

## PROPRIEDADES DA CICLOIDE E SUA VISUALIZAÇÃO DINÂMICA EM LATEX E GEOGEBRA

FLANK D. M. BEZERRA, CARLOS BOCKER NETO

RESUMO. Neste trabalho, investigamos a construção analítica e geométrica da cicloide, abordando problemas clássicos relacionados à área sob um arco e às retas tangentes, além de explorar o conceito de curvas paralelas associadas. Para enriquecer a compreensão desses tópicos, utilizamos ferramentas tecnológicas como os pacotes gráficos do LaTeX (TikZ, animate, multido) e o aplicativo GeoGebra, com a finalidade de produzir figuras, animações e construções interativas. Além disso, compartilhamos os códigos necessários para a produção de ilustrações dinâmicas e estáticas a serem usadas, por exemplo, em exposições, notas de aulas, e trabalhos acadêmicos em geral, sobre curvas cicloidais.

### SUMÁRIO

|   |    |
|---|----|
| 1. Introdução .....   | 30 |
| 2. Cicloide: a construção, o problema da área e das retas tangentes ..... | 31 |
| 2.1. A construção da cicloide .....                                       | 31 |
| 2.2. O problema da área .....   | 34 |
| 2.3. O problema das tangentes .....                                       | 37 |
| 3. Curvas paralelas .....   | 38 |
| 4. Agradecimentos .....   | 45 |
| Referências.....  | 45 |
| 5. Apêndice: Códigos para construção das animações .....                  | 45 |

---

Data de aceitação: 13 de dezembro de 2025.

*Palavras chave.* cicloide, curvas paralelas, geogebra, latex, tikz.

## 1. INTRODUÇÃO

A cicloide é uma curva notável que surge quando se acompanha o movimento de um ponto fixo na borda de uma circunferência que rola, sem deslizar, sobre uma linha reta. Embora sua definição seja simples, essa curva esconde uma surpreendente riqueza matemática, sendo objeto de fascínio desde o século XVII, veja por exemplo [4, p. 579]. Ela é a solução para os problemas da braquistócrona — proposto por Johann Bernoulli em 1696 — cujo objetivo era determinar a curva de menor tempo percorrido por um corpo sob a ação da gravidade.

Uma outra característica muito famosa dessa curva é o tautocronismo: o tempo de descida de um corpo, até o ponto mais baixo, em uma rampa cicloidal sem atrito é constante, independentemente da altura inicial. A história e a solução desses problemas podem ser encontradas em diversas fontes na literatura e, como referências em língua portuguesa temos o livro *A Magia da Cicloide - Braquistócrona e Tautócrona*, dos autores Oscar Vega Sassine e Andre Bustillos [2], por ser um estudo bastante completo e estar em língua portuguesa.

Uma bela experiência dessas propriedades da cicloide foram realizadas no Canal Manual do Mundo no YouTube <https://www.youtube.com/watch?v=alzphVrX3dU>, onde o apresentador Iberê Thenório e sua equipe fazem simulações, de forma experimental, comparando o tempo de descida, de um ponto A para um outro ponto mais baixo B, por diferentes curvas e conclui que na curva com formato cicloidal a descida é mais rápida. Fazem ainda o experimento que, sobre a curva cicloidal, o tempo de descida, até o ponto mais baixo é sempre o mesmo, independentemente da altura inicial.

Seguindo este aspecto experimental de estudos e visando contribuir para a melhor compreensão dos conceitos matemáticos, este trabalho aborda alguns aspectos da curva cicloidal com o apoio de ferramentas tecnológicas, tais como, os pacotes gráficos do  $\text{\LaTeX}$  — `animate`, `multido` e `TikZ` — e o aplicativo GeoGebra.

Primeiramente definimos, analítica e geometricamente, uma cicloide. Estudamos a área abaixo de um arco e as tangentes de uma curva cicloidal. Em seguida, definimos o conceito de curvas paralelas e fazemos um estudo sobre o paralelismo da cicloide. Tudo isso sendo tratado utilizando-se das ferramentas tecnológicas supracitadas.

Mais especificamente, ao longo do texto nós incluímos figuras e animações produzidas com os pacotes gráficos do  $\text{\LaTeX}$  ‘`animate`’, ‘`multido`’ e ‘`TikZ`’ relacionadas a definições e resultados. Aproveitamos também para disponibilizar todos os códigos  $\text{\LaTeX}$  necessários para edição e reprodução das animações aqui exibidas. Foram incluídos também links que levam a essas construções no GeoGebra.

Observamos ainda que incluir movimento em um documento PDF pode ser feito de diversas formas. Aqui, neste trabalho, destacaremos o uso do pacote  $\text{\LaTeX}$  ‘`animate`’, por algumas motivos:

- (1) O movimento estará imerso no próprio documento PDF, desta forma, um único arquivo poderá ser objeto de trabalho;
- (2) A edição e o compartilhamento das animações pode ser facilmente realizado, desde que o documento TEX ou parte dele seja compartilhado;

- (3) Uma vez que o documento PDF foi compartilhado, o leitor do texto PDF pode ter acesso a animação sem auxílio de internet;

Quanto aos leitores de texto em PDF capazes de reproduzir as animações sugerimos:

- ‘Adobe Acrobat Reader’, disponível para os sistemas operacionais Mac OS e Windows;
- ‘Foxit PDF reader’, disponível para os sistemas operacionais Mac OS e Windows;
- ‘KDE Okular’, disponível para os sistemas operacionais Linux e Windows;
- ‘PDF-XChange’, disponível para o sistema operacional Windows;

Ao melhor de nosso conhecimento, os sistemas operacionais Android e iOS não possuem leitores de texto PDF capazes de reproduzir animações feitas em LaTeX com o pacotes ‘animate’ e ‘multido’. Talvez isso ocorra porque o funcionamento dessas animações depende de recursos JavaScript embutidos no PDF, e estes não são suportados pela maioria dos leitores móveis.

Finalmente, para melhor compreensão dos nossos resultados é importante convenicionar que uma função real de uma variável real é *suave* quando ela é uma função que possui derivadas de todas ordens e estas são funções contínuas.

A estrutura do artigo é a seguinte. Na Seção 2 estudamos a construção da cicloide, e tratamos do problema do cálculo da região abaixo de um arco de cicloide, além disso, apresentamos a chamada propriedade fundamental das cicloides. Na Seção 3 estudamos curvas, que em algum sentido, são paralelas à cicloide. Finalmente, no Apêndice 5 disponibilizamos os códigos L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X para edição e reprodução das animações apresentadas ao longo do texto.

