

CLASSES ESPECIAIS DE CAMPOS DE VETORES NA ESFERA

JEAN-PAUL BRASSELET, DAHISY LIMA, AND THUY NGUYEN

RESUMO. Neste artigo, estudamos uma classe especial de campos vetoriais na esfera 2-dimensional, inspirados na decomposição da esfera em gomos semelhantes aos gomos de uma laranja. Esses campos possuem exatamente duas singularidades localizadas nos polos Norte e Sul. Caracterizamos os índices dessas singularidades em função da quantidade de gomos na decomposição da esfera como uma laranja.

1. INTRODUÇÃO

O Teorema de Poincaré-Hopf e um de seus elementos centrais, a característica de Euler-Poincaré, foram amplamente estudados e inúmeros artigos abordam esse tema, incluindo uma significativa produção científica no Brasil. Em particular, os dois primeiros números da Revista Matemática Universitária, publicados em 1985, apresentam os artigos intitulados “*Característica de Euler-Poincaré*” e “*Teorema de Euler sobre Poliedros*”, ambos de autoria do professor Elon Lages Lima, um dos matemáticos brasileiros mais influentes, especialmente no ensino e na divulgação da Matemática.

A característica de Euler-Poincaré surge naturalmente em diversos contextos da Matemática e mesmo em outras ciências, por exemplo, na Mecânica, Economia, Medicina, entre outras.

O Teorema de Poincaré-Hopf estabelece uma relação surpreendente entre a característica de Euler-Poincaré de uma variedade suave compacta e a soma dos índices das singularidades de um campo vetorial definido nessa variedade. Esse resultado

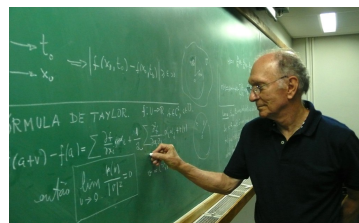


FIGURA 1. Elon Lages Lima
1929-2017

Data de aceitação: 08 de Setembro de 2025.

Palavras chave. campos vetoriais; fluxos na esfera; característica de Euler-Poincaré, índice de Poincaré-Hopf.

desempenha um papel fundamental na Topologia Diferencial, pois relaciona a estrutura global de uma variedade ao comportamento local dos campos vetoriais nela definidos. O Teorema de Poincaré-Hopf foi inicialmente provado em dimensão 2 por Henri Poincaré (1885) e posteriormente generalizado para as demais dimensões por Heinz Hopf (1927). A demonstração do Teorema de Poincaré-Hopf tanto no caso orientável quanto no caso não orientável pode ser encontrada, por exemplo, em [2]. Para uma apresentação histórica mais completa, devemos especificar que a primeira demonstração de um Teorema de Poincaré-Hopf no caso de variedades singulares deve-se a Marie-Hélène Schwartz (1965) (veja [3], [6]).

Um exemplo clássico ocorre na esfera bidimensional. Há inúmeros exemplos de campos vetoriais na esfera S^2 com singularidades isoladas, nos quais a soma dos índices das singularidades é igual à característica de Euler-Poincaré da esfera, ou seja, $+2$ (veja, por exemplo, Exemplo 5.5).

Neste artigo, investigamos uma família particular de campos vetoriais na esfera bidimensional, motivados por uma decomposição da esfera em segmentos análogos aos gomos de uma laranja. Os campos que consideramos apresentam exatamente duas singularidades, localizadas nos polos Norte e Sul. Nosso objetivo é determinar os índices dessas singularidades em função do número de gomos que compõem a decomposição da esfera.

2. CAMPOS VETORIAIS E FLUXOS SOBRE SUPERFÍCIES

Podemos definir campos vetoriais em regiões planares e regiões tridimensionais a partir de funções vetoriais.

Recorde que uma *função vetorial* definida em um subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ com valores em \mathbb{R}^3 é uma função

$$\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$$

tal que, para cada ponto $(x, y, z) \in S$, temos

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)),$$

onde $F_1, F_2, F_3 : S \rightarrow \mathbb{R}$ são funções escalares que representam as componentes da função vetorial nas direções do espaço tridimensional.

Definição 2.1. *Seja $M \subseteq \mathbb{R}^3$ uma superfície diferenciável. Um campo vetorial tangente a M é uma função vetorial*

$$v : M \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

que associa a cada ponto $p \in M$ um vetor $v(p) \in \mathbb{R}^3$ pertencente ao plano tangente $T_p M$ de M no ponto p .

