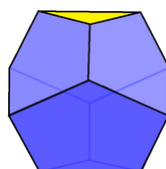


FIGURA 6. O trapezoedro triangular truncado, ou sólido de Dürer, um octaedro. Figura obtida de [28].

Nas Tabelas 12 e 13 vemos desenhos e propriedades de 14 octaedros.

### 3. GRAFOS E POLIEDROS EQUIVALENTES

Vimos que os três octaedros apresentados na Figura 1 diferem por suas medidas, mas mantêm similaridades que nos fazem considerá-los “iguais”. Precisamos assim esclarecer sob quais critérios desejamos fazer nossa classificação, de modo que determinados poliedros sejam considerados na mesma classe, mesmo que alguns de seus elementos correspondentes tenham medidas diferentes.

Uma primeira ideia é considerar o número de faces  $F$ , o número de arestas  $A$  e o número de vértices  $V$  de um poliedro. Se dois poliedros tiverem um desses números diferentes, certamente que os queremos em classes diferentes. Mas esses números não podem ser considerados determinantes para colocar dois poliedros na mesma classe. Por exemplo, na Tabela 9 vemos que o cubóide e a cunha pentagonal têm

os mesmos valores  $F$ ,  $A$  e  $V$ , mas não queremos que sejam equivalentes, pois não resguardam uma correspondência biunívoca entre faces com números de lados iguais.

Isso nos traz a ideia de considerar os tipos das faces e dos vértices de um dado poliedro. Indicamos por  $F_n$ ,  $n \geq 3$ , o número de faces do *tipo*  $n$ , isto é, com  $n$  lados. De modo análogo, indicamos por  $V_n$ ,  $n \geq 3$ , o número de vértices de *tipo*  $n$ , isto é, ao vértice incidem  $n$  arestas (ou  $n$  faces). Com isso formamos o *vetor poliédrico*

$$\mathbf{v} = (F, A, V; F_3, F_4, F_5, F_6, \dots; V_3, V_4, V_5, V_6, \dots)$$

Se dois poliedros tiverem vetores poliédricos diferentes, certamente que os colocamos em classes diferentes. Mas esse critério também não pode ser considerado determinante. Por exemplo, o girobiprisma triangular (ou bitelhado transversal) e o bitelhado paralelo têm o mesmo vetor poliédrico. Uma leitura das representações desses octaedros pode ser conferida na Figura 7. No poliedro (a) existe um circuito fechado formado por quatro faces quadrangulares (em que duas faces vizinhas incidem em uma aresta comum), e em (b) não existe. Um modo de expressar isso é dizer que a “distribuição” das faces é diferente nos dois poliedros. Portanto não os queremos na mesma classe.

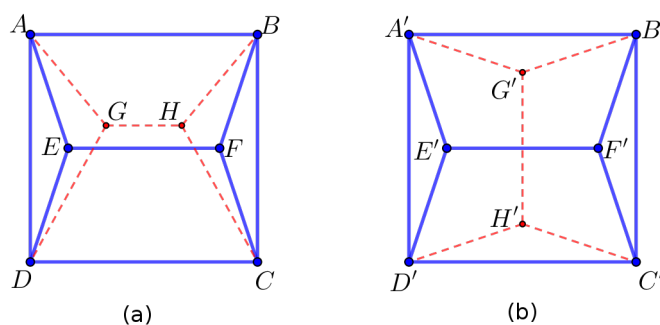


FIGURA 7. Em (a), o bitelhado paralelo, e em (b), o bitelhado transversal, ou girobiprisma triangular. O vetor poliédrico de ambos é  $(8, 14, 8; 4, 4; 4, 4)$ .

Poderíamos considerar outros indicativos, como o *tipo circular* de um vértice (lista circular dos tipos das faces que o rodeiam), ou combinações mais complexas. Para quem quiser enveredar por esse caminho, a autora J. Pedersen, em [15], faz considerações interessantes. Mas não se chega a um critério adequado, conforme ela mesma observa. O problema é que esses números não captam a distribuição das faces no poliedro.

Precisamos assim recorrer a outra ideia, e a experiência mostrou que a melhor é associar poliedros com grafos.

Lembramos, resumidamente, a definição de grafo simples. Um *grafo simples*  $G$  é uma dupla de conjuntos  $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , sendo  $\mathcal{V}$  um conjunto finito de elementos chamados *nós*, ou *vértices*, e  $\mathcal{E}$  um conjunto cujos elementos são da forma  $e = \{v, w\}$ , chamados *linhas*, sendo  $v$  e  $w$  elementos de  $\mathcal{V}$ . Dizemos que a linha  $e = \{v, w\}$  *liga*  $v$  a  $w$ , e que  $v$  e  $w$  são os *extremos* de  $e$ . A notação de conjunto  $\{v, w\}$  para os elementos de  $\mathcal{E}$  significa que  $v$  e  $w$  são elementos diferentes de  $\mathcal{V}$ , e que não existe uma ordem

preferencial entre eles, isto é,  $\{v, w\}$  pode ser anotado por  $\{w, v\}$ . Dizemos que  $\{v, w\}$  *incide* em  $v$  e  $w$ , e que  $v$  e  $w$  *incidem* em  $\{v, w\}$ . Dados dois nós  $v$  e  $w$ , se existir uma linha  $\{v, w\}$ , ela é única (isto é, não existem linhas múltiplas). Uma linha  $e$  com extremos  $v$  e  $w$  é anotada, em geral, por  $e = vw$  (ou  $e = wv$ ).

Um *caminho* em um grafo é uma lista de nós e linhas incidentes em sequência na forma  $v_1\{v_1, v_2\}v_2\{v_2, v_3\}v_3 \dots v_{n-1}\{v_{n-1}, v_n\}v_n$ , com  $n \geq 2$ , que pode ser anotado por  $v_1v_2 \dots v_n$ . Os nós  $v_1$  e  $v_n$  são os *extremos* desse caminho. Um *circuito* é um caminho  $v_1v_2 \dots v_kv_1$ , com  $k \geq 3$ , em que apenas os nós extremos são iguais. Esse circuito pode ser anotado na forma de lista circular, como  $[v_1v_2 \dots v_k]$ , ou  $[v_kv_1v_2 \dots v_{k-1}]$ , ou  $[v_{k-1}v_kv_1 \dots v_{k-2}]$ , ..., ou nas ordens inversas. Um vértice  $v$  ou uma linha  $\{v, w\}$  se dizem *incidentes* ao circuito  $[vw \dots]$ , e, reciprocamente, o circuito  $[vw \dots]$  se diz ser incidente à linha  $\{v, w\}$  e ao vértice  $v$ . Dois circuitos com uma linha ou um vértice em comum também se dizem *incidentes*.

Um grafo se diz *especial* se a ele estiver acoplado um terceiro conjunto  $\mathcal{F}$  cujos elementos são circuitos formados por nós e linhas do grafo.

A todo poliedro  $\mathcal{P}$  *corresponde* um grafo especial  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ , em que  $\mathcal{V}$  é o conjunto de seus vértices,  $\mathcal{E}$  é o conjunto de suas arestas expressas pelos seus dois vértices extremos, e  $\mathcal{F}$  é o conjunto de suas faces, consideradas como circuitos anotados na forma de listas circulares.

**Exemplo 1.** A título de exemplo vemos, na Figura 8, o grafo especial correspondente a um cubo. Para expressar o grafo etiquetamos os vértices do cubo com símbolos.

Grafo especial  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F})$  definido por

$$\mathcal{V} = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$$

$$\mathcal{E} = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \{A, D\}, \{E, F\}, \{F, G\}, \{G, H\}, \{E, H\}, \{A, E\}, \{B, F\}, \{C, G\}, \{D, H\}\}$$

$$\mathcal{F} = \{[ABCD], [EFGH], [ABFE], [ADHE], [DCGH], [BCGF]\}$$

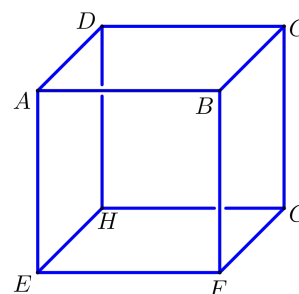


FIGURA 8. Grafo especial correspondente ao cubo.

É fácil constatar que a todo poliedro (cujos vértices estejam etiquetados) corresponde um único grafo especial. Observamos que um grafo especial expressa o poliedro em forma algébrica e combinatória. A linguagem de grafo não traduz as propriedades métricas do poliedro, como medida das arestas, ou medida de ângulos. Por outro lado, o grafo capta completamente suas propriedades combinatórias, como as faces de cada tipo e suas incidências, as arestas e suas incidências, e os vértices de cada tipo e suas incidências.

**Definição 2.** Os poliedros  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}'$  se dizem *combinatorialmente equivalentes*, ou, simplesmente, *equivalentes*, ou ainda, *isomorfos*, quando, dados seus grafos especiais  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F})$  e  $G' = (\mathcal{V}', \mathcal{E}', \mathcal{F}')$ , respectivamente, existe uma aplicação bijetiva

$\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$ , denominada *isomorfismo combinatório* de  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}'$ , que respeita todas as incidências de vértices, arestas e faces. Nesse caso dizemos também que  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}'$  são *da mesma classe*, e também que  $G$  e  $G'$  são *equivalentes*, ou *isomorfos*, ou *da mesma classe*.

O leitor não terá dificuldade em verificar que, se dois poliedros são equivalentes, existe uma bijeção entre os conjuntos de suas arestas, assim como uma bijeção entre os conjuntos de suas faces, de forma que os tipos dos vértices e das faces correspondentes são iguais. Portanto, os dois poliedros têm o mesmo vetor poliédrico. Ainda mais, os tipos circulares dos vértices correspondentes são iguais e os tipos das faces incidentes em arestas correspondentes são conservados. Grosseiramente falando, a “distribuição” das faces é a mesma nos dois poliedros.

**Exemplo 3.** O octaedro regular e o antiprisma triangular são equivalentes. Etiquetaando os vértices do octaedro com as letras  $A, B, \dots, F$ , e os do antiprisma com  $A', B', \dots, F'$ , de forma conveniente, como na Figura 9, a aplicação  $\phi : w \rightarrow w'$  é um isomorfismo combinatório entre os grafos especiais desses poliedros. É possível verificar todas as incidências. Por exemplo, o vértice  $A$  é incidente na aresta  $AC$ , que por sua vez é incidente na face  $[ACD]$ . Por outro lado,  $\phi(A) = A'$  é incidente na aresta  $\phi(A)\phi(C) = A'C'$ , e esta, por sua vez, é incidente na face  $[\phi(A)\phi(C)\phi(D)] = [A'C'D']$ .

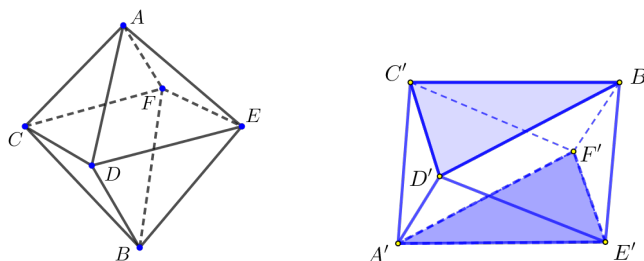


FIGURA 9. Da esquerda para a direita, o octaedro regular e um antiprisma triangular, com os vértices etiquetados.