## 2. CICLOIDE: A CONSTRUÇÃO, O PROBLEMA DA ÁREA E DAS RETAS TANGENTES

**2.1. A construção da cicloide.** Dada uma reta  $\mathbf{r}$ , a cicloide é o lugar geométrico descrito pelo ponto  $P$  da circunferência geradora, de raio  $r$  e centro  $C$  e que rola sobre o eixo  $\mathbf{r}$ , veja a animação Figura 1.

FIGURA 1. Animação exibindo o ponto  $P$

A cicloide pode ser visualizada na Figura 2.

FIGURA 2. Cicloide

Recorrendo à Geometria Analítica, dado um sistema de coordenadas  $Oxy$ , em outras palavras, a cicloide é o lugar geométrico descrito pelo ponto  $P$  da circunferência geradora, de raio  $r$  e centro  $C$  e que rola sobre o eixo  $x$ . O ponto inicial ocorre na posição em que  $C$  está no semi-eixo positivo dos  $y$ , veja a Figura 3 e a Figura 4.

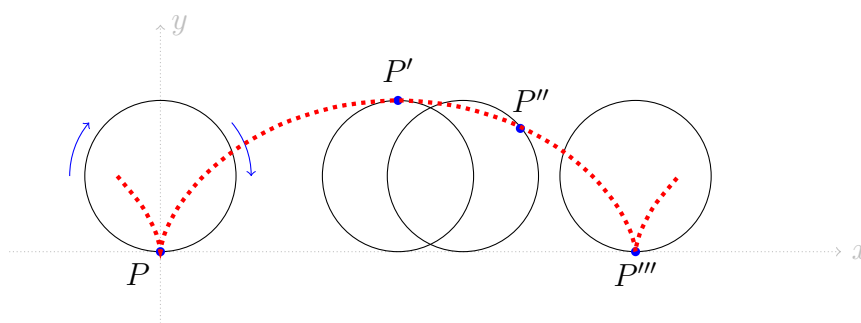


FIGURA 3. Pontos da cicloide para diferentes valores de  $\theta$

Veja também a Figura 4.

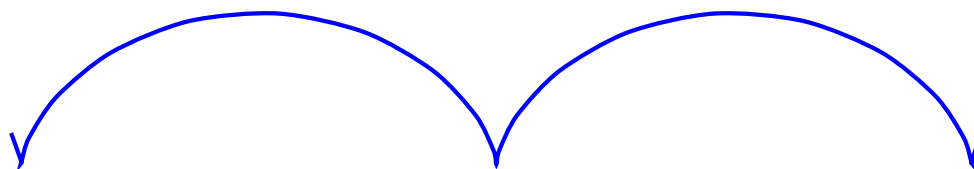


FIGURA 4. Ilustração de uma cicloide

As coordenadas do ponto  $P = P(\theta)$  pertencente a cicloide mencionada acima são dadas por  $(x_P(\theta), y_P(\theta))$ , onde

$$(1) \quad \begin{cases} x_P(\theta) = r\theta - r \operatorname{sen}(\theta), \\ y_P(\theta) = r - r \operatorname{cos}(\theta). \end{cases}$$

Aqui  $\theta$  denota o ângulo varrido por  $CP$  quando a circunferência rola para uma nova posição, veja a Figura 5. Desta forma, essa é a parametrização da cicloide ao rodar um círculo de raio  $r$  onde o ponto  $P$  encontra-se no ponto de coordenadas  $(0, 0)$  para  $\theta = 0$ .

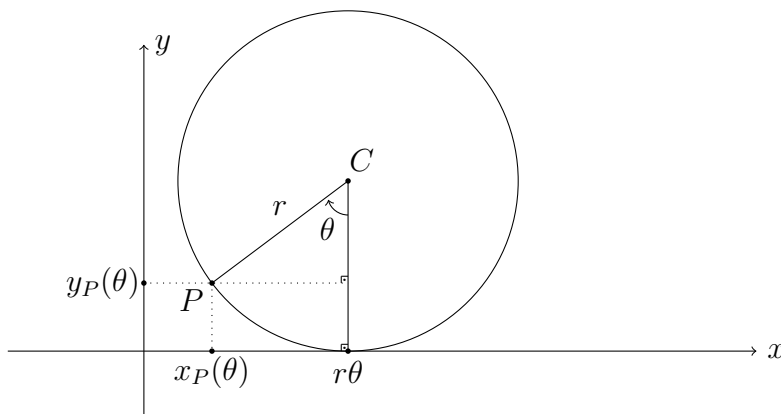


FIGURA 5. Parametrização da cicloide

Observamos ainda que é possível obter uma forma cartesiana para a equação da cicloide. De fato, considerando a função bijetora  $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ , inversa da restrição  $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ , é possível eliminar  $\theta \in [0, \pi]$  em (1) e obter a equação cartesiana da primeira metade da cicloide por

$$x = r \arccos \left( 1 - \frac{y}{r} \right) - \sqrt{(2r - y)y}, \quad y \in [0, 2r].$$

Para a segunda metade da cicloide ( $\theta \in [\pi, 2\pi]$ ), é possível eliminar  $\theta \in [\pi, 2\pi]$  em (1) e obter a equação

$$x = 2\pi r - r \arccos \left( 1 - \frac{y}{r} \right) + \sqrt{(2r - y)y}, \quad y \in [0, 2r].$$

A Figura 3 ilustra também o caso em que  $\theta = \pi$ , e neste caso as coordenadas do ponto  $P' = P'(\pi)$  pertencente a cicloide são dadas por  $(x_P(\pi), y_P(\pi))$ , onde

$$\begin{cases} x_P(\pi) = \pi r, \\ y_P(\pi) = 2r. \end{cases}$$

Considere

$$\text{dist}(P; D) = d_\theta, \quad \theta \in [0, \pi],$$

onde  $d_\theta$  denota a distância entre os pontos  $P$  e  $D$ , para cada  $\theta \in [0, \pi]$ , como na Figura 6.