Interpretação geométrica: Vale ressaltar que o vetor $v(p)$ é tangente a M no ponto p se, e somente se, $v(p)$ é ortogonal ao vetor normal à superfície M no ponto p . Portanto, para garantir que v seja um campo vetorial sobre a superfície M basta que, para todo $p \in M$, o vetor $v(p)$ satisfaça a condição:

$$v(p) \cdot n(p) = 0,$$

em que $n(p)$ denota o vetor normal a M no ponto p e \cdot representa o produto escalar.

Definição 2.2. Dado um campo vetorial v tangente a uma superfície M , definimos o conjunto das singularidades de v , e denotamos por $Sing(v)$, o conjunto de pontos $p \in M$ tais que o campo se anula, i.e.

$$Sing(v) := \{p \in M \mid v(p) = 0\}.$$

Exemplo 2.3 (Campos vetoriais tangentes à esfera \mathbb{S}^2). A esfera unitária bidimensional em \mathbb{R}^3 é definida como sendo o conjunto

$$\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Considere o campo vetorial $v : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$v(x, y, z) := (-y, x, 0).$$

Observe que v é um campo vetorial tangente à esfera \mathbb{S}^2 e as únicas singularidades de v são o polo norte $(0, 0, 1)$ e o polo sul $(0, 0, -1)$. Um esboço deste campo vetorial é ilustrado na Figura 2 abaixo.

Outro exemplo de campo vetorial tangente a \mathbb{S}^2 é o campo $w : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$w(x, y, z) := (-xz, -yz, x^2 + y^2).$$

O vetor $v(p)$ aponta na direção do polo Norte em quase todo ponto p da esfera, exceto nos polos, que são as únicas singularidades do campo w . A Figura 2 abaixo ilustra esse comportamento. \diamond

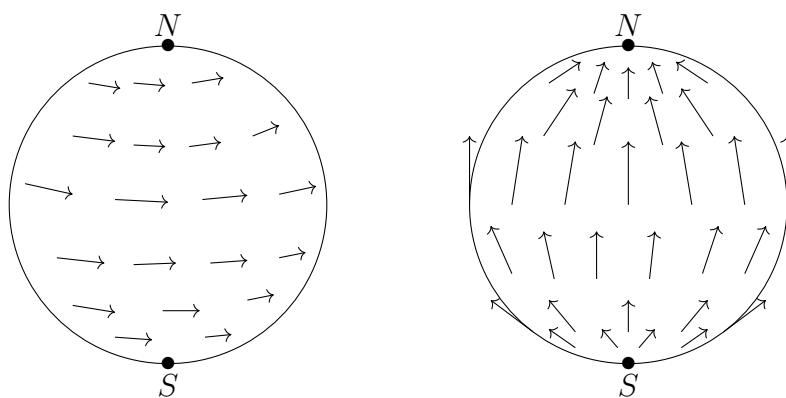


FIGURA 2. Campos de vetores tangentes a esfera \mathbb{S}^2 .

Uma propriedade fundamental de um campo de vetores $v : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido em uma superfície $M \subseteq \mathbb{R}^3$ é que ele gera um fluxo contínuo.

Definição 2.4. O fluxo gerado pelo campo vetorial suave v é definido por

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times M &\longrightarrow M \\ (t, x) &\longmapsto \gamma_x(t) \end{aligned}$$

onde $\gamma_x : \mathbb{R} \rightarrow M$ é a curva integral de v passando por x , isto é, γ_x é uma solução da EDO

$$\begin{cases} \gamma_x(0) = x, \\ \dot{\gamma}_x(t) = v(\gamma_x(t)). \end{cases}$$

Em outras palavras, dado um ponto $x \in M$, existe uma única curva γ_x que passa por x no instante inicial $t = 0$ e cuja derivada em cada instante t é igual ao vetor definido por v no ponto $\gamma_x(t)$.

Geometricamente, a curva integral γ_x pode ser interpretada como o caminho percorrido por uma partícula que se move ao longo do campo vetorial v , onde a velocidade da partícula em cada ponto é dada pelo vetor atribuído a esse ponto por v . Assim, o fluxo φ descreve como cada ponto de M é transportado ao longo do tempo pelas linhas de fluxo do campo vetorial.