**Exemplo 4.** Os bitelhados apresentados na Figura 7 não são equivalentes. Para ver isso observamos que a parte de cima dos dois telhados têm o mesmo desenho, de modo que etiquetamos essa parte do telhado (a) com as letras  $A, B, C, D, E$  e  $F$ , e a parte de cima do telhado (b) com os símbolos  $A', B', C', D', E'$  e  $F'$  de forma correspondente. Vemos que, para essas partes dos dois poliedros, a aplicação  $\phi : v \rightarrow v'$  é um isomorfismo. Em seguida nomeamos os dois vértices restantes do poliedro (a) com as letras  $G$  e  $H$ , e os dois vértices restantes do poliedro (b) com  $G'$  e  $H'$  (podendo trocar esses dois símbolos entre si se acharmos necessário). Mas agora a mesma aplicação  $\phi$  não é um isomorfismo. Por exemplo,  $[ABHG]$  é uma face de (a), mas  $[A'B'H'G']$  não é uma face de (b).

Já observamos que, se dois poliedros são equivalentes, então têm o mesmo vetor poliédrico. Mas a recíproca não é verdadeira, como demonstra o Exemplo 4.

Para encerrar esta seção notamos que, em geral, não verificamos a equivalência ou não equivalência de poliedros mediante a aplicação direta da Definição 2. Para poliedros com poucas faces, essa verificação pode ser feita visualmente através de seus desenhos em  $\mathbb{R}^3$  (ou, como veremos, examinando os desenhos de seus grafos no plano). Para poliedros com muitas faces, essa tarefa pode ser demorada e entediante, e é deixada para aplicativos computacionais elaborados para essa finalidade.

#### 4. PROPRIEDADES BÁSICAS DOS POLIEDROS CONVEXOS

Vejamos alguns resultados simples sobre poliedros convexos que serão úteis nas seções seguintes. Para rever a definição de poliedro convexo e outras propriedades o estudante pode consultar o capítulo 10 do texto [10].

**Teorema 5.** *Em qualquer poliedro (convexo ou não) valem as seguintes fórmulas:*

- (1)  $F = F_3 + F_4 + F_5 + \dots$
- (2)  $V = V_3 + V_4 + V_5 + \dots$
- (3)  $2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots$
- (4)  $2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \dots$
- (5)  $3F \leq 2A$
- (6)  $3V \leq 2A$

*Demonstração.* Constante em muitos livros de Geometria Espacial, por exemplo, [10], cap. 10.  $\square$

**Teorema 6.** *Em qualquer poliedro temos:  $4 \leq F$ ,  $6 \leq A$ , e  $4 \leq V$ .*

*Demonstração.* Começamos com uma face  $f$ , que tem  $n \geq 3$  arestas. A cada uma incide uma outra face, e essas faces são diferentes. Assim  $F \geq 1 + 3 = 4$ . Na situação descrita, como  $f$  tem pelo menos três arestas, e com mais três arestas (no mínimo) que saem de seus vértices, temos  $A \geq 3 + 3 = 6$ . Ainda, as arestas que saem dos vértices de  $f$  determinam pelo menos mais um vértice nas outras extremidades. Assim  $V \geq 3 + 1 = 4$ . O caso “mínimo”  $F = 4$ ,  $A = 6$  e  $V = 4$  ocorre no tetraedro.  $\square$

**Teorema 7.** *Em qualquer poliedro convexo vale a chamada fórmula de Euler:*

$$(7) \quad F - A + V = 2$$

*Demonstração.* Confira, por exemplo, [10], cap. 10.  $\square$

**Proposição 8.** *Em qualquer poliedro convexo vale*

$$(8) \quad \frac{3}{2}F \leq A \leq 3(F - 2) \quad e \quad \frac{1}{2}F + 2 \leq V \leq 2(F - 2)$$

*Demonstração.* Pela fórmula de Euler temos  $F - A + V = 2 \Rightarrow A = F + V - 2$ . Combinando com outras fórmulas temos

- $2A \geq 3F \Rightarrow A \geq \frac{3}{2}F$  (usando (5))



- $3V \leq 2A \Rightarrow 3V \leq 2(F + V - 2) \Rightarrow V \leq 2F - 4 \Rightarrow V \leq 2(F - 2)$  (usando (6))
- $A = F + V - 2 \leq F - 2 + 2F - 4 = 3F - 6 = 3(F - 2)$
- $F + V - 2 = A \geq \frac{3}{2}F \Rightarrow V \geq \frac{3}{2}F - F + 2 \Rightarrow V \geq \frac{1}{2}F + 2$   $\square$

Para uso posterior particularizamos alguns valores:

**Proposição 9.** *Em poliedros convexos, para  $4 \leq F \leq 13$ , temos:*

$F = 4 \Rightarrow$	$A = 6$	$e$	$V = 4$
$F = 5 \Rightarrow$	$8 \leq A \leq 9$	$e$	$5 \leq V \leq 6$
$F = 6 \Rightarrow$	$9 \leq A \leq 12$	$e$	$5 \leq V \leq 8$
$F = 7 \Rightarrow$	$11 \leq A \leq 15$	$e$	$6 \leq V \leq 10$
$F = 8 \Rightarrow$	$12 \leq A \leq 18$	$e$	$6 \leq V \leq 12$
$F = 9 \Rightarrow$	$14 \leq A \leq 21$	$e$	$7 \leq V \leq 14$
$F = 10 \Rightarrow$	$15 \leq A \leq 24$	$e$	$7 \leq V \leq 16$
$F = 11 \Rightarrow$	$17 \leq A \leq 27$	$e$	$8 \leq V \leq 18$
$F = 12 \Rightarrow$	$18 \leq A \leq 30$	$e$	$8 \leq V \leq 20$
$F = 13 \Rightarrow$	$20 \leq A \leq 33$	$e$	$9 \leq V \leq 22$

TABELA 1. Valores de arestas e vértices em relação a  $F$ .

*Demonstração.* A demonstração se obtém pela aplicação da Proposição 8.  $\square$

Será útil mais adiante o seguinte resultado:

**Teorema 10.** *Para todo inteiro  $A$  tal que  $A \geq 6$  e  $A \neq 7$ , existe um poliedro convexo com  $A$  arestas.*

*Demonstração.* Já vimos, no Teorema 6, que  $A \geq 6$ , e que o valor  $A = 6$  é assumido no tetraedro. Por outro lado, da Proposição 8 vemos que  $F = 4 \Rightarrow A = 6$  e que  $F \geq 5 \Rightarrow A \geq 8$ . Assim  $A = 7$  não ocorre.

Demonstramos a seguir a existência de poliedros com  $A$  arestas, para todo  $A \geq 8$ . Suponhamos que  $A = 2q$  seja par, sendo  $q \geq 4$ . Consideremos as pirâmides convexas cuja base é um polígono convexo com  $q$  lados. Tais pirâmides têm  $2q = A$  arestas. Portanto, para todo  $A \geq 8$  par, existe um poliedro convexo com  $A$  arestas.

Por outro lado, suponhamos que  $A \geq 9$  seja ímpar, com  $A = 2q + 1$ , e  $q \geq 4$ . Consideremos as pirâmides convexas cuja base é um polígono convexo com  $q$  lados. Conforme já observamos, tais pirâmides têm  $2q$  arestas. Como  $q \geq 4$ , podemos desenhar uma diagonal da base, unindo dois vértices não adjacentes. Em seguida truncamos o poliedro com um plano que passa por essa diagonal e uma terceira aresta da base (confira a Figura 10). Com isso construímos um poliedro convexo com  $2q + 1 = A$  arestas. Portanto, para todo ímpar  $A$ , com  $A \geq 9$ , existe um poliedro convexo com  $A$  arestas, e terminamos a demonstração.  $\square$

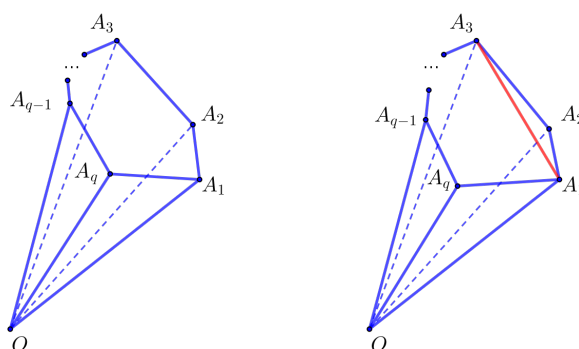


FIGURA 10. À esquerda, pirâmide com  $2q$  arestas; à direita, pirâmide truncada com  $2q + 1$  arestas.

### 5. COMEÇANDO A CLASSIFICAÇÃO E ENUMERAÇÃO DOS POLIEDROS CONVEXOS

*Classificar* aqui significa exibir um poliedro de cada classe, segundo o conceito de isomorfismo da Definição 2. Ao apresentar as classes podemos tomar como referência alguma propriedade dos poliedros. Em geral os poliedros são classificados de acordo com o número de faces  $F$ , ou o de vértices  $V$ , ou o de arestas  $A$ . Por outro lado, *enumerar* significa contar quantas classes existem, novamente tomando como referência alguma propriedade.

Usaremos como referência primeiramente o número de faces, seguindo assim a pergunta de Jacob Steiner, escrita no início deste texto: “Quantos poliedros diferentes são possíveis com sete faces, oito faces, nove faces, e assim por diante?” Portanto, para cada valor de  $F$ , investigaremos quantos poliedros diferentes existem, e procuraremos exibir a definição de cada um mediante sua descrição, desenhos e propriedades. Ao apresentar um poliedro, fica implícito que estamos nos referindo a um exemplar de sua classe.

Vimos, no Teorema 6, que  $4 \leq F$  em qualquer poliedro. Portanto iniciamos nossa classificação perguntando quais são os **poliedros com quatro faces**. Temos o

**Teorema 11.** *Em um poliedro, (i) se  $F = 4$ , então o poliedro é a pirâmide triangular; (ii) se  $A = 6$ , então é também a pirâmide triangular; e (iii) se  $V = 4$ , igualmente é a pirâmide triangular.*

*Demonstração.* Para demonstrar (i), começamos construindo o poliedro por uma face  $f$  de tipo  $n \geq 3$ . Cada aresta dessa face determina uma outra face, todas diferentes, o que fornece  $\geq n + 1$  faces. Se queremos  $F = 4$ , então  $n = 3$ , e  $f$  é uma face triangular. Pelo mesmo motivo todas as faces desse poliedro são triangulares. As três faces adicionais que incidem nas arestas de  $f$  precisam ter, duas a duas, uma aresta em comum, pois não há lugar para mais uma face. Essas arestas comuns a essas faces devem ter um vértice  $X$  em comum, pois todas as faces são triangulares. Fica formada uma pirâmide triangular, como está ilustrado na Figura 11, desenho da direita.

Para demonstrar (ii), começamos construindo o poliedro por uma face  $f$  de tipo  $n \geq 3$ , portanto,  $f$  tem  $n$  vértices e  $n$  arestas. Dos  $n$  vértices dessa face saem pelo

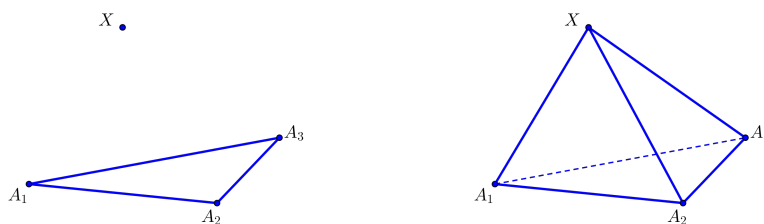


FIGURA 11. Construção do único poliedro com 4 faces.

menos mais  $n$  arestas, perfazendo  $\geq 2n$  arestas. Como  $A = 6$  temos  $n = 3$ . As três arestas que saem dos vértices de  $f$  devem ter um vértice  $X$  em comum, pois não podem ser formadas mais arestas. Temos assim a pirâmide triangular, como está ilustrado na Figura 11, desenho da direita.