Se escrevermos  $P = (x_P, y_P)$  e  $D = (x_D, y_D)$ , então

$$\begin{cases} x_P = r\theta - r \sin(\theta), \\ y_P = y_D = r - r \cos(\theta), \end{cases}$$

e

$$x_D = r\pi - r \sin(\theta).$$

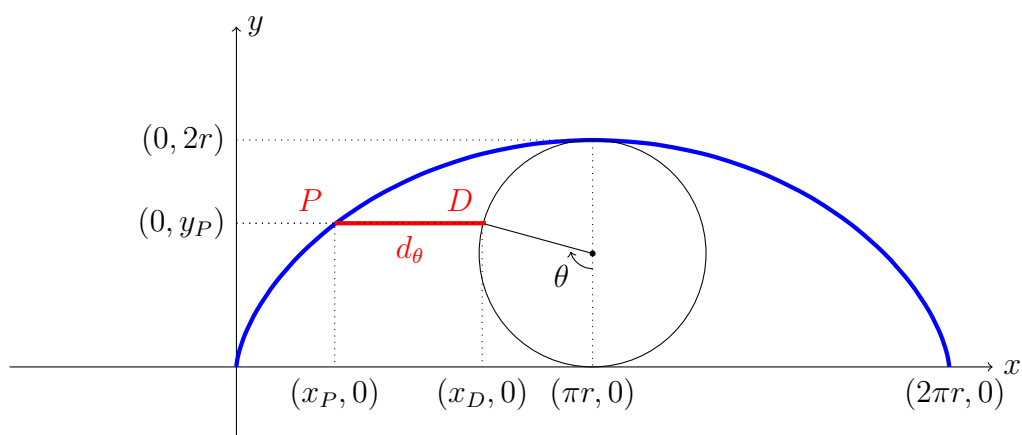


FIGURA 6. Ilustração de um arco de cicloide

Assim

$$d_\theta = r(\pi - \theta), \quad \theta \in [0, \pi].$$

**2.2. O problema da área.** O problema da área consiste em calcular a área limitada por um arco de cicloide e pela reta suporte de sua construção. Mais precisamente, queremos determinar a área do conjunto dos pontos  $(r\theta - r\text{sen}(\theta), y) \in \mathbb{R}^2$  tais que  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  e  $0 \leq y \leq r - r\cos(\theta)$ .

**Teorema 1.** *A área sob um arco de cicloide, como descrita acima, é igual a  $3\pi r^2$ .*

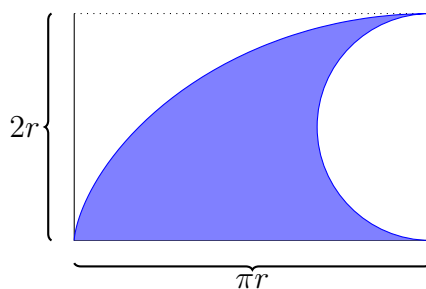
*Demonstração.* No plano  $xy$ , considere  $\mathcal{A}$  como sendo a região delimitada pelo segmento de reta com extremidades  $(0, 0)$  e  $(r\pi, 0)$ , pelo traço da cicloide parametrizada por

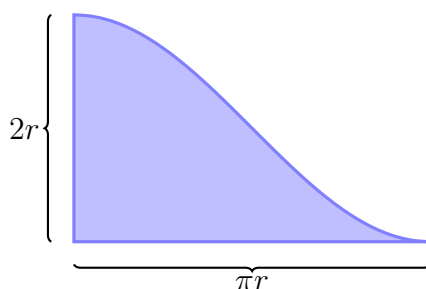
$$(r\theta - r\text{sen}(\theta), r - r\cos(\theta)), \quad \theta \in [0, \pi],$$

(metade de um arco de cicloide), e pela circunferência centrada no ponto  $(r\pi, r)$  e de raio  $r$ , conforme a Figura 7.

Observa-se, através da Figura 6, que a região sob um arco de cicloide se decompõe em um círculo de raio  $r$  com duas regiões de áreas idênticas igual a  $\text{Área}(\mathcal{A})$ , isto é,

$$\text{Área sob um arco de cicloide} = \pi r^2 + 2 \cdot \text{Área}(\mathcal{A}).$$

FIGURA 7. Região  $\mathcal{A}$

FIGURA 8. Região  $\mathcal{B}$ 

Nosso objetivo é provar que

$$\text{Área}(\mathcal{A}) = \pi r^2.$$

Para isso, construiremos uma nova região  $\mathcal{B}$ , de mesma área que  $\mathcal{A}$ .

Para cada  $\theta \in [0, \pi]$ , seja  $d_\theta$  a distância (Figura 6) entre o ponto da cicloide  $(r\theta - r \sin \theta, r - r \cos \theta)$  e o ponto  $(r\pi - r \sin \theta, r - r \cos \theta)$  pertencente à circunferência centrada em  $(r\pi, r)$  de raio  $r$ . Assim, obtemos a curva descrita por

$$x = d_\theta = r\pi - r\theta, \quad y = r - r \cos(\theta), \quad \theta \in [0, \pi].$$

Isolando  $\theta$  na primeira equação e substituindo na segunda, obtemos que esta curva é o gráfico da função

$$f(x) = r - r \cos\left(\pi - \frac{x}{r}\right), \quad x \in [0, r\pi].$$

Definimos, então,  $\mathcal{B}$  como a região delimitada pelo segmento de reta de extremidades  $(0, 0)$  e  $(r\pi, 0)$ , pelo gráfico de  $f$ , e pelo segmento de reta de extremidades  $(0, 0)$  e  $(0, 2r)$ , conforme mostrado na Figura 8.

Por construção, as seções transversais horizontais das regiões  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  possuem o mesmo comprimento. Portanto, pelo Princípio de Cavalieri, segue que

$$\text{Área}(\mathcal{A}) = \text{Área}(\mathcal{B}),$$

veja as animações das Figuras 9 e 10.

FIGURA 9. Princípio de Cavalieri

O argumento usado acima pode também ser visualizado no link

FIGURA 10. Área da região  $\mathcal{A}$  e o Princípio de Cavalieri

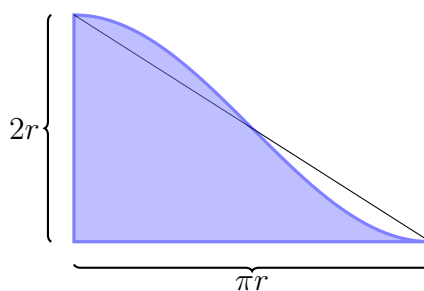
<https://www.geogebra.org/m/t2v6vzjb>

usando o GeoGebra de autoria dos próprios autores.

Para determinar a área da região  $\mathcal{B}$ , vamos compará-la com a região triangular  $\mathcal{C}$  delimitada delimitada pelos eixos coordenados e pela reta

$$\ell(x) = -\frac{2x}{\pi} + 2r,$$

conforme ilustrado na Figura 11.