Exemplo 2.5. Retomando o Exemplo 2.3, os fluxos associados aos campos vetoriais v e w estão ilustrados na Figura 3.

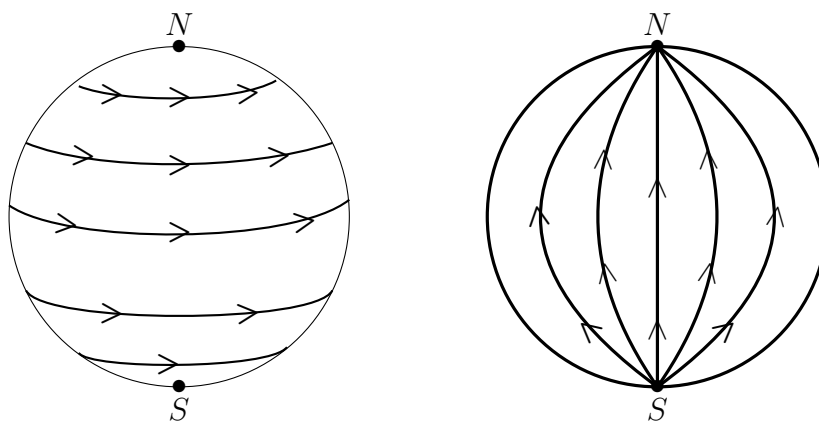


FIGURA 3. Fluxo na esfera.

3. CARACTERÍSTICA DE EULER-POINCARÉ

A primeira ocorrência do que hoje é conhecido como “característica de Euler-Poincaré” remonta ao monge italiano Francesco Maurolico que, em 26 de Dezembro 1537, observou no *Compositiones solidorum regularium* que, para todos os poliedros de Platão, vale a seguinte relação

$$(1) \quad n_0 - n_1 + n_2 = 2,$$

onde n_0 é o número de vértices, n_1 é o número de arestas e n_2 o número de faces do poliedro. Para mais detalhes, veja [1, Appendici, página 291].

De uma maneira mais geral, uma *triangulação* de uma superfície M consiste em um poliedro (triangulado) $K \subset \mathbb{R}^n$ e de um homeomorfismo $h : |K| \rightarrow M$, no qual $|K|$ é o subespaço topológico compacto do \mathbb{R}^n formado pela união de todos os simplexos que compõem o poliedro K . Exemplos de triangulações da esfera S^2 são apresentados na Figura 4.

Seja K uma triangulação de uma superfície compacta M , com número de vértices n_0 , número de arestas n_1 e número de faces (triângulos) n_2 . Então a *característica de Euler-Poincaré* de K é definida por

$$(2) \quad \chi(K) = n_0 - n_1 + n_2.$$

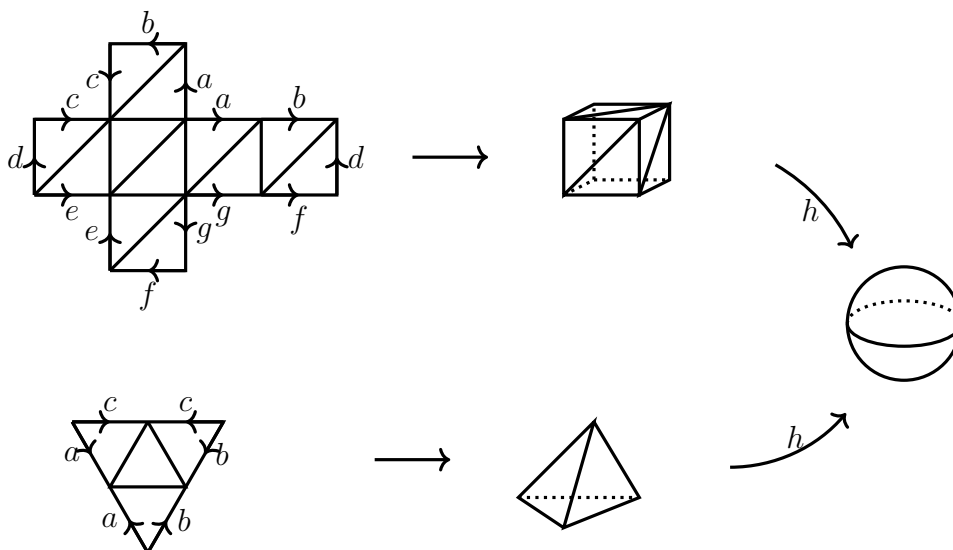


FIGURA 4. Triangulações da esfera. Nas representações planares identificam-se os segmentos de mesmo nome com a mesma orientação.