Para demonstrar (iii), começamos construindo o poliedro por uma face  $f$  de tipo 3, pois o quarto vértice  $X$  deve estar fora do plano determinado por essa face (Figura 11, desenho da esquerda). As arestas adicionais que saem dos vértices de  $f$  devem incidir em  $X$ , de modo que formamos novamente uma pirâmide triangular, como está ilustrado na Figura 11, desenho da direita.  $\square$

Portanto o único poliedro com 4 faces é a pirâmide triangular, também chamado pelo nome geral de tetraedro. Se vê que qualquer pirâmide triangular é equivalente ao tetraedro regular, um dos sólidos de Platão. A Tabela 7 exhibe esse poliedro com alguns dados. Se estivéssemos classificando os poliedros em relação ao número de arestas ou de vértices, o Teorema 11 afirma também que a pirâmide triangular é o único poliedro com 6 arestas e o único com 4 vértices.

Vejam agora quais são os pentaedros convexos, **poliedros com cinco faces**. Começamos com a

**Proposição 12.** *Em qualquer pentaedro convexo temos: (i)  $A = V + 3$ ; (ii)  $8 \leq A \leq 9$  e  $5 \leq V \leq 6$ ; (iii)  $F_i = 0$  e  $V_i = 0$  para todo  $i \geq 5$ .*

*Demonstração.* Observemos que  $F - A + V = 2$  (fórmula de Euler)  $\Rightarrow 5 - A + V = 2 \Rightarrow A = V + 3$ . Isso prova (i). Por outro lado, (ii) segue da Proposição 9.

Para provar (iii), suponhamos que num pentaedro convexo exista uma face  $f$  do tipo  $F_i$ , com  $i \geq 5$ . Para cada aresta de  $f$  existe outra face que a incide, perfazendo  $\geq 5$  faces diferentes duas a duas. Contando com  $f$ , isso ultrapassa a quantidade permitida de faces. Portanto  $F_i = 0$  para todo  $i \geq 5$ . Por outro lado, suponhamos que num pentaedro convexo exista um vértice do tipo  $V_i$ , com  $i \geq 5$ . Nesse pentaedro teríamos pelo menos 5 faces que concorrem nesse vértice. Precisaríamos de pelo menos mais uma face para fechar o poliedro, mas já usamos todas as faces permitidas. Isso prova que  $V_i = 0$  para todo  $i \geq 5$ , e terminamos a demonstração.  $\square$

Os pentaedros convexos podem ter  $V = 5$  ou  $V = 6$ . Vejam esses dois casos separadamente.

**Proposição 13.** *O único pentaedro convexo com  $V = 5$  é a pirâmide quadrangular.*

*Demonstração.* Da Proposição 12 segue que  $A = 8$ . Então  $2A = 3F_3 + 4F_4 \Rightarrow 2A = 3F + F_4 \Rightarrow 16 = 15 + F_4 \Rightarrow F_4 = 1 \Rightarrow F_3 = 4$ . Agora  $2A = 3V_3 + 4V_4 \Rightarrow 2A = 3V + V_4 \Rightarrow 16 = 15 + V_4 \Rightarrow V_4 = 1 \Rightarrow V_3 = 4$ .

Portanto, esse poliedro tem quatro faces triangulares e uma quadrangular. Ainda, tem quatro vértices do tipo 3 e um do tipo 4. Para desenhar o poliedro começamos com uma face quadrangular  $A_1A_2A_3A_4$ . Existe apenas mais um vértice, que denominamos  $X$ , o qual deve se localizar fora do plano dessa face. Confira a Figura 12, desenho da esquerda.

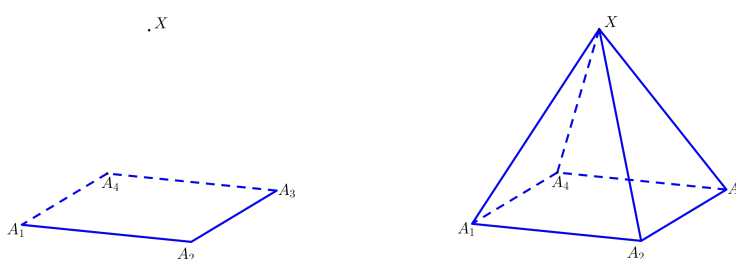


FIGURA 12. Construção do pentaedro com  $V = 5$ , a pirâmide quadrangular.

Já temos 4 arestas. Pelo menos mais uma deve sair de cada um dos vértices  $A_1, A_2, A_3$  e  $A_4$ , para completar a incidência mínima de 3 arestas em cada vértice. Portanto isso completa as 8 arestas possíveis. A segunda extremidade dessas 4 arestas só pode ser  $X$ , que deve ser o vértice tipo 4. Obtemos assim a pirâmide quadrangular, como desenhada na Figura 12, desenho da direita.  $\square$

**Proposição 14.** *O único pentaedro convexo com  $V = 6$  é o tetraedro 1-truncado.*

*Demonstração.* Da Proposição 12 segue que  $A = 9$ . Então  $2A = 3F_3 + 4F_4 \Rightarrow 2A = 3F + F_4 \Rightarrow 18 = 15 + F_4 \Rightarrow F_4 = 3 \Rightarrow F_3 = 2$ . Agora  $2A = 3V_3 + 4V_4 \Rightarrow 2A = 3V + V_4 \Rightarrow 18 = 18 + V_4 \Rightarrow V_4 = 0 \Rightarrow V_3 = 6$ .

Portanto, esse poliedro tem duas faces triangulares e três quadrangulares. Ainda, todos os vértices são do tipo 3. Para desenhar o poliedro começamos com uma face triangular  $A_1A_2A_3$ . Existem mais três vértices, que denominamos  $X, Y$  e  $Z$ . Confira a Figura 13, desenho da esquerda. Esses três pontos estão localizados no mesmo lado em relação ao plano da face  $A_1A_2A_3$ , pois o poliedro é convexo.

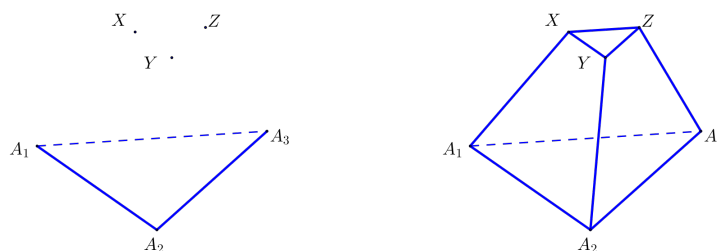


FIGURA 13. Construção do pentaedro com  $V = 6$ , o tetraedro 1-truncado.

Como todos os vértices são de tipo 3, exatamente mais uma aresta deve sair de cada um dos vértices  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ . Essas três arestas não podem incidir no mesmo vértice, pois, nesse caso, o poliedro seria uma pirâmide triangular, com apenas 4 faces. Tampouco duas dessas três arestas podem incidir no mesmo vértice, digamos  $X$ , pois, nesse caso, faltariam arestas para que  $Y$  e  $Z$  sejam tipo 3. Portanto as novas arestas podem ser nomeadas como  $A_1X$ ,  $A_2Y$  e  $A_3Z$ . Os vértices  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  devem ser ligados entre si, formando a segunda face triangular. As três faces quadrangulares devem ser formadas como sugerido na Figura 13, desenho da direita. Com isso construímos o tetraedro 1-truncado.  $\square$

Portanto os únicos poliedros convexos com 5 faces são a pirâmide quadrangular e o tetraedro 1-truncado. A Tabela 8 exhibe esses poliedros com alguns dados.

Deveríamos agora classificar os hexaedros convexos, poliedros com seis faces. Mas, precisamos “meditar” um pouco sobre o que estamos fazendo!

Um exame qualitativo das demonstrações das Proposições 13 e 14 nos mostra o que nos espera. Muitas complicações! Se vê que o número de casos crescerá rapidamente com o aumento de  $F$ . Por exemplo, na Proposição 14, escolhida uma face, seus vértices têm tipo 3, o que facilita. Em geral os tipos podem ser 3 ou mais, e teremos que examinar muitas opções. Os vértices adicionais aos da face escolhida sempre ficam do mesmo lado do plano suporte dessa face, mas a diversidade de posições e de tipos possíveis é grande. Com isso não conseguimos vislumbrar um procedimento ou algoritmo com o qual possamos dar conta de classificar e enumerar poliedros.

Observamos que essas dificuldades são próprias do espaço tridimensional. Por isso estamos usando técnicas de Geometria Espacial. Temos outra opção?

É aqui que recebemos o socorro do matemático alemão Victor Schlegel, que em 1886 apresentou uma ideia que permite uma grande simplificação.

## 6. O DIAGRAMA DE SCHLEGEL

O *diagrama de Schlegel* de um poliedro convexo é a projeção de seus vértices e arestas sobre uma de suas faces através de semirretas que partem de um ponto  $x$  fora do poliedro e suficientemente próximo do interior de uma face previamente escolhida (confira a Figura 14, desenho da esquerda).

O diagrama de Schlegel de um dado poliedro pode ter desenhos diferentes, dependendo principalmente da face escolhida. Na mesma Figura 14, nos dois desenhos da direita, vemos um exemplo.

Existem outras formas de obter o diagrama de Schlegel. Dado um poliedro convexo, consideramos uma esfera que contém com centro num ponto do interior do poliedro. Projetamos a superfície do poliedro sobre a esfera por meio das semirretas que saem do seu centro. Obtemos um poliedro esférico combinatorialmente equivalente ao poliedro dado. Escolhemos uma das faces desse poliedro e colocamos no seu interior o polo norte da esfera. Em seguida usamos a projeção estereográfica para obter o diagrama de Schlegel, conforme está ilustrado na Figura 15. Essa figura sugere ainda que o interior da face escolhida corresponde, no plano de projeção, ao

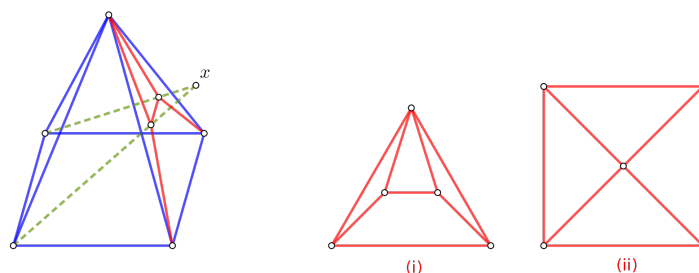


FIGURA 14. À esquerda, método de obtenção do diagrama de Schlegel da pirâmide quadrangular mediante projeção sobre uma face triangular. À direita, dois diagramas de Schlegel da pirâmide quadrangular obtidos mediante a projeção (i) sobre uma face triangular, e (ii) sobre a face quadrangular.

exterior do seu bordo projetado. Por isso, no desenho plano, a face escolhida se chama *face ilimitada*, e suas arestas formam o *bordo da face ilimitada*.