FIGURA 11. Comparação entre as regiões  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$ 

A ideia agora é mostrar que  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  têm a mesma área. Para isso, definamos a função

$$h(t) = f\left(\frac{\pi r}{2} + t\right) - \ell\left(\frac{\pi r}{2} + t\right), \quad t \in \left[-\frac{\pi r}{2}, \frac{\pi r}{2}\right].$$

Substituindo as expressões de  $f$  e  $\ell$ , temos:

$$\begin{aligned} h(t) &= f\left(\frac{\pi r}{2} + t\right) - \ell\left(\frac{\pi r}{2} + t\right) \\ &= r - r \cos\left(\pi - \frac{\pi r}{2r} - \frac{t}{r}\right) + \frac{2\pi r}{2\pi} + \frac{2t}{\pi} - 2r \\ &= \frac{2t}{\pi} - r \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{r}\right) \\ &= \frac{2t}{\pi} - \sin\left(\frac{t}{r}\right), \end{aligned}$$

Portanto,  $h$  é uma função ímpar, pois  $h(-t) = -h(t)$ .

Essa simetria implica que a parte da região  $\mathcal{B}$  que está fora de  $\mathcal{C}$  tem a mesma área que a parte de  $\mathcal{C}$  que está fora de  $\mathcal{B}$ . Logo,

$$\text{Área}(\mathcal{B}) = \text{Área}(\mathcal{C}).$$

Como  $\mathcal{C}$  é um triângulo de base  $\pi r$  e altura  $2r$ , temos

$$\text{Área}(\mathcal{C}) = \frac{1}{2} \cdot \pi r \cdot 2r = \pi r^2.$$

Assim, concluímos que

$$\text{Área}(\mathcal{A}) = \text{Área}(\mathcal{B}) = \text{Área}(\mathcal{C}) = \pi r^2,$$

o que encerra a demonstração.  $\square$

**2.3. O problema das tangentes.** Trata-se da surpreendente propriedade das retas tangentes de uma cicloide que sempre passam pelo topo de sua circunferência geradora, isto é, dado  $\theta_0 \in (0, 2\pi)$ , a reta tangente à cicloide  $\gamma(\theta) = (r\theta - r\text{sen}\theta, r - r\cos\theta)$  no ponto  $P = \gamma(\theta_0)$  passa pelo ponto  $Q = (r\theta_0, 2r)$  que é o topo da circunferência de centro  $C = (r\theta_0, 2r)$  e raio  $r$ .

**Teorema 2.** *A reta tangente à cicloide num ponto  $P$  qualquer passa pelo topo da circunferência geradora.*

*Demonstração.* O coeficiente angular da reta tangente à cicloide num ponto  $P = (r(\theta - \text{sen}(\theta)), r(1 - \cos(\theta)))$  é dado por

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{r\text{sen}(\theta)}{r(1 - \cos(\theta))} = \frac{\text{sen}(\theta)}{1 - \cos(\theta)},$$

e note que  $y'$  não está definido para  $\theta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ . Esses valores de  $\theta$  correspondem aos pontos em que a cicloide toca o eixo  $x$ .

Seja  $r$  a reta tangente à cicloide passando por  $P$ . Uma vez que o ponto no topo da circunferência geradora possui coordenadas  $(r\theta, 2r)$  e o coeficiente angular de  $r$  é como em (2), a equação de  $r$  é dada por

$$y - r(1 - \cos(\theta)) = \frac{\text{sen}(\theta)}{1 - \cos(\theta)}(x - \theta r + r\text{sen}(\theta)).$$

Substituindo  $x = r\theta$  na equação anterior, obtemos

$$y = 2r.$$

Portanto, a reta tangente à cicloide por  $P$  passa, de fato, pelo ponto  $(r\theta, 2r)$  no topo da circunferência geradora.

FIGURA 12. Um ponto sobre uma circunferência que rola sem deslizar

□

Uma animação desse resultado, produzida pelos próprios autores, também pode ser encontrada no GeoGebra, através do link <https://www.geogebra.org/m/c2avkkks>.

### 3. CURVAS PARALELAS

Inicialmente, esclarecemos que uma curva parametrizada de classe  $C^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) em  $\mathbb{R}^2$ , definida num intervalo aberto  $(a, b)$ , é uma aplicação

$$\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

onde  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são funções reais, definidas em  $(a, b)$ , de classe  $C^k$ .

Se  $|\alpha'_1(t)|^2 + |\alpha'_2(t)|^2 \neq 0$  para todo  $a < t < b$ , então  $\alpha$  é dita regular.

Quando  $\alpha$  é de classe  $C^k$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ , dizemos que ela é de classe  $C^\infty$  ou simplesmente que ela é suave.

Segundo [1, p. 89] podemos introduzir a noção de paralelismo para curvas de classe  $C^k$  ou suaves, conforme o sentido a seguir.

**Definição 1.** *Seja  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$  uma curva parametrizada de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$  ou  $k = \infty$ ) e regular. Fixado um número real  $\delta > 0$ , a curva paralela à  $\alpha$  a uma distância  $\delta$  é a curva dada por*

$${}^p\alpha_\delta(t) = \alpha(t) + \delta\omega(t), \quad a < t < b,$$

onde  $\omega$  é o campo de vetores unitários, normais à curva  $\alpha$  dado por

$$\omega(t) = \frac{1}{\sqrt{|\alpha'_1(t)|^2 + |\alpha'_2(t)|^2}}(\alpha'_2(t), -\alpha'_1(t)), \quad a < t < b.$$

A saber,

$${}^p\alpha_\delta(t) = \left( \alpha_1(t) + \delta \frac{\alpha_2'(t)}{\sqrt{|\alpha_1'(t)|^2 + |\alpha_2'(t)|^2}}, \alpha_2(t) - \delta \frac{\alpha_1'(t)}{\sqrt{|\alpha_1'(t)|^2 + |\alpha_2'(t)|^2}} \right), \quad a < t < b.$$

Bem como em [1] nós também iremos considerar valores para  $\delta$  negativos, e isso não significa que estaremos considerando “distâncias negativas”, mas sim campos de vetores normais unitários exteriores.