Teorema 3.1 (Poincaré (1893)). *Seja M uma superfície compacta, não necessariamente orientável. A característica de Euler-Poincaré de uma triangulação de M é um invariante, ou seja, não depende da triangulação escolhida.*

Este teorema garante que a *característica de Euler-Poincaré* de M , denotada por $\chi(M)$, pode ser definida como sendo $\chi(K)$ para qualquer triangulação K da superfície M .

Assim podemos denotar por $\chi(\mathbb{S}^2)$ a quantidade $\chi(K)$ para qualquer triangulação da esfera, chamada de *característica de Euler-Poincaré* da esfera. Consequentemente, temos

$$\chi(\mathbb{S}^2) = n_0 - n_1 + n_2 = 2,$$

para qualquer que seja a triangulação da esfera.

No caso da esfera, há várias demonstrações para o Teorema 3.1. A primeira (indireta) foi apresentada por Descartes em 1639. Posteriormente, Euler propôs uma demonstração em 1758, embora com lacunas (incorreta), seguidas por contribuições de Legendre (1794) e Cauchy (1811), que refinaram a argumentação. Para este resultado, veja os artigos de Elon Lima [4, 5], também (Brasselet e Thuy [2]).

Exemplo 3.2. Na Figura 4 apresentamos duas triangulações para a esfera \mathbb{S}^2 . Como vimos, podemos utilizar ambas triangulações para calcular a característica de Euler-Poincaré de \mathbb{S}^2 . Utilizando a triangulação oriunda do cubo, temos

$$n_0 - n_1 + n_2 = 8 - 18 + 12 = 2.$$

Considerando a triangulação vinda do tetraedro, temos

$$n_0 - n_1 + n_2 = 4 - 6 + 4 = 2.$$

Assim, a característica de Euler-Poincaré de \mathbb{S}^2 é 2. \diamond

4. ÍNDICE DE POINCARÉ-HOPF

Nesta seção, mostraremos que, para cada singularidade isolada a de um campo vetorial v , é possível associar um número inteiro, chamado de *índice do campo do vetorial v no ponto a* , que denotaremos por $I(v, a)$. O índice de um campo de vetores pode ser definido de muitas maneiras equivalentes em diferentes contextos: como por meio de grupos de homologia, integrais de formas diferenciais, entre outros. Nesse artigo, vamos usar a definição em termos de aplicação de Gauss e do conceito de grau.

Ao longo dessa seção, sejam v um campo vetorial em uma superfície compacta M e $a \in M$ uma singularidade isolada de v . Supondo a superfície M orientada, consideramos uma vizinhança V_a de a homeomorfa a um aberto de \mathbb{R}^2 e tal que a seja a única singularidade de v dentro de V_a , que existe pois a é uma singularidade isolada de v (veja Figura 5). Podemos considerar um segundo exemplar de \mathbb{R}^2 , denotado por $\tilde{\mathbb{R}}^2$, com a mesma orientação.

Seja B_a uma bola de centro a e raio suficientemente pequeno tal que $B_a \subset V_a$. Ao longo da 1-esfera \mathbb{S}_a^1 , que é o bordo de B_a , o campo de vetores v não se anula, i.e., não possui singularidades.

Para cada ponto x de \mathbb{S}_a^1 , consideramos o vetor unitário

$$w(x) = \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$$

em $\tilde{\mathbb{R}}^2$, onde $\|v(x)\|$ é a norma euclidiana de $v(x)$. Por construção, $w(x)$ é um vetor de norma 1 (tamanho 1). Assim, sua extremidade final, denotada por $\tilde{w}(x)$, pertence à esfera unitária \mathbb{S}^1 centrada na origem de $\tilde{\mathbb{R}}^2$.

A aplicação $\gamma_a : \mathbb{S}_a^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $\gamma_a(x) = \tilde{w}(x)$ é chamada de *aplicação de Gauss* (veja Figura 5).