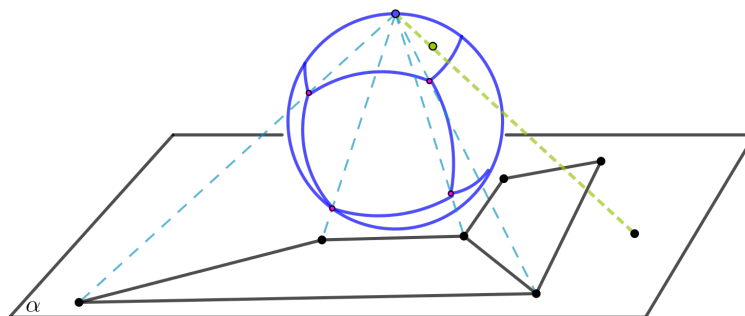


FIGURA 15. Obtenção do diagrama de Schlegel por meio da projeção estereográfica.

Uma forma prática de desenhar o diagrama de Schlegel de um poliedro convexo consiste em imaginar que suas arestas são elásticas. Escolhida uma face, a estendemos em seu plano suporte até que todas as arestas façam parte desse plano.

Não há como deixar de perceber que um diagrama de Schlegel é um desenho plano do mesmo grafo que corresponde ao poliedro.

Para formalizar um pouco mais, uma *realização* de um grafo é uma figura em um espaço euclidiano (ou na superfície esférica) com pontos que representam seus nós, e curvas que representam suas linhas, ligando os pontos correspondentes. Um grafo pode ter realizações diversas, inclusive em espaços diferentes, com dimensões diferentes. Retomando a Figura 8, agora na Figura 16, vemos como o grafo correspondente ao cubo tem também uma realização no plano, obtida pelo diagrama de Schlegel.

Aprendemos, com o diagrama de Schlegel, que o grafo correspondente a qualquer poliedro convexo pode ser realizado no plano. Não é difícil nos convencer de que esse desenho pode ser feito de forma que todas as linhas sejam segmentos de reta (que passamos a chamar de arestas), essas arestas não se cruzam em pontos interiores,

Grafo especial  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F})$  definido por

$$\mathcal{V} = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$$

$$\mathcal{E} = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \{A, D\}, \{E, F\}, \{F, G\}, \{G, H\}, \{E, H\}, \{A, E\}, \{B, F\}, \{C, G\}, \{D, H\}\}$$

$$\mathcal{F} = \{[ABCD], [EFGH], [ABFE], [ADHE], [DCGH], [BCGF]\}$$

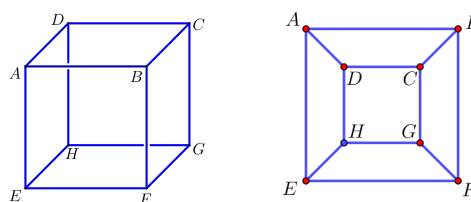


FIGURA 16. Grafo especial correspondente ao cubo com duas realizações, uma no espaço  $\mathbb{R}^3$  e outra no  $\mathbb{R}^2$ .

as faces do poliedro, com exceção da face ilimitada, correspondem a regiões do desenho que também são polígonos convexos, os interiores dessas regiões não contêm vértices ou arestas, e todo o desenho está dentro de um polígono convexo, cujo bordo corresponde ao da face ilimitada.

*Observando que é bem mais fácil trabalhar no plano do que no espaço, perguntamos se podemos classificar e enumerar os poliedros convexos através das representações de grafos no plano.*

Entretanto, de imediato percebemos que a correspondência entre poliedros convexos e grafos planos tem algumas dificuldades. Podemos facilmente desenhar no plano grafos que não correspondem a poliedros, como se vê no desenho da esquerda da Figura 17. De fato, nesse exemplo, o vértice etiquetado com  $A$  tem apenas duas arestas incidentes, quando o mínimo deveria ser três. Por outro lado, no desenho da direita, vemos outro grafo que também não corresponde a um poliedro, pois existem duas faces com duas arestas em comum, o que não é possível em um poliedro.

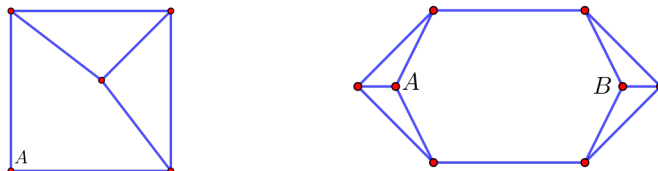


FIGURA 17. Grafos planares que não correspondem a poliedros.

Portanto precisa ser resolvido o problema de caracterizar os grafos com representação plana que efetivamente correspondam a poliedros convexos.

## 7. O TEOREMA DE E. STEINITZ

Em uma série de palestras proferidas em 1920, o matemático alemão E. Steinitz apresentou resultados sobre complexos, que são objetos geométricos mais gerais do que os poliedros. Seus textos [5] foram posteriormente reescritos por H. A. Rademacher [6], o que facilitou sua compreensão. Percebeu-se que, aplicando seus resultados para poliedros convexos, Steinitz resolveu o problema de caracterizar os grafos planares que a eles correspondem.

Antes de apresentar o Teorema de Steinitz, vejamos algumas definições.

**Definições 15.** Diz-se que um grafo é *3-conexo* quando quaisquer dois vértices podem ser conectados por três caminhos, quaisquer dois dos quais têm apenas os dois

vértices em comum. Um grafo se diz *planar* quando é simples, tem uma realização no plano em que as arestas podem ser desenhadas como segmentos de reta, e não ocorrem cruzamentos de arestas (em pontos interiores). Um *grafo plano* é um grafo planar junto com esse desenho.

Exemplos de grafos 3-conexos podem ser examinados nas Tabelas 7 a 13 (nessas tabelas todos os grafos são planares e 3-conexos). Não é por acaso que todos eles correspondem a poliedros convexos. Por outro lado, na Figura 17, vemos exemplos de grafos planares que não são 3-conexos, e não é por acaso que eles não correspondem a poliedros convexos. A explicação se deve ao fundamental

**Teorema 16** (E. Steinitz [5]). *Um grafo corresponde a um poliedro convexo se e somente se for planar e 3-conexo.*

A verificação desse Teorema é bastante delicada. Demonstrações modernas podem ser estudadas em [8] ou [12]. Em [7] o autor apresenta um resumo explicativo de uma demonstração.

Convencionamos, a partir de agora, que as realizações no plano de grafos simples 3-conexos são originadas de diagramas de Schlegel de poliedros, suas arestas são segmentos de reta e não têm cruzamentos internos, as regiões limitadas por arestas com interior vazio são convexas e correspondem a faces. O bordo da face ilimitada e seu interior é convexo e contém todo o desenho do grafo. A região ilimitada determinada por esse bordo é contada como uma face.

## 8. O PROCEDIMENTO INTERATIVO DE W. T. TUTTE

O Teorema de E. Steinitz 16 nos permite concluir que podemos classificar e enumerar os poliedros convexos mediante a classificação e enumeração dos grafos planares 3-conexos. Certamente que uma forma de fazer isso consiste em proceder por tentativa e erro, e desenhar todos os grafos não equivalentes, planares e 3-conexos, com um determinado número de faces (ou então tomando como referência o número de vértices ou de arestas).

Entretanto, métodos de tentativa e erro não garantem que foram obtidos todos os grafos, e não são factíveis quando o número de possibilidades é muito grande. Precisamos de um algoritmo de construção de grafos que esgotem todas as possibilidades. Vários desses algoritmos foram propostos, baseados em operações com grafos, que consistem em acrescentar a eles vértices, arestas e faces.

Escolhemos aqui, para nossa apresentação, um procedimento que se pode extrair de um estudo de W. Tutte de 1961. Existem procedimentos mais econômicos mas, para uma primeira abordagem, pensamos ser esse o mais interessante. Uma demonstração deste Teorema pode ser obtida a partir dos resultados de [19].

**Teorema 17** (W. T. Tutte [29]). *Os grafos planares 3-conexos com  $A$  arestas que não correspondem a uma pirâmide podem ser derivados daqueles com  $A - 1$  arestas realizando os seguintes dois procedimentos de todas as formas que eles possam ser aplicados:*

- (I) (*operação FS - face splitting*) adicionar uma nova aresta conectando dois vértices não adjacentes de uma face de tipo  $\geq 4$ , e



- (II) (*operação VS - vertex splitting*) dividir um vértice de tipo  $\geq 4$  em dois vértices, cada um dos quais permanece com pelo menos duas arestas incidentes, e conectando os dois vértices com uma nova aresta.

Se  $A$  for par, deve ser acrescentado o grafo da pirâmide cuja base é um polígono convexo com  $A/2$  lados.

Mais exatamente, dado um grafo planar  $G$ , a *operação vertex-splitting*, ou *operação divisão de vértice*, ou simplesmente *operação VS*, aplicada sobre um vértice  $u$  de  $G$  de tipo  $\geq 4$ , consiste em construir um novo grafo planar  $H$  a partir de  $G$ , substituindo  $u$  por uma aresta  $vw$ , sendo  $v$  e  $w$  novos vértices e  $vw$  uma nova aresta, de modo que as arestas incidentes em  $u$  em  $G$  se tornem, em  $H$ , incidentes em  $v$  ou  $w$  de acordo com a seguinte regra: sejam  $ux_1, ux_2, \dots, ux_k$  as  $k \geq 4$  arestas de  $G$  incidentes em  $u$ , nomeadas em ordem circular. Escolhe-se um valor  $i$  tal que  $2 \leq i \leq k - 2$ , e, após a criação da nova aresta  $vw$ , temos que  $x_1, \dots, x_i$  são incidentes em  $v$  e  $x_{i+1}, \dots, x_k$  são incidentes em  $w$  (ou vice-versa).

Para exemplificar a operação VS, consideremos o grafo correspondente à pirâmide hexagonal, tendo como face ilimitada a sua face hexagonal, como mostrado no desenho da esquerda da Figura 18. Aplicamos a operação VS ao vértice central. Ao separar as arestas, podemos agrupá-las em 3 e 3, ou em 2 e 4. Como o vértice é rodeado apenas por faces triangulares que incidem na mesma face hexagonal, não importa como são arranjados os grupos.

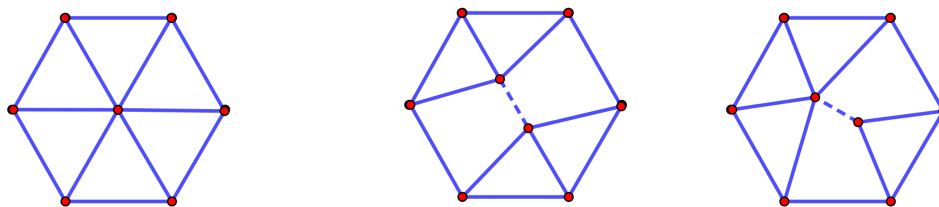


FIGURA 18. À esquerda, grafo planar correspondente à pirâmide hexagonal. À direita, os dois grafos planares resultantes da aplicação da operação VS. Os segmentos pontilhados são as arestas que foram acrescentadas.

A Figura 18 nos mostra como, a partir de um heptaedro, são obtidos dois heptaedros não isomorfos, ambos com uma aresta a mais do que o anterior.