**Definição 2.** A curvatura de uma curva parametrizada  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  em um ponto  $a < t < b$  por  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$  é denotada por  $\kappa(t)$  e é definida por

$$\kappa(t) = \frac{\alpha_1'(t)\alpha_2''(t) - \alpha_2'(t)\alpha_1''(t)}{(|\alpha_1'(t)|^2 + |\alpha_2'(t)|^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Em linhas gerais, a curvatura de uma curva mede a taxa de variação da direção da tangente da curva em relação ao comprimento do arco percorrido, i.e., a curvatura mede o quanto a curva “se desvia de ser reta” em um certo ponto.

Também, é sabido que, no sentido da Definição 1, curvas paralelas a circunferências são circunferências; mas curvas paralelas a elipses, parábolas e hipérbolas não são elipses, parábolas e hipérbolas, respectivamente, veja por exemplo, [1, p. 89], [3, 5]. No que segue, exploraremos o conceito de paralelismo a cicloides, e isso é interessante do geométrico e teórico porque essa pode ser uma maneira natural de gerar cúspides e auto-interseções, a partir de uma curva suave e regular explorando sua evolução ao longo de retas normais. Curvas paralelas também surgem naturalmente em problemas de envoltórias e causticas (como em ótica e raios refletidos).

Graças à Definição 1 com  $a = 0$  e  $b = 2\pi$  temos o campo  $\omega$  de vetores unitários e normais à cicloide dado por

$$\omega(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos(\theta))}}(\sin(\theta), \cos(\theta) - 1),$$

e a curva paralela à cicloide a uma distância  $\delta$  no intervalo  $(0, 2\pi)$  é a curva dada por

$$(3) \quad {}^p\alpha_\delta(\theta) = \left( r\theta - r\sin(\theta) + \frac{\delta\sin(\theta)}{\sqrt{2(1 - \cos(\theta))}}, r - r\cos(\theta) + \frac{\delta\cos(\theta) - \delta}{\sqrt{2(1 - \cos(\theta))}} \right),$$

onde  $0 < \theta < 2\pi$ .

Vejam que  ${}^p\alpha_\delta$  não é uma cicloide como assegura o resultado abaixo.

**Proposition 3.** *Seja qual for  $\delta \neq 0$  e  $r > 0$ , a curva  ${}^p\alpha_\delta$  definida em 3 não é uma cicloide.*

*Demonstração.* Observe que  ${}^p\alpha_\delta(0^+) = (\delta, 0)$  e  ${}^p\alpha_\delta(2\pi^-) = (2\pi r - \delta, 0)$ . Seja  $\gamma$  a cicloide que passa por  $(\delta, 0)$  e  $(2\pi r - \delta, 0)$ . Assim, o raio  $s$  da circunferência que a descreve satisfaz a relação

$$2\pi s = 2\pi r - 2\delta = 2\pi \left( r - \frac{\delta}{\pi} \right),$$

e portanto

$$s = r - \frac{\delta}{\pi}.$$

Logo, a equação de  $\gamma$  é dada por  $\gamma(t) = (\delta + s\theta - s \operatorname{sen}(\theta), s - s \operatorname{cos}(\theta))$ .

Se  ${}^p\alpha_\delta$  fosse uma cicloide, ela deveria coincidir com  $\gamma$ . Entretanto,  ${}^p\alpha_\delta(\pi) = (r\pi, 2r)$  e  $\gamma(\pi) = (r\pi, 2s)$  são diferentes. Assim,  ${}^p\alpha_\delta$  não é uma cicloide.  $\square$

A Figura 13 contém ilustrações de um arco de cicloide gerada por uma circunferência de raio 1 e algumas curvas paralelas à cicloide.

FIGURA 13. A curva em azul é uma cicloide gerada por uma circunferência de raio 1 e a curva na cor vermelha está a uma distância  $d \in$  da cicloide.

Abaixo exibimos alguns exemplos de curvas  ${}^p\alpha_\delta$  para diferentes valores de  $\delta \neq 0$  com  $r = 1$ .

Usando a Definição 2 podemos calcular a curvatura da cicloide em ponto  $0 < \theta < 2\pi$ ; a saber,

$$\kappa(\theta) = -\frac{1}{2\sqrt{2(1 - \operatorname{cos}(\theta))}}$$

O inverso negativo da curvatura em ponto  $0 < \theta < 2\pi$  é dado por

$$-\frac{1}{\kappa(\theta)} = 2\sqrt{2(1 - \operatorname{cos}(\theta))}.$$

A Figura 13 contém ilustrações de um arco de cicloide gerada por uma circunferência de raio 1 e algumas curvas paralelas à cicloide.

FIGURA 14. A curva em azul é uma cicloide gerada por uma circunferência de raio 1; a curva na cor vermelha está a uma distância 0,3 da cicloide na cor azul com  $\delta = 0,3$ , e a curva em verde é uma cicloide gerada por uma circunferência de raio  $1 - \frac{0,3}{\pi}$ .

FIGURA 15. A curva em azul é uma cicloide gerada por uma circunferência de raio 1; a curva na cor vermelha está a uma distância 0,5 da cicloide na cor azul com  $\delta = 0,5$  e a curva em verde é uma cicloide gerada por uma circunferência de raio  $1 - \frac{5}{10\pi}$ .

FIGURA 16. A curva em azul é uma cicloide gerada por uma circunferência de raio 1; a curva na cor vermelha está a uma distância 1 u. m. da cicloide com  $\delta = 1$  e a curva em verde é uma cicloide gerada por uma circunferência de raio  $1 - \frac{1}{\pi}$ .

FIGURA 17. A curva em azul é uma cicloide gerada por uma circunferência de raio 1 e a curva na cor vermelha está uma distância 3 u. m. da cicloide com  $\delta = 3$

FIGURA 18. A curva em azul é uma cicloide gerada por uma circunferência de raio 1 e a curva na cor vermelha está uma distância  $\pi$  u. m. da cicloide com  $\delta = \pi$

Abaixo exibimos alguns exemplos de curvas  ${}^p\alpha_\delta$  para diferentes valores de  $\delta \neq 0$  com  $r = 1$ .

Ilustrações de cicloides e suas curvas paralelas podem ser encontrado no link <https://www.geogebra.org/m/pxdtyyzt> usando o GeoGebra de autoria dos próprios autores.

FIGURA 19. A curva em azul é uma cicloide gerada por uma circunferência de raio 1 e a curva na cor vermelha está uma distância  $d$  da cicloide.

FIGURA 20. A curva em azul é uma cicloide gerada por uma circunferência de raio 1; a curva na cor vermelha está uma distância 0,3 da cicloide na cor azul com  $\delta = 0,3$ , e a curva em verde é uma cicloide gerada por uma circunferência de raio  $1 - \frac{0,3}{\pi}$ .