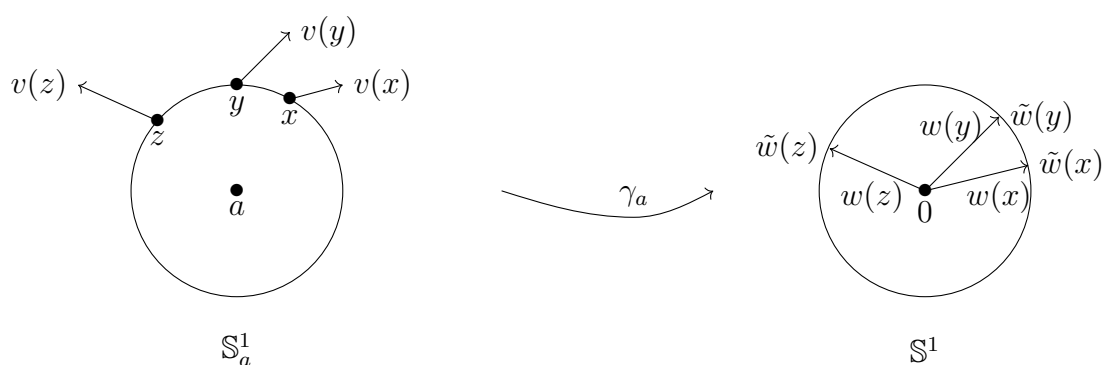


FIGURA 5. Aplicação de Gauss.

Quando o ponto x fizer um turno (i. e. uma volta completa) no sentido positivo de \mathbb{S}_a^1 , o ponto $\tilde{w}(x)$ fará certos turnos da esfera \mathbb{S}^1 no sentido positivo ou negativo. Convencionamos que um turno no sentido positivo vale $+1$ enquanto que um turno no sentido negativo vale -1 . A soma destes valores é, por definição, o índice $I(v, a)$ do campo de vetores v no ponto a .

Exemplo 4.1. Considere um campo de vetores v em \mathbb{R}^2 tal que, em uma vizinhança de uma singularidade isolada a , o campo v tenha o comportamento representado na Figura 6, à esquerda. Nessa figura, ilustramos a aplicação de Gauss. Observe que à medida que x percorre \mathbb{S}_a^1 no sentido positivo (anti-horário), o ponto $\tilde{w}(x)$ percorre a esfera unitária \mathbb{S}^1 exatamente uma volta completa. Portanto, $I(v, 0) = +1$. \diamond

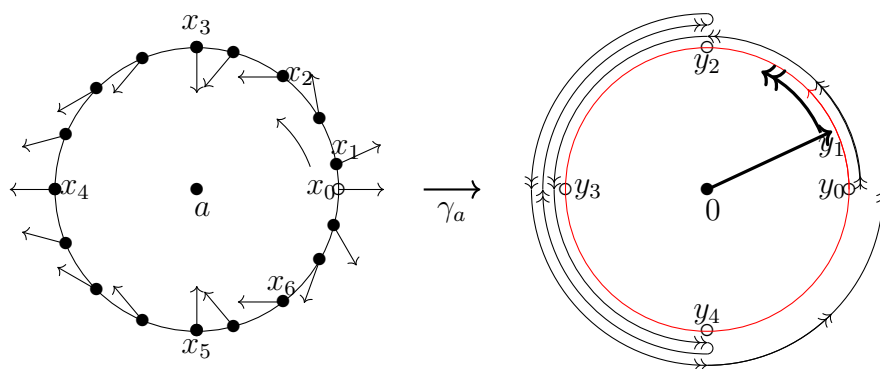


FIGURA 6. Aplicação de Gauss: $y_0 = \tilde{w}(x_0)$, $y_1 = \tilde{w}(x_1)$, $y_2 = \tilde{w}(x_5)$, $y_3 = \tilde{w}(x_2) = \tilde{w}(x_4) = \tilde{w}(x_6)$ and $y_4 = \tilde{w}(x_3)$.

Exemplo 4.2. Nas Figuras 7 a 10, apresentamos mais alguns exemplos do cálculo do índice de campos de vetores em singularidades isoladas.