Para exemplificar a operação FS, consideremos novamente o grafo correspondente à pirâmide hexagonal, mas agora sendo ilimitada uma de suas faces triangulares, como mostrado no desenho da esquerda da Figura 19. Aplicamos a operação FS à face hexagonal. Ao ligar vértices não adjacentes, podemos separá-los em 1 e 3, ou em 2 e 2. Como a face hexagonal incide apenas em faces triangulares, e não existem outras, temos uma simetria, e não importa quais vértices são escolhidos.

A Figura 19 nos mostra como, a partir de um heptaedro, são obtidos dois octaedros não isomorfos.

Observamos que a operação FS acrescenta uma aresta e uma face, e a operação VS acrescenta uma aresta e um vértice. Os novos grafos são simples e planares, e continuam sendo 3-conexos.

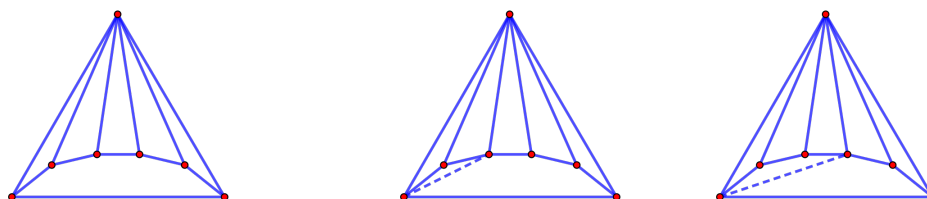


FIGURA 19. À esquerda, grafo planar correspondente à pirâmide hexagonal. À direita, os dois grafos planares resultantes da aplicação da operação FS. Os segmentos pontilhados são as arestas que foram acrescentadas.

O procedimento de W. Tutte classifica e enumera poliedros convexos tendo como referência o número de arestas. Para se referir ao número de faces, pode-se usar a Proposição 8. Em particular, para descrever e classificar os octaedros, precisamos, a princípio, obter os poliedros com até 18 arestas, e colecionar, dentre os com 12 a 18 arestas, os que têm 8 faces.

Ilustramos o procedimento iterativo de W. Tutte descrevendo os grafos planares 3-conexos com até 10 arestas.

**8.1. Grafos planares 3-conexos com 6 arestas.** Como 6 é par e  $6/2=3$ , tomamos o grafo da pirâmide com base triangular, mais conhecido como tetraedro. Não temos grafos com menos arestas para aplicar as outras operações, de modo que esse é o único grafo (planar e 3-conexo) com 6 arestas. Seu desenho está apresentado na Figura 20.

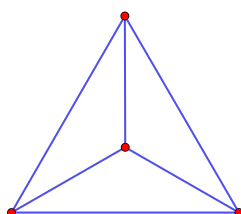


FIGURA 20. O único grafo planar 3-conexo com  $A = 6$ .

**Teorema 18.** *A menos de isomorfismos combinatórios, o único poliedro com 6 arestas é a pirâmide triangular, mais conhecido como tetraedro.*

*Demonstração.* Estamos aqui apenas destacando um resultado já visto no Teorema 11 e verificando seu paralelo com o procedimento de W. Tutte.  $\square$

**8.2. Grafos planares 3-conexos com 7 arestas.** Já vimos, no Teorema 10, que não existem poliedros com 7 arestas. Portanto, não existem grafos planares 3-conexos com 7 arestas.

Só para verificar o Teorema 17 nesse caso, observamos que, como 7 é ímpar, não existe pirâmide a ser considerada. Tampouco podemos aplicar as operações FS ou VS ao (único) grafo com 6 arestas, pois ele não tem vértices ou faces com tipo  $\geq 4$ .

8.3. **Grafos planares 3-conexos com 8 arestas.** Como 8 é par e  $8/2=4$ , tomamos o grafo da pirâmide com base quadrangular. Na Figura 21 vemos as duas opções de representação desse grafo.

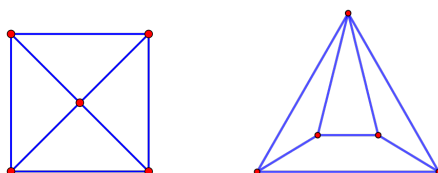


FIGURA 21. Duas representações do mesmo grafo planar 3-conexo com  $A = 8$ , que corresponde à pirâmide quadrangular, um pentaedro.

Não existem mais, pois não temos grafos com 7 arestas aos quais aplicar as operações FS e VS.

**Teorema 19.** *A menos de isomorfismos combinatórios, o único poliedro com 8 arestas é a pirâmide quadrangular.*

*Demonstração.* Segue do Teorema de W. Tutte 17. De qualquer forma, já havíamos visto na Proposição 9 que o único caso em que  $A = 8$  é  $F = 5$ , o que implica  $V = 5$ . Da Proposição 13 já obtivemos que o único pentaedro convexo com  $V = 5$  é a pirâmide quadrangular.  $\square$

8.4. **Grafos planares 3-conexos com 9 arestas.** Como 9 é ímpar, não existe pirâmide a ser considerada.

Aplicamos as operações FS e VS ao único grafo com  $A = 8$  (que corresponde à pirâmide quadrangular). Para aplicar FS (que tem que ser em uma face de tipo  $\geq 4$ ), preferimos usar a segunda versão do grafo na Figura 21, pois nela a face quadrangular está no interior, e assim fica mais fácil realizar a operação. Observe que podemos desenhar uma diagonal na face quadrangular de duas formas, mas, devido à simetria do grafo, basta escolher uma delas.

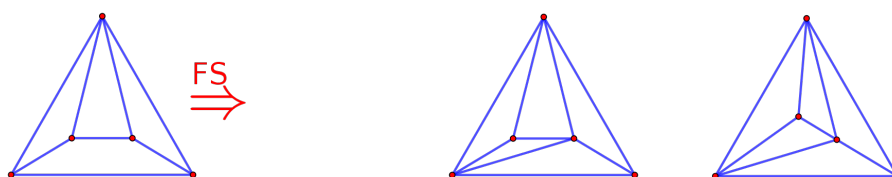


FIGURA 22. Aplicação da operação FS ao grafo com  $A = 8$ , obtendo um grafo com  $A = 9$ , apresentado em dois desenhos. Eles correspondem à bipirâmide triangular, um hexaedro.

Na Figura 22, os dois desenhos da direita representam o mesmo grafo, com referência à mesma face. Houve apenas, na segunda versão, um deslocamento de um vértice interno para tornar a representação mais simétrica.

Para aplicar VS (que tem que ser em um vértice de tipo  $\geq 4$ ), escolhemos usar a primeira versão do grafo na Figura 21, que tem o vértice de tipo 4 no interior.

Observe que podemos separar as arestas incidentes de duas formas, mas, devido à simetria do desenho, basta escolher uma delas. É o que fizemos na Figura 23. Nessa Figura, os dois desenhos da direita representam o mesmo grafo. Houve apenas uma mudança na escolha da face de projeção. Se escolhermos aplicar a operação VS na segunda versão do grafo na Figura 21, podemos dividir o vértice de tipo 4 de duas formas, e obtemos as duas versões da Figura 23, ocorrendo assim repetições do mesmo grafo.

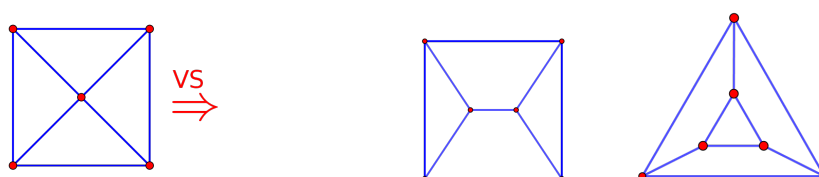


FIGURA 23. Aplicação da operação VS ao grafo com  $A = 8$ , obtendo um grafo com  $A = 9$ , apresentado em duas versões. Eles correspondem ao tetraedro 1-truncado, um pentaedro.

Tendo aplicado as operações (I) e (II) do Teorema 17 de todas as formas possíveis ao (único) grafo planar 3-conexo com 8 arestas, obtivemos todos os grafos planares 3-conexos com 9 arestas. O grafo da Figura 22 corresponde à bipirâmide triangular, com seis faces, como se pode ver na Tabela 9. O grafo da Figura 23 corresponde ao tetraedro 1-truncado, com cinco faces, como se pode ver na Tabela 8.

**Teorema 20.** *A menos de isomorfismos combinatórios, os únicos poliedros com 9 arestas são a bipirâmide triangular e o tetraedro 1-truncado.*

*Demonstração.* Usando as construções acima, segue do Teorema de W. Tutte 17.  $\square$

De acordo com a Proposição 9, já descrevemos e classificamos todos os tetraedros e todos os pentaedros, completando assim as Tabelas 7 e 8.

**8.5. Grafos planares 3-conexos com 10 arestas.** Como 10 é par e  $10/2=5$ , tomamos o grafo da pirâmide com base pentagonal. Na Figura 24 vemos duas opções de representação desse grafo.

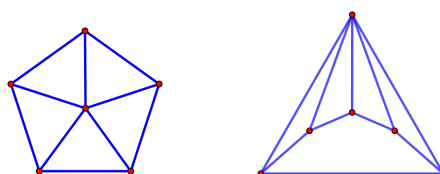


FIGURA 24. Duas representações do mesmo grafo planar 3-conexo com  $A = 10$ . O poliedro correspondente é a pirâmide pentagonal, um hexaedro.

Precisamos agora aplicar, de todas as formas possíveis, as operações FS e VS aos dois grafos com 9 arestas. Observamos que o tetraedro 1-truncado tem três faces quadrangulares. Devido à sua simetria, basta aplicar a operação FS a uma delas.

Da Figura 23 escolhemos o diagrama que apresenta o tetraedro 1-truncado em relação a uma face quadrangular (a escolha da outra representação leva ao mesmo resultado). Aplicamos a ele a operação FS, desenhando uma das diagonais de uma das faces quadrangulares. Devido à simetria do desenho, não importa qual face quadrangular escolhemos, e, escolhida a face, não importa qual diagonal escolhemos. Obtemos um grafo que corresponde ao poliedro que alguns autores denominam anticunha tetragonal. Confira a Figura 25.



FIGURA 25. Aplicação de FS a um diagrama do tetraedro 1-truncado, levando ao diagrama da anticunha tetragonal, com 6 faces e 10 arestas, um hexaedro.

Não podemos aplicar a operação VS ao grafo do tetraedro 1-truncado, pois todos os seus vértices têm tipo 3.

Consideremos agora o grafo da bipirâmide triangular. A ele não é possível aplicar a operação FS, pois todas as faces têm tipo 3. Mas podemos aplicar a operação VS. Existem três vértices do tipo 4, mas, devido à sua simetria, não importa qual deles escolhemos. Ainda devido à simetria, existe essencialmente apenas uma forma de separar as arestas que incidem no vértice de tipo 4.

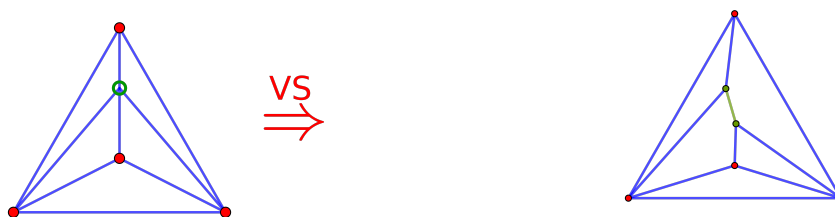


FIGURA 26. Aplicação da operação VS ao grafo da bipirâmide triangular.