FIGURA 21. A curva em azul é uma cicloide gerada por uma circunferência de raio 1; a curva na cor vermelha está a uma distância unitária da cicloide, com  $\delta = -1$ .

FIGURA 22. A curva em azul é uma cicloide gerada por uma circunferência de raio 1; a curva em vermelho é a curva paralela a uma distância  $\delta = 1$ ; os segmentos indicam a reta tangente e a normal ao longo da cicloide.

## 4. AGRADECIMENTOS

O autor Flank D. M. Bezerra agradece ao CNPq #303039/2021-3 pelo suporte financeiro. Os autores agradecem ao referee anônimo pelos valiosos comentários sobre o manuscrito preliminar.

## REFERÊNCIAS

- [1] A. F. Agnew and J. H. Mathews, *Parallel curves: getting there and getting back*, Internat. J. Math. Ed. Sci. Technol. **37** (2006), no. 1, 87–97.
- [2] O. V. Bustillos and A. Sassine, *A magia da curva cicloide*, Scortecci, São Paulo, 2011.
- [3] A. J. Kroopnik, *A note on parallel curves*, Two-Year College Math. J. **13** (1982), no. 1, 59–61.
- [4] J. Stewart, *Cálculo*, trad. da 7<sup>a</sup> ed. norte-americana, vol. 2, Trilha, Cengage Learning, 2016.
- [5] F. M. Stein, *The curve parallel to a parabola is not a parabola: parallel curves*, Two-Year College Math. J. **11** (1980), no. 4, 239–246.

## 5. APÊNDICE: CÓDIGOS PARA CONSTRUÇÃO DAS ANIMAÇÕES

Abaixo, disponibilizamos o conjunto de elementos  $\text{\LaTeX}$  necessários para que o leitor possa reproduzir as animações apresentadas anteriormente. Lembramos que os pacotes  $\text{\LaTeX}$  ‘tikz’, ‘animate’, e ‘multido’ devem estar presentes no preâmbulo do documento  $\text{\TeX}$ .

Para a Figura 1 em que um ponto  $P$  desloca-se ao longo de um arco de cicloide gerada por um círculo de raio  $r$ , considere os seguintes códigos:

```
\begin{figure}[!htp]
\centering
\begin{animateinline}[controls]{20}
\multiframe{227}{i=0+10}{
\begin{tikzpicture}[scale=1.5]
\path[use as bounding box] (-2,-1) rectangle (8,2.5);
\draw[dotted,gray] (-1.3,0) -- (7,0) node[below]{\texttt{r}};
\filldraw (\i/360,1)circle(0.02) node[right]{\tiny C};
\draw(\i/360,1)circle(1);
\draw[blue] ({\i/360-sin(\i/360 r)},{1-cos(\i/360 r)})circle(0.02)
node[right]{\tiny P};
\end{tikzpicture}
\end{animateinline}
\caption{Animação exibindo o ponto  $P$  sobre uma circunferência}
\end{figure}
```

Para a Figura 2 onde observa-se a geração de uma cicloide, resultado da rolagem de círculo de raio  $r$  que rola sem deslizar sobre uma reta  $r$ , considere os seguintes códigos:

```
\begin{figure}[!htp]
\centering
\begin{animateinline}[controls]{20}
\multiframe{227}{i=0+10}{
\begin{tikzpicture}[scale=1.4]
\path[use as bounding box] (-2,-1) rectangle (8,2.5);
```

```

\draw[dotted,gray] (-1.3,0) -- (7,0) node[below]{$r$};
\filldraw (\i/360,1)circle(0.02) node[right]{\tiny C};
\draw(\i/360,1)circle(1);
\draw[blue] ({\i/360-sin(\i/360 r)},{1-cos(\i/360 r)})circle(0.02)
node[right]{\tiny P};
\end{tikzpicture}}
\end{animateinline}
\caption{Animação exibindo o ponto $P$}
\end{figure}

```

Para a Figura 3 em que diferentes pontos são ilustrados ao longo de uma cicloide gerada por um círculo de raio  $r$ , considere os seguintes códigos:

```

\begin{figure}[!htp]
\centering
\begin{tikzpicture}
\draw[densely dotted,->,color=lightgray] (-2,0) -- (9,0)node[right]{$x$};
\draw[densely dotted,->,color=lightgray] (0,-1) -- (0,3)node[right]{$y$};
\foreach \x in {0,pi,4,2*pi}{\draw (\x,1) circle(1);}
\fill[color=blue] (0,0) circle(0.06);
\node at (-0.3,-0.3){$P$};
\fill[color=blue] (pi,2) circle(0.06);
\node at (pi,2.4){$P'$};
\fill[color=blue] (4.76,1.63) circle(0.06);
\node at (4.9,2){$P''$};
\fill[color=blue] (2*pi,0) circle(0.06);
\draw[->,color=blue] (-1.2,1)arc(180:140:1.1);
\draw[<-,color=blue] (1.2,1)arc(0:40:1.1);
\node at (2*pi,-0.3){$P'''$};
\draw[variable=\x, domain=-0.5*pi:2.5*pi,smooth,color=red,dotted,ultra thick]
plot ({\x-sin(\x r)},{1-cos(\x r)});
\end{tikzpicture}
\caption{Pontos da cicloide para diferentes valores de $\theta$}
\end{figure}

```

Para a Figura 4 onde observa-se uma cicloide, considere os seguintes códigos:

```

\begin{figure}[!htp]
\centering
\begin{tikzpicture}
\draw[variable=\x, domain=-2.3*pi:2.3*pi,smooth,color=blue,ultra thick]
plot ({\x-sin(\x r)},{1-cos(\x r)});
\end{tikzpicture}
\caption{Ilustração de uma cicloide}
\label{fig:enteSalabelaDsas}
\end{figure}

```

Para a Figura 9 onde pode-se observar o começo do uso do Princípio de Cavalieri, considere os seguintes códigos:

```

\begin{figure}[!htp]