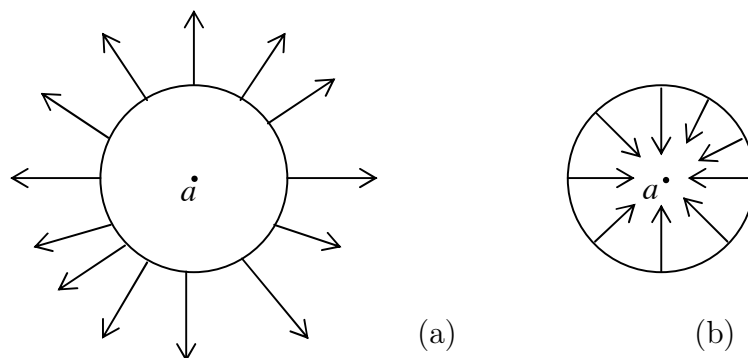


FIGURA 7. (a) Campo radial repulsor, (b) Campo radial atrator: $I(v, a) = +1$.

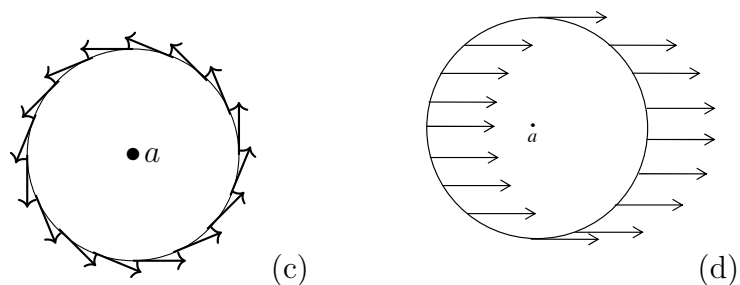


FIGURA 8. (c) Campo rotativo: $I(v, a) = +1$, (d) Campo de índice nulo $I(v, a) = 0$.

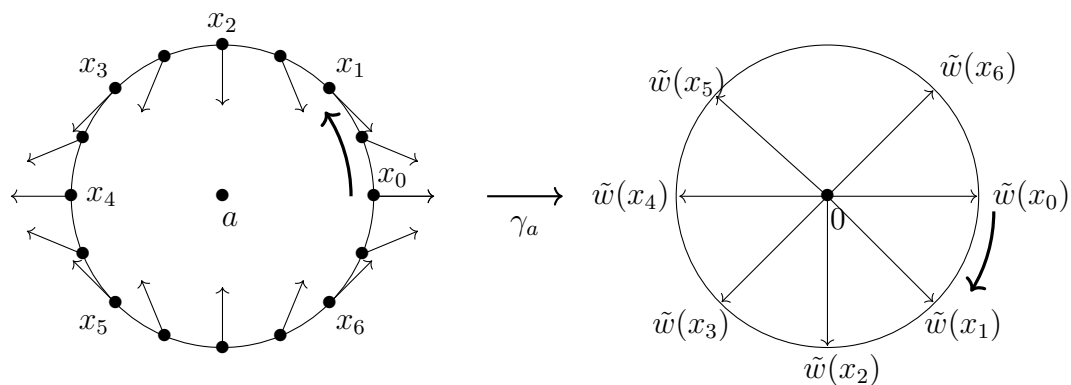


FIGURA 9. Campo de índice $I(v, a) = -1$.

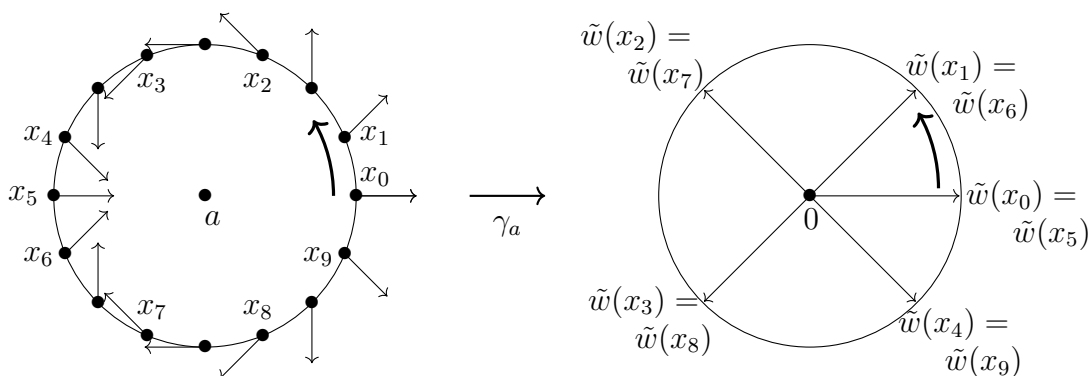


FIGURA 10. Campo de índice $I(v, a) = +2$.