Vemos que o grafo obtido na Figura 26 tem o mesmo vetor poliédrico da anticunha tetragonal, a saber,

$$(F, A, V; F_3, F_4; V_3, V_4) = (6, 10, 6; 4, 2; 4, 2)$$

Para confirmar que são o mesmo poliedro, abrimos esse grafo por uma face quadrangular, e obtemos o desenho canônico do grafo da anticunha tetragonal, conforme apresentado na Figura 25, à direita.

**Teorema 21.** *A menos de isomorfismos combinatórios, os únicos poliedros com 10 arestas são a pirâmide pentagonal e a anticunha tetragonal.*

*Demonstração.* Usando as construções acima, segue do Teorema de W. Tutte 17.  $\square$

Aproveitamos a oportunidade para observar que, ao aplicar a operação FS ao grafo do tetraedro 1-truncado, como foi feito na Figura 25, temos a opção de escolha entre as duas diagonais possíveis, e obtemos dois grafos (planares e 3-conexos), como se vê na Figura 27. Esses grafos são enantiomorfos, ou imagens espelhadas planas quirais. Observe que são combinatorialmente equivalentes. Para confirmar isso, etiquetamos os vértices de um dos desenhos com as letras  $A, B, \dots$ , e as imagens espelhadas desses vértices no outro desenho com as letras  $A', B', \dots$ , respectivamente. Então a bijeção  $\phi : v \rightarrow v'$  é um isomorfismo combinatorial. Vemos que os poliedros correspondentes, duas cunhas tetragonais enantiomorfas, são equivalentes. Em nossa classificação, poliedros enantiomorfos não são diferenciados.

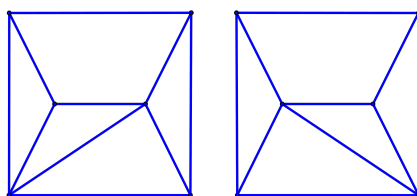


FIGURA 27. Grafos de anticunhas tetragonais enantiomorfos no plano.

## 9. COMO PROSEGUIR NA CLASSIFICAÇÃO E CONTAGEM DE POLIEDROS CONVEXOS

Podemos continuar a aplicação do Teorema de W. Tutte 17, e obter em sequência os grafos planares 3-conexos com 11 arestas. Encontramos quatro poliedros, que estão elencados na Tabela 2. São dois hexaedros, o hemicubo e o hemibelisco, cujos desenhos podem ser vistos na Tabela 9, e dois heptaedros, a anticunha tetragonal truncada e a pirâmide pentagonal 1-truncada, cujos desenhos constam da Tabela 11.

Ao gerar os grafos planares 3-conexos com 12 arestas, encontramos 12 poliedros, listados na Tabela 3. Dentre eles temos o cubóide e a cunha pentagonal, dois hexaedros que faltam para completar a Tabela 9. Obtemos também os nossos primeiros octaedros: o octaedro regular e a pirâmide pentagonal bitruncada, que constam das Tabelas 12 e 13, respectivamente. Por outro lado, encontramos 8 heptaedros, sendo dois deles a pirâmide triangular alongada e a pirâmide hexagonal, apresentados na Tabela 10. Nesta lista, 6 heptaedros não têm nome consagrado, de modo que os numeramos de 3 a 8 (a numeração é nossa).

Se o leitor se deu ao trabalho de descrever e classificar os poliedros com 12 arestas, observou que, ao aplicar as operações do Teorema 17 de todas as formas possíveis aos poliedros com 11 arestas, ocorre muita repetição, mesmo descartando, logo de início, os casos simétricos. Algumas repetições são evidentes e outras exigem algum detalhamento para que a lista final tenha todos e apenas poliedros não equivalentes.

Como exemplo, vejamos por que os poliedros pirâmide triangular alongada e heptaedro nº 3, ambos com vetor poliédrico  $(7, 12, 7; 4, 3; 4, 3)$ , não são equivalentes.

A	nome do poliedro	vetor poliédrico
6	tetraedro	(4,6,4; 4; 4)
8	pirâmide quadrangular	(5,8,5; 4,1; 4,1)
9	tetraedro 1-truncado	(5,9,6; 2,3; 6)
9	bipirâmide triangular	(6,9,5; 6; 2,3)
10	anticunha tetragonal	(6,10,6; 4,2; 4,2)
10	pirâmide pentagonal	(6,10,6; 5,0,1; 5,0,1)
11	hemicubo	(6,11,7; 2,4; 6,1)
11	hemiobelisco	(6,11,7; 3,2,1; 6,1)
11	anticunha tetragonal truncada	(7,11,6; 6,1; 2,4)
11	pirâmide pentagonal 1-truncada	(7,11,6; 6,1; 3,2,1)

TABELA 2. Todos os poliedros convexos com 6, 8, 9, 10 e 11 arestas. Para ver seus desenhos e seus grafos planares consulte as Tabelas 7-11.

A	nome do poliedro	vetor poliédrico
12	cubóide	(6,12,8; 0,6; 0,8)
12	cunha pentagonal	(6,12,8; 2,2,2; 8)
12	pirâmide triangular alongada	(7,12,7; 4,3; 4,3)
12	pirâmide hexagonal	(7,12,7; 6,0,0,1; 6,0,0,1)
12	heptaedro n <sup>o</sup> 3	(7,12,7; 4,3; 4,3)
12	heptaedro n <sup>o</sup> 4	(7,12,7; 4,3; 4,3)
12	heptaedro n <sup>o</sup> 5	(7,12,7; 4,3; 4,3)
12	heptaedro n <sup>o</sup> 6	(7,12,7; 4,3; 5,1,1)
12	heptaedro n <sup>o</sup> 7	(7,12,7; 5,1,1; 4,3)
12	heptaedro n <sup>o</sup> 8	(7,12,7; 5,1,1; 5,1,1)
12	octaedro regular	(8,12,6; 8; 0,6)
12	pirâmide pentagonal bitruncada	(8,12,6; 8; 2,2,2)

TABELA 3. Todos os poliedros convexos com 12 arestas. Para ver seus desenhos e seus grafos planares consulte as Tabelas 9-13.

Examinemos seus grafos, apresentados na Tabela 10. Além de outros detalhes, podemos observar que o heptaedro n<sup>o</sup> 3 tem um vértice de tipo 3 que incide em três faces quadrangulares, enquanto que a pirâmide triangular alongada não tem.

Se estivermos muito dispostos a continuar com essa metodologia, podemos gerar os poliedros com 13 arestas, que são 22. Com 14 arestas, seu número sobe para 58 poliedros. Logo se percebe que o número de poliedros, em função de  $A$ , cresce muito. Constatamos assim que esse método rapidamente se torna inviável para ser executado manualmente.

A Tabela 4 nos mostra outros valores do número de poliedros convexos em função do número de arestas. Vários autores fornecem esses valores, aqui citamos apenas

[19], que, na pág. 99, apresenta a enumeração exata referente a  $6 \leq A \leq 26$ . Esses valores foram consagrados na sequência OEIS A002840 [21].

$A$	nº de poliedros	$A$	nº de poliedros
6	1	17	1.342
7	0	18	4.199
8	1	19	13.384
9	2	20	43.708
10	2	21	144.810
11	4	22	485.704
12	12	23	1.645.576
13	22	24	5.623.571
14	58	25	19.358.410
15	158	26	67.078.828
16	448		

TABELA 4. Número de poliedros convexos não isomorfos em função do número  $A$  de arestas. Dados obtidos de [19], pág. 99.

#### 10. AFINAL, QUANTOS OCTAEDROS CONVEXOS EXISTEM, E QUAIS SÃO?

Existem 257 octaedros convexos diferentes do ponto de vista de isomorfismos combinatórios.

As primeiras referências a esses 257 poliedros foram feitas por T. Kirkman em 1862 e por O. Hermes em 1899. Este último, segundo [24], apresentou uma tabela com poliedros não isomorfos com até 8 faces, incluindo 34 heptaedros e 257 octaedros. Essas listas foram consideradas não verificadas, pois não tinham as bases teóricas necessárias.

A partir de meados do Século XX apareceram tabelas completas de poliedros, incluindo os octaedros, por parte de vários autores, que utilizaram métodos diversos, inclusive aplicativos computacionais.

Uma lista completa dos poliedros com até 8 faces, juntamente com algumas propriedades, pode ser obtida em [23], a partir da pág. 470. O mesmo autor, ainda em [23], fornece os desenhos dos diagramas de Schlegel desses 257 poliedros nas págs. 478-480.

Uma lista de octaedros, bastante limitada, com seus desenhos, diagramas de Schlegel e os correspondentes vetores poliédricos, pode ser vista em nossas Tabelas 12 e 13.

Com uma boa dose de paciência certamente que é possível obter manualmente todos os octaedros mediante a aplicação do Teorema de W. Tutte 17. De acordo com a Proposição 9, existem octaedros com arestas em número de 12 a 18. Obtida a lista dos poliedros com até 17 arestas, inclusive, colecionamos dentre eles os octaedros,



que são em número de 243, como informa a Tabela 5. Faltam assim 14 octaedros, que podem ser construídos aplicando-se a operação VS aos 38 octaedros com 17 arestas. Não existem heptaedros com 16 ou 17 arestas, aos quais poderíamos aplicar a operação FS. Como 18 é par, podemos considerar a pirâmide eneagonal, que tem 18 arestas mas 10 faces, portanto não é um octaedro.

Nesse procedimento, se estivermos interessados apenas nos octaedros, alguma economia pode ser feita. Por exemplo, ao construir os poliedros com 17 arestas, podemos considerar apenas os octaedros.

A Tabela 5 exhibe o número de octaedros convexos em função do número de arestas, a menos de isomorfismos combinatórios.

número de arestas	número de vértices	número de octaedros
12	6	2
13	7	11
14	8	42
15	9	74
16	10	76
17	11	38
18	12	14
Total		257

TABELA 5. Número de octaedros convexos não isomorfos em função do número de arestas e de vértices. Dados extraídos de [19], pág. 98.

## 11. SOBRE A CLASSIFICAÇÃO E ENUMERAÇÃO DE POLIEDROS CONVEXOS COM 9 FACES OU MAIS

O número de poliedros convexos aumenta rapidamente em função do número de faces. A Tabela 6 apresenta alguns valores, a título de ilustração. Vários autores fornecem tabelas com esses dados, como [19], pág. 98. Esses valores foram consagrados na sequência OEIS A000944 [21].

Aplicativos computacionais estão disponíveis para a descrição e contagem de grafos planares 3-conexos. A. Duijvestijn e P. Federico [2] foram pioneiros na construção desses aplicativos. Se o leitor estiver interessado em usar aplicativos para esse fim, uma possibilidade são os programas que podem ser acessados a partir de [11], com os quais se pode obter listas de grafos planares com diversas propriedades. Consulte também [25] para obter informações mais recentes.