```

```

\begin{animateinline}[poster = last, controls,loop]{4}
\multiframe{5}{ra=0+0.25}{
\begin{tikzpicture}[scale=1.5]
\draw[color=blue](0,2)--(3.1415,2);
\draw(0,2)--(0,0)--(3.1415,0);
\begin{scope}[xshift=-2.8*\ra cm]
\draw[blue,very thick] ({0.95*pi-sin(0.95*pi r)},{1-cos(0.95*pi r)})
-- ({pi-sin(0.95*pi r)},{1-cos(0.95*pi r)});
\end{scope}
\begin{scope}[xshift=-2.5*\ra cm]
\draw[blue,very thick] ({0.9*pi-sin(0.9*pi r)},{1-cos(0.9*pi r)})
-- ({pi-sin(0.9*pi r)},{1-cos(0.9*pi r)});
\end{scope}
\begin{scope}[xshift=-2.2*\ra cm]
\draw[blue, very thick] ({0.85*pi-sin(0.85*pi r)},{1-cos(0.85*pi r)})
-- ({pi-sin(0.85*pi r)},{1-cos(0.85*pi r)});
\end{scope}
\begin{scope}[xshift=-1.91*\ra cm]
\draw[blue, very thick] ({0.8*pi-sin(0.8*pi r)},{1-cos(0.8*pi r)})
-- ({pi-sin(0.8*pi r)},{1-cos(0.8*pi r)});
\end{scope}
\begin{scope}[xshift=-1.65*\ra cm]
\draw[blue,very thick] ({0.75*pi-sin(0.75*pi r)},{1-cos(0.75*pi r)})
-- ({pi-sin(0.75*pi r)},{1-cos(0.75*pi r)});
\end{scope}
\begin{scope}[xshift=-1.4*\ra cm]
\draw[blue,very thick] ({0.7*pi-sin(0.7*pi r)},{1-cos(0.7*pi r)})
-- ({pi-sin(0.7*pi r)},{1-cos(0.7*pi r)});
\end{scope}
\begin{scope}[xshift=-1.15*\ra cm]
\draw[blue,very thick] ({0.65*pi-sin(0.65*pi r)},{1-cos(0.65*pi r)})
-- ({pi-sin(0.65*pi r)},{1-cos(0.65*pi r)});
\end{scope}
\begin{scope}[xshift=-0.95*\ra cm]
\draw[blue,very thick] ({0.6*pi-sin(0.6*pi r)},{1-cos(0.6*pi r)})
-- ({pi-sin(0.6*pi r)},{1-cos(0.6*pi r)});
\end{scope}
\begin{scope}[xshift=-0.74*\ra cm]
\draw[blue,very thick] ({0.55*pi-sin(0.55*pi r)},{1-cos(0.55*pi r)})
-- ({pi-sin(0.55*pi r)},{1-cos(0.55*pi r)});
\end{scope}
\begin{scope}[xshift=-0.56*\ra cm]
\draw[blue,very thick] ({0.5*pi-sin(0.5*pi r)},{1-cos(0.5*pi r)})
-- ({pi-sin(0.5*pi r)},{1-cos(0.5*pi r)});
\end{scope}
}

```

```

\begin{scope}[xshift=-0.44*\ra cm]
\draw[blue,very thick] ({0.45*pi-sin(0.45*pi r)},{1-cos(0.45*pi r)})
-- ({pi-sin(0.45*pi r)},{1-cos(0.45*pi r)});
\end{scope}
\begin{scope}[xshift=-0.3*\ra cm]
\draw[blue,very thick] ({0.4*pi-sin(0.4*pi r)},{1-cos(0.4*pi r)})
-- ({pi-sin(0.4*pi r)},{1-cos(0.4*pi r)});
\end{scope}
\begin{scope}[xshift=-0.2*\ra cm]
\draw[blue,very thick] ({0.35*pi-sin(0.35*pi r)},{1-cos(0.35*pi r)})
-- ({pi-sin(0.35*pi r)},{1-cos(0.35*pi r)});
\end{scope}
\begin{scope}[xshift=-0.14*\ra cm]
\draw[blue,very thick] ({0.3*pi-sin(0.3*pi r)},{1-cos(0.3*pi r)})
-- ({pi-sin(0.3*pi r)},{1-cos(0.3*pi r)});
\end{scope}
\begin{scope}[xshift=-0.08*\ra cm]
\draw[blue,very thick] ({0.25*pi-sin(0.25*pi r)},{1-cos(0.25*pi r)})
-- ({pi-sin(0.25*pi r)},{1-cos(0.25*pi r)});
\end{scope}
\begin{scope}[xshift=-0.05*\ra cm]
\draw[blue,very thick] ({0.2*pi-sin(0.2*pi r)},{1-cos(0.2*pi r)})
-- ({pi-sin(0.2*pi r)},{1-cos(0.2*pi r)});
\end{scope}
\begin{scope}[xshift=-0.03*\ra cm]
\draw[blue,very thick] ({0.15*pi-sin(0.15*pi r)},{1-cos(0.15*pi r)})
-- ({pi-sin(0.15*pi r)},{1-cos(0.15*pi r)});
\end{scope}
\draw[blue,very thick] ({0.1*pi-sin(0.1*pi r)},{1-cos(0.1*pi r)})
-- ({pi-sin(0.1*pi r)},{1-cos(0.1*pi r)});
\draw[blue,very thick] ({0.05*pi-sin(0.05*pi r)},{1-cos(0.05*pi r)})
-- ({pi-sin(0.05*pi r)},{1-cos(0.05*pi r)});
\draw[smooth,domain=0:pi,blue] plot ({\x-sin(\x r)},{1-cos(\x r)})
-- (3.1415,2)arc(90:270:1);
\draw[
thick,decoration={brace, mirror, raise=0.3cm},
decorate
] (0,0) -- node[below, yshift=-0.3cm] {$\pi r$} (3.1415,0);
\draw[thick,decoration={brace, mirror, raise=0.3cm},
decorate] (0,2) -- node[left, xshift=-0.3cm] {$2 r$} (0,0);
\end{tikzpicture}}
\end{animateinline}
\caption{Princípio de Cavalieri}
\label{FigAnim0a3}
\end{figure}

```

Para a Figura 10 onde pode-se observar o uso do Princípio de Cavalieri, considere os seguintes códigos:

```

\begin{figure}[!htp]
\centering
\begin{animateinline}[poster = last, controls,loop]{3}
\multiframe{5}{ra=0+0.25}{
\begin{tikzpicture}[scale=1.5]
\path[use as bounding box] (-2,-1) rectangle (8,2.5);
\draw[dotted] (0,2)--(3.1415,2);
\draw(0,2)--(3.1415,0);
\draw[smooth,domain=0:pi,blue] plot ({\x-sin(\x r)},{1-cos(\x r)});
\draw (3.1415,2)arc(90:270:1);
\draw[smooth,domain=0:pi,blue,fill=blue!50!white,opacity=0.5]
(0,2)--(0,0)--(1.57,0)--(1.57,1)--cycle;
\draw[smooth,domain=0:1.57,blue,fill=blue!50!white,opacity=0.5]
plot ({pi-\x},{1-cos(\x r)})--(1.57,0)--(3.1415,0);
\draw[smooth,domain=1.57:pi,blue,fill=blue!50!white,opacity=0.5]
plot ({pi-\x},{1-cos(\x r)})--(0,2)--(1.57,1);
\begin{scope}[rotate around={180*\ra:(1.57,1)}]
\draw[smooth,domain=1.57:pi,blue,fill=blue!50!white,opacity=0.5]
plot ({pi-\x},{1-cos(\x r)})--(0,2)--(1.57,1);
\end{scope}
\draw[smooth,domain=0:pi,blue] plot ({pi-\x},{1-cos(\x r)});
\draw[
thick,decoration={brace, mirror, raise=0.3cm},
decorate
] (0,0) -- node[below, yshift=-0.3cm] {$\pi r$} (3.1415,0);
\draw[thick,decoration={brace, mirror, raise=0.3cm},
decorate] (0,2) -- node[left, xshift=-0.3cm] {$2 r$} (0,0);
\end{tikzpicture}}
\newframe
\begin{tikzpicture}[scale=1.5]
\path[use as bounding box] (-2,-1) rectangle (8,2.5);
\draw[dotted] (0,2)--(3.1415,2);
\draw(0,2)--(3.1415,0);
\draw[smooth,domain=0:pi,blue] plot ({\x-sin(\x r)},{1-cos(\x r)});
\draw (3.1415,2)arc(90:270:1);
\draw[smooth,domain=0:pi,blue,fill=blue!50!white,opacity=0.5]
(0,2)--(0,0)--(pi,0)--cycle;
\draw[
thick,decoration={brace, mirror, raise=0.3cm},
decorate
] (0,0) -- node[below, yshift=-0.3cm] {$\pi r$} (3.1415,0);
\draw[thick,decoration={brace, mirror, raise=0.3cm},
decorate] (0,2) -- node[left, xshift=-0.3cm] {$2 r$} (0,0);

```

```

\end{tikzpicture}
\end{animateinline}
\caption{Área da regi~ao  $\mathcal{A}$  e o Princípio de Cavalieri}
\label{FigAnim0a6}
\end{figure}

```

Para a Figura 12 onde observa-se a reta tangente sobre alguns pontos ao longo da cicloide, considere os seguintes códigos:

```

\begin{figure}[!htp]
\centering
\begin{animateinline}[poster = last, controls]{25}
\multiframe{227}{i=0+10}
{
\begin{tikzpicture}[scale=1.5]
\path[use as bounding box] (-1.5,-1) rectangle (8,2.5);
\draw[dotted,gray] (-1.3,0) -- (7.5,0) node[right]{$\texttt{r}$};
\draw[name path=line 1](\i/360,1)circle(1);
\filldraw[blue] ({\i/360-sin(\i/360 r)},{1-cos(\i/360 r)})circle(0.03)
node[below]{{\tiny P}};
\draw({\i/360},1)--({\i/360-sin(\i/360 r)},{1-cos(\i/360 r)});
\filldraw({\i/360},1)circle(0.03);
\draw[variable=\x, domain=0:2*pi,smooth,color=blue]
plot ({\x-sin(\x r)},{1-cos(\x r)});
\draw[add= 0.5 and 0.5, red,thick,name path=line 2]
({\i/360-sin(\i/360 r)},{1-cos(\i/360 r)}) to ({\i/360},2) node[right]{$s$};
\fill[violet,name intersections={of=line 1 and line 2}]
(intersection-1) circle (1pt);
\end{tikzpicture}}
\end{animateinline}
\caption{Um ponto sobre uma circunferência que rola sem deslizar}
\label{Animacao1}
\end{figure}

```

Para a Figura 13 onde observa-se curvas paralelas a arcos de cicloide, considere os seguintes códigos:

```

\begin{figure}[!htp]
\centering
\begin{animateinline}[poster = last, controls,loop]{4}
\multiframe{30}{ra=0+0.2}{
\begin{tikzpicture}[scale=1.5]
\path[use as bounding box] (-5,-6) rectangle (8,4);
\def\d{\ra}
\def\r{1}
\def\P{\r*\x-\r*sin(\x r)}
\def\Q{\r-\r*cos(\x r)}
\def\R{2-2*cos(\x r)}

```

```

\def\S{\sqrt{\R}}
\def\T{\r*\x-\r*\sin(\x r)+\d*\sin(\x r)*1/\S}
\def\U{\r-\r*\cos(\x r)+(\d*\cos(\x r)-\d)*1/\S}
\draw[variable=\x, domain=0.1:2*pi-0.1,smooth,color=blue] plot ({\P},{\Q});
\draw[variable=\x, domain=0.1:2*pi-0.1,smooth,color=red] plot ({\T},{\U});
\end{tikzpicture}}
\end{animateinline}
\end{figure}

```

Para a Figura 19 onde observa-se curvas paralelas a arcos de cicloide, considere os seguintes códigos:

```

\begin{figure}[!htp]
\centering
\begin{animateinline}[poster = last, controls,loop]{4}
\multiframe{30}{ra=0+0.2}{
\begin{tikzpicture}[scale=1.5]
\path[use as bounding box] (-1,-0.3) rectangle (6.5,6.5);
\def\d{-\ra}
\def\r{1}
\def\P{\r*\x-\r*\sin(\x r)}
\def\Q{\r-\r*\cos(\x r)}
\def\R{2-2*\cos(\x r)}
\def\S{\sqrt{\R}}
\def\T{\r*\x-\r*\sin(\x r)+\d*\sin(\x r)*1/\S}
\def\U{\r-\r*\cos(\x r)+(\d*\cos(\x r)-\d)*1/\S}
\draw[variable=\x, domain=0.1:2*pi-0.1,smooth,color=blue] plot ({\P},{\Q});
\draw[variable=\x, domain=0.1:2*pi-0.1,smooth,color=red] plot ({\T},{\U});
\end{tikzpicture}}
\end{animateinline}
\end{figure}

```

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA, JOÃO PESSOA, BRASIL

*Email address:* flank@mat.ufpb.br, carlos.bocker@academico.ufpb.br