Como o crescimento do número de classes é exponencial, esses aplicativos têm limitações devido ao esforço computacional exigido. Algumas propriedades permitem diminuir o tempo de computação. A mais imediata vem da observação de que, no algoritmo de W. Tutte descrito no Teorema 17, os procedimentos (I) e (II) são duais no que diz respeito à troca de vértices com faces. Portanto, uma alternativa mais econômica se obtém seguindo as etapas: (i) aplica-se o item (I) aos grafos planares 3-conexos com  $A - 1$  arestas; (ii) aplica-se uma subrotina para descartar grafos

$F$	nº poliedros
4	1
5	2
6	7
7	34
8	257
9	2.606
10	32.300
11	440.564
12	6.384.634
13	96.262.938
	⋮
18	> 107 trilhões

TABELA 6. Número de poliedros convexos não isomorfos em função do número  $F$  de faces. Fontes: [19], pág. 98, e [9].

isomorfos, permanecendo um de cada classe; (iii) constroem-se os grafos duais, permanecendo os que não correspondem aos auto-duais; (iv) se  $A$  for par, acrescenta-se o grafo da pirâmide com  $A$  arestas. Dessa forma são obtidos e contados todos os grafos com  $A$  arestas, a menos de isomorfismos combinatórios.

Terminamos observando que não são conhecidas fórmulas exatas para o número de classes de poliedros convexos em função do número de faces, arestas ou vértices, exceto para alguns tipos especiais de grafos, como a que pode ser consultada em [30]. Por outro lado, são conhecidas fórmulas assintóticas, um exemplo pode ser visto em [17].

## 12. CONCLUSÃO

Vimos que sabemos como classificar e enumerar os poliedros convexos a menos de isomorfismos combinatórios, e conhecemos técnicas para exibir um exemplar de cada classe. Portanto, sob o ponto de vista combinatório, pode-se dizer que foi alcançada a principal meta no estudo dessa família de objetos geométricos: sua classificação.

Entretanto, tomando como referência alguma característica, como poliedros com um determinado número  $F$  de faces, o número de classes é enorme, mesmo para valores modestos de  $F$ , e dependemos de aplicativos computacionais para sua descrição e enumeração.

Não se conhece uma fórmula que forneça o número de classes de poliedros convexos com um determinado número de faces. Por isso a pergunta de J. Steiner “Quantos poliedros diferentes são possíveis com sete faces, oito faces, nove faces, e assim por diante?”, ainda não está rigorosamente respondida. O que sabemos fazer é: dado um inteiro  $F \geq 4$ , temos como calcular, sob o ponto de vista combinatório, quantos poliedros convexos com  $F$  faces existem, e podemos exibir um exemplar de cada

classe, mas dependemos de tempo computacional e de capacidade de armazenamento de dados digitais.

Se considerarmos famílias especiais de poliedros, como aqueles cujas faces são triângulos, por exemplo, a resposta é a mesma: o número de poliedros aumenta exponencialmente em função do número de faces (ou arestas, ou vértices), e novamente dependemos de aplicativos computacionais para sua enumeração e classificação.

Uma vertente interessante, à qual se aplicam esses conhecimentos matemáticos, é a modelagem de moléculas por poliedros. Aqueles em que os vértices são todos de um mesmo tipo  $p$  são denominados  $p$ -regulares. Os poliedros 3-regulares são candidatos naturais a modelos de moléculas de carbono. Por outro lado, os poliedros 4-regulares são de interesse como modelos de supermoléculas e clusters. Técnicas próprias para enumeração e construção desses poliedros podem ser encontradas na literatura, como [14] e [19].

Enfim, as investigações sobre poliedros continuam, tanto do ponto de vista teórico matemático, quanto do ponto de vista de suas aplicações. Muitos estudiosos se comprazem em pesquisar esse assunto devido a uma atração intelectual peculiar e ao seu potencial interdisciplinar.

13. TABELAS DE POLIEDROS CONVEXOS

Seguem tabelas completas do tetraedro, dos pentaedros e dos hexaedros. As tabelas dos heptaedros e dos octaedros são parciais, mas incluem todos os poliedros que podem ter faces regulares.

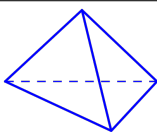
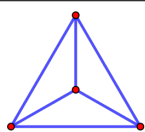
nº	tetraedro	desenho	grafo	vetor
1	tetraedro			$(F,A,V; F_3; V_3)=$ $(4,6,4; 4; 4)$

TABELA 7. A pirâmide triangular, ou tetraedro. Pode ser regular.

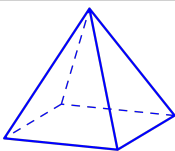
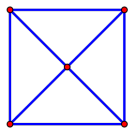
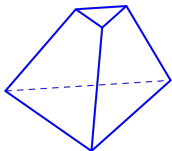
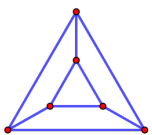
nº	pentaedros	desenho	grafo	vetor
1	pirâmide quadrangular			$(F,A,V; F_3,F_4; V_3,V_4)=$ $(5,8,5; 4,1; 4,1)$
2	tetraedro 1-truncado			$(F,A,V; F_3,F_4; V_3)=$ $(5,9,6; 2,3; 6)$

TABELA 8. Os dois pentaedros. A pirâmide quadrangular pode ter faces regulares. O tetraedro 1-truncado é combinatorialmente equivalente ao prisma triangular, e pode ter faces regulares.

Segue tabela com os sete hexaedros.

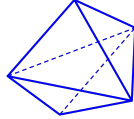
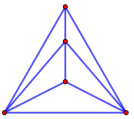
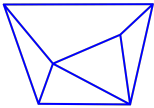
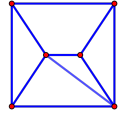
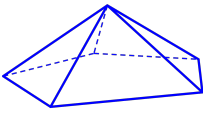
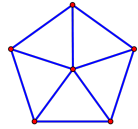
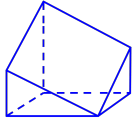
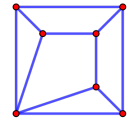
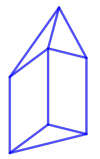
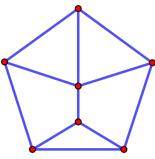
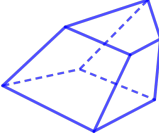
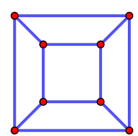
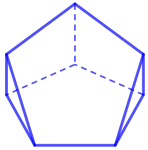
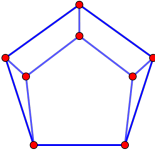
nº	hexaedros	desenho	grafo	vetor
1	bipirâmide triangular			$(F,A,V; F_3; V_3,V_4)=$ $(6,9,5; 6; 2,3)$
2	anticunha tetragonal			$(F,A,V; F_3,F_4; V_3,V_4)=$ $(6,10,6; 4,2; 4,2)$
3	pirâmide pentagonal			$(F,A,V; F_3,F_4,F_5; V_3,V_4,V_5)=$ $(6,10,6; 5,0,1; 5,0,1)$
4	hemicubo			$(F,A,V; F_3,F_4; V_3,V_4)=$ $(6,11,7; 2,4; 6,1)$
5	hemiobelisco			$(F,A,V; F_3,F_4,F_5; V_3,V_4)=$ $(6,11,7; 3,2,1; 6,1)$
6	cubóide			$(F,A,V; F_3,F_4; V_3)=$ $(6,12,8; 0,6; 8)$
7	cunha pentagonal			$(F,A,V; F_3,F_4,F_5; V_3)=$ $(6,12,8; 2,2,2; 8)$

TABELA 9. Os sete hexaedros. A bipirâmide triangular e a pirâmide pentagonal podem ter todas as faces regulares. O cubóide é combinatorialmente equivalente ao cubo, e assim pode ser regular.

Segue tabela com os oito heptaedros com 12 arestas.

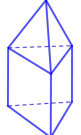
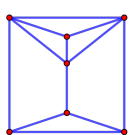
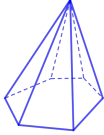
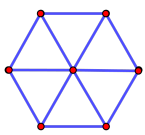
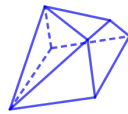
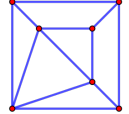
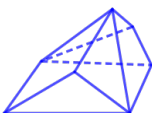
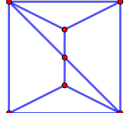
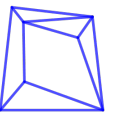
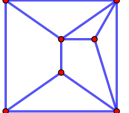
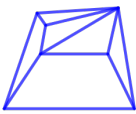
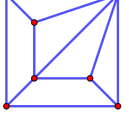
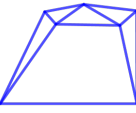
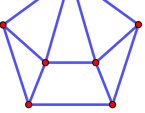
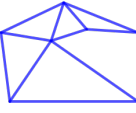
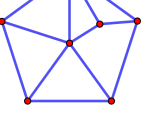
nº	heptaedros I	desenho	grafo	vetor
1	pirâmide triangular alongada			$(F,A,V; F_3,F_4; V_3,V_4)=$ $(7,12,7; 4,3; 4,3)$
2	pirâmide hexagonal			$(F,A,V; F_3,\dots,F_6; V_3,\dots,V_6)=$ $(7,12,7; 6,0,0,1; 6,0,0,1)$
3	heptaedro nº 3			$(F,A,V; F_3,F_4; V_3,V_4)=$ $(7,12,7; 4,3; 4,3)$
4	heptaedro nº 4			$(F,A,V; F_3,F_4; V_3,V_4)=$ $(7,12,7; 4,3; 4,3)$
5	heptaedro nº 5			$(F,A,V; F_3,F_4; V_3,V_4)=$ $(7,12,7; 4,3; 4,3)$
6	heptaedro nº 6			$(F,A,V; F_3,F_4; V_3,V_4,V_5)=$ $(7,12,7; 4,3; 5,1,1)$
7	heptaedro nº 7			$(F,A,V; F_3,F_4,F_5,F_6; V_3,V_4)=$ $(7,12,7; 5,1,1; 4,3)$
8	heptaedro nº 8			$(F,A,V; F_3,F_4,F_5; V_3,V_4,V_5)=$ $(7,12,7; 5,1,1; 5,1,1)$

TABELA 10. Os oito heptaedros com 12 arestas. Dessa lista apenas a pirâmide triangular alongada pode ter todas as faces regulares.

Segue tabela com oito heptaedros adicionais.

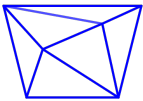
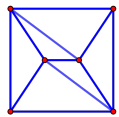
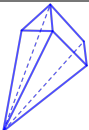
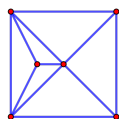
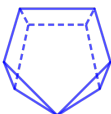
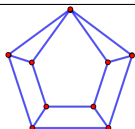
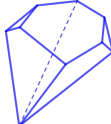
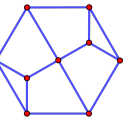
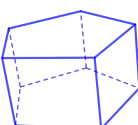
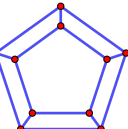
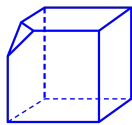
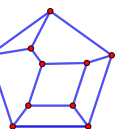
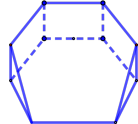
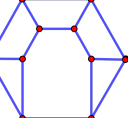
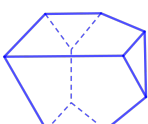
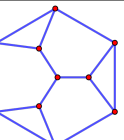
nº	heptaedros II	desenho	grafo	vetor
9	anticunha tetragonal truncada			$(F,A,V; F_3,F_4,F_5; V_3,V_4)=$ $(7,11,6; 6,1; 2,4)$
10	pirâmide pentagonal 1-truncada			$(F,A,V; F_3,F_4; V_3,V_4,V_5)=$ $(7,11,6; 6,1; 3,2,1)$
11	heptaedro nº 11			$(F,A,V; F_3,F_4,F_5; V_3,V_4)=$ $(7,14,9; 2,3,2; 8,1)$
12	pirâmide quadrangular 2-truncada			$(F,A,V; F_3,F_4,F_5,F_6; V_3,V_4)=$ $(7,14,9; 2,4,0,1; 8,1)$
13	prisma pentagonal			$(F,A,V; F_3,F_4,F_5; V_3)=$ $(7,15,10; 0,5,2; 10)$
14	cubo 1-truncado			$(F,A,V; F_3,F_4,F_5; V_3)=$ $(7,15,10; 1,3,3; 10)$
15	cunha hexagonal			$(F,A,V; F_3,F_4,F_5,F_6; V_3)=$ $(7,15,10; 2,3,0,2; 10)$
16	tetraedro 3-truncado			$(F,A,V; F_3,F_4,F_5,F_6; V_3)=$ $(7,15,10; 3,0,3,1; 10)$

TABELA 11. Oito heptaedros adicionais. Dessa lista apenas o prisma pentagonal pode ter todas as faces regulares.

Segue tabela com os sete octaedros que podem ter todas as faces regulares.

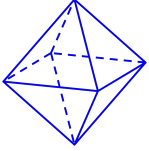
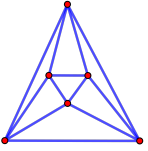
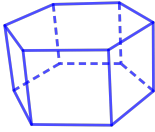
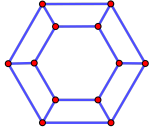
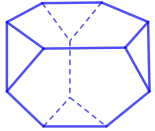
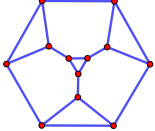
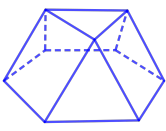
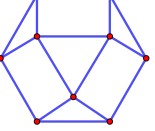
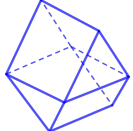
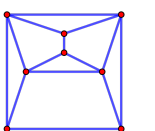
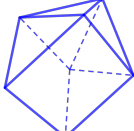
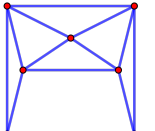
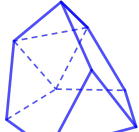
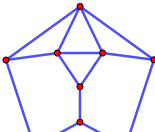
nº	octaedros I	desenho	grafo	vetor
1	octaedro			$(F,A,V; F_3, V_3, V_4) = (8,12,6; 8; 0,6)$
2	prisma hexagonal			$(F,A,V; F_3, F_4, F_5, F_6; V_3) = (8,18,12; 0,6,0,2; 12)$
3	tetraedro 4-truncado			$(F,A,V; F_3, F_4, F_5, F_6; V_3) = (8,18,12; 4,0,0,4; 12)$
4	cúpula triangular			$(F,A,V; F_3, F_4, F_5, F_6; V_3, V_4) = (8,15,9; 4,3,0,1; 6,3)$
5	girobiprisma triangular			$(F,A,V; F_3, F_4; V_3, V_4) = (8,14,8; 4,4; 4,4)$
6	prisma triang aumentado			$(F,A,V; F_3, F_4; V_3, V_4) = (8,13,7; 6,2; 2,5)$
7	icosaedro tridiminuído			$(F,A,V; F_3, F_4, F_5; V_3, V_4) = (8,15,9; 5,0,3; 6,3)$

TABELA 12. Os sete octaedros que podem ter todas as faces regulares.



Segue tabela com mais sete octaedros.

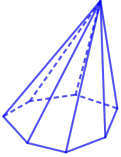
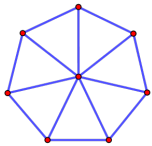
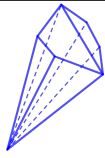
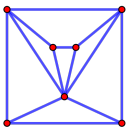
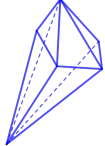
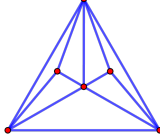
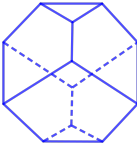
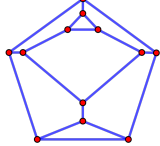
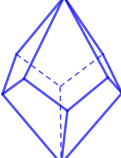
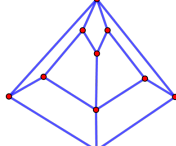
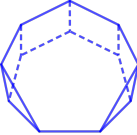
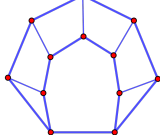
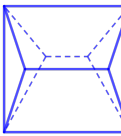
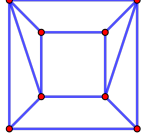
nº	octaedros II	desenho	grafo	vetor
8	pirâmide heptagonal			$(F,A,V; F_3,\dots,F_7; V_3,\dots,V_7)=$ $(8,14,8; 7,0,0,0,1; 7,0,0,0,1)$
9	pirâmide hexagonal meio-truncada			$(F,A,V; F_3,F_4; V_3,V_4,V_5,V_6)=$ $(8,13,7; 6,2; 4,2,0,1)$
10	pirâmide pentagonal bitruncada			$(F,A,V; F_3; V_3,V_4,V_5)=$ $(8,12,6; 8; 2,2,2)$
11	sólido de Dürer			$(F,A,V; F_3,F_4,F_5; V_3)=$ $(8,18,12; 2,0,6; 12)$
12	trapezoedro tetragonal			$(F,A,V; F_3,F_4; V_3,V_4)=$ $(8,16,10; 0,8; 8,2)$
13	cunha heptagonal			$(F,A,V; F_3,F_4,\dots,F_7; V_3)=$ $(8,18,12; 2,4,0,0,2; 12)$
14	bitelhado paralelo			$(F,A,V; F_3,F_4; V_3,V_4)=$ $(8,14,8; 4,4; 4,4)$

TABELA 13. Sete octaedros adicionais (não podem ter todas as faces regulares).

## REFERÊNCIAS

- [1] Adrianus Johannes Wilhelmus Duijvestijn. *The number of polyhedral (3-connected planar) graphs*. Mathematics of Computation, 65, 1289-1293, 1996.
- [2] Adrianus Johannes Wilhelmus Duijvestijn e Pasquale Joseph Federico. *The number of polyhedral (3-connected planar) graphs*. Mathematics of Computation, 37, 523-532, 1981.
- [3] Antonio Caminha Muniz Neto. *Geometria*. Coleção PROFMAT. 1ª edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.
- [4] Douglas B. West. *Introduction to Graph Theory*. second ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2001.
- [5] Ernst Steinitz. *Polyeder und Raumeinteilungen*. Enzykl. Math. Wiss. (Geometrie) 3 (Part 3 AB 12) 1-139, 1922.
- [6] Ernst Steinitz e Hans Adolph Rademacher. *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder*. Springer, Berlin, 1934. Reimpressão: Springer, Berlin, 1976.
- [7] Branko Grünbaum. *Graphs of polyhedra; polyhedra as graphs*. Discrete Mathematics 307, 445-463, 2007.
- [8] Branko Grünbaum. *Convex Polytopes*. second ed. prepared by V. Kaibel, V. Klee, G.M. Ziegler. New York: Springer, 2003.
- [9] Branko Grünbaum. *Polytopes*. Verbete da Enciclopédia Britannica, 1998. Disponível em: <https://www.britannica.com/science/combinatorics/Polytopes>. Acesso em: 9 fev 2023.
- [10] Elon Lages Lima et alii. *A Matemática do Ensino Médio*. Vol. 2. 6ª edição. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.
- [11] Gunnar Brinkmann and Brendan McKay. *Plantri and fullgen*. Programas para geração de certos tipos de grafos planares. Disponível em: <http://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/plantri/>. Acesso em: 12 maio 2023.
- [12] Günter M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1995.
- [13] Hassler Whitney. *Congruent graphs and the connectivity of graphs*. Am. J. Math. 54, 150-168, 1932.
- [14] Haiyuan Yao et alii. *The construction of 4-regular polyhedra containing triangles, quadrilaterals and pentagons*. MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 64, 345-358, 2010.
- [15] Jean J. Pedersen. *The challenge of classifying polyhedra*. California Math., Vol. 2, 21-28, 1977.
- [16] João Carlos Vieira Sampaio et alii. *Geometria Espacial*. Coleção Matemática na Prática. Cuiabá: Central de Texto, 2013. Para obter este texto solicite o arquivo .pdf ao autor Prof. João Carlos Vieira Sampaio, do Departamento de Matemática da UFSCar.
- [17] Lawrence Bruce Richmond e Nicholas Charles Wormald. *The asymptotic number of convex polyhedra*. Trans. of the AMS, vol 273, n. 2, 721-735, 1982.
- [18] Luís Antonio Teixeira de Oliveira. *Poliedros*. In: Carlos Correia de Sá e Jorge Rocha (Ed.) *Treze Viagens pelo Mundo da Matemática*. 2ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 161-194, 2012.
- [19] Michael B. Dillencourt. *Polyhedra of small orders and their Hamiltonian properties*. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 66, 87-122, 1996.
- [20] Michel Louis Balinski. *On the graph structure of convex polyhedra in n-space*. Pacific J. Math. 11, 431-434, 1961.
- [21] Neil James Alexander Sloane. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. Disponível em: <http://oeis.org/> Acesso em: 19 jan 2023.
- [22] Norman Woodason Johnson. *Convex Solids with Regular Faces*. Canadian Journal of Mathematics, 18, 169-200, 1966.
- [23] Pasquale Joseph Federico. *Polyhedra with 4 to 8 faces*. Geometriae Dedicata, 3, 469-481, 1975.
- [24] Pasquale Joseph Federico. *Enumeration of Polyhedra: The Number of 9-Hedra*. J. of Combinatorial Theory 7, 155-161, 1965.
- [25] Samuel George Kamperis. *Enumeration of Polyhedral Graphs*. Tese. Oxford: Oxford Brooks University, 2019.

- [26] Viktor Abramovich Zalgaller. *Convex Polyhedra with Regular Faces*. New York: Springer, 1969.
- [27] Wikimedia. Figura no título: *heptagonal pyramid*, Endereço base disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/> Acesso em: nov 2022. As figuras usadas em nosso texto obtidas da Wikimedia Commons são disponíveis como domínio público ou licenciadas sob GNU Free Documentation License ou Creative Commons Attribution-Share.
- [28] Wikipedia. Figuras e informações nos títulos: *Platonic solid. Octahedron. Hexagonal prism. Truncated tetrahedron. Archimedean solid. Sólidos de Johnson* (versão em português). *Catalan solid. Triangular cupola. Gyrobifastigium. Augmented triangular prism. Tridiminished icosahedron. Truncated triangular trapezohedron. Triangular cupola. Gyrobifastigium. Elongated triangular pyramid. Pentagonal prism. Elongated triangular pyramid. Schlegel diagram*. Títulos disponíveis a partir do endereço base <https://en.wikipedia.org/wiki/> Acesso em: nov 2022. As figuras usadas em nosso texto obtidas da Wikipedia são disponíveis como domínio público ou licenciadas sob GNU Free Documentation License ou Creative Commons Attribution-Share.
- [29] William Thomas Tutte. *A theory of 3-connected graphs*. *Indag. Math.* 23, 441-455, 1961.
- [30] William Thomas Tutte. *A census of planar triangulations*. *Canad. J. Math.* 14, 21-38, 1962.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
ROD. WASHINGTON LUIS, KM 235 - SP-310  
SÃO CARLOS, SP  
13565-905  
*E-mail address:* paterlini@ufscar.br