Observação 4.3. Observamos que se um campo de vetores v definido sobre o bordo S_a^1 de B_a se estende sem singularidades para o interior de B_a , então seu índice $I(v, a)$ vale 0. Esta observação será útil a seguir.

O Teorema de Poincaré-Hopf foi inicialmente provado em dimensão 2 por Henri Poincaré (1885) e posteriormente generalizado para as demais dimensões por Heinz Hopf (1927). Esse resultado estabelece uma conexão entre a topologia global de uma variedade e o comportamento local dos campos vetoriais definidos sobre ela.

Teorema 4.4 (Teorema de Poincaré-Hopf). *Seja M uma variedade diferencial compacta e sem bordo (orientável ou não) e seja v um campo vetorial em M com um número finito de zeros isolados a_i . Então, a seguinte fórmula é válida:*

$$\sum_i I(v, a_i) = \chi(M)$$

onde a soma é tomada sobre os índices $I(v, a_i)$ do campo v nos zeros isolados a_i e $\chi(M)$ é a característica de Euler-Poincaré de M .

A demonstração do Teorema de Poincaré-Hopf tanto no caso orientável quanto no caso não orientável pode ser encontrada, por exemplo, em [2].

5. FLUXOS NA ESFERA

Podemos imaginar diversos tipos de campos vetoriais tangentes à esfera bidimensional \mathbb{S}^2 , juntamente com seus fluxos correspondentes (ou seja, as curvas integrais desses campos vetoriais) mesmo ao impormos a restrição de que o campo possui exatamente dois pontos singulares localizados no polo Norte e no polo Sul.

Vale notar que, no caso de um único ponto singular, é claro que o índice de Poincaré-Hopf será +2 de qualquer maneira, independentemente da configuração do campo vetorial.

Entre os exemplos mais familiares, temos os campos de vetores “clássicos”, apresentados no Exemplo 2.3 (veja a Figura 2), nos quais as singularidades nos polos Norte (N) e Sul (S) possuem índices +1, cada uma.

Mas podemos considerar (imaginar) singularidades nos dois polos com índices bem diferentes de +1 e responder perguntas como: Qual é o índice mais alto possível para um campo vetorial tangente à esfera bidimensional?

Para respondermos a essa pergunta, vamos considerar uma decomposição particular da esfera, como a seguir. Cortaremos a esfera em aponta, como os gomos de uma laranja, veja a Figura 11.

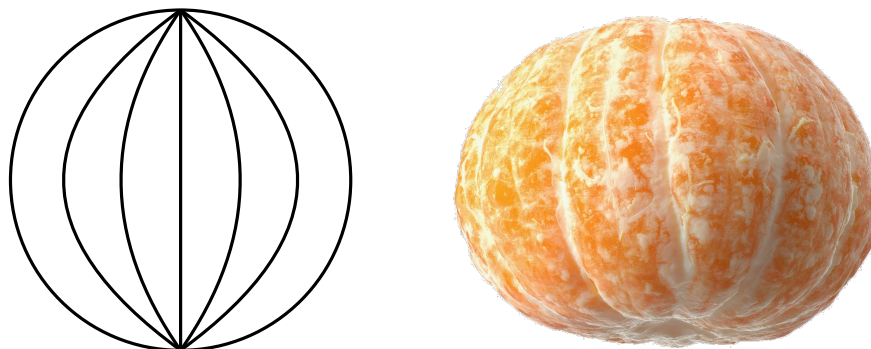


FIGURA 11. Decompondo a esfera como uma laranja.

Podemos imaginar diversos campos vetoriais em cada gomo da decomposição da esfera. No entanto, estaremos interessados em campos específicos, cujos fluxos apresentam um comportamento característico do tipo “elipse” ou do tipo “hipérbole” dentro de cada gomo. Chamamos de “*gomo do tipo A*” o gomo apresentando na Figura 12(A), onde o fluxo exibe um comportamento do tipo “elipse” em relação ao polo Norte N e do tipo “hipérbole” em relação ao polo Sul S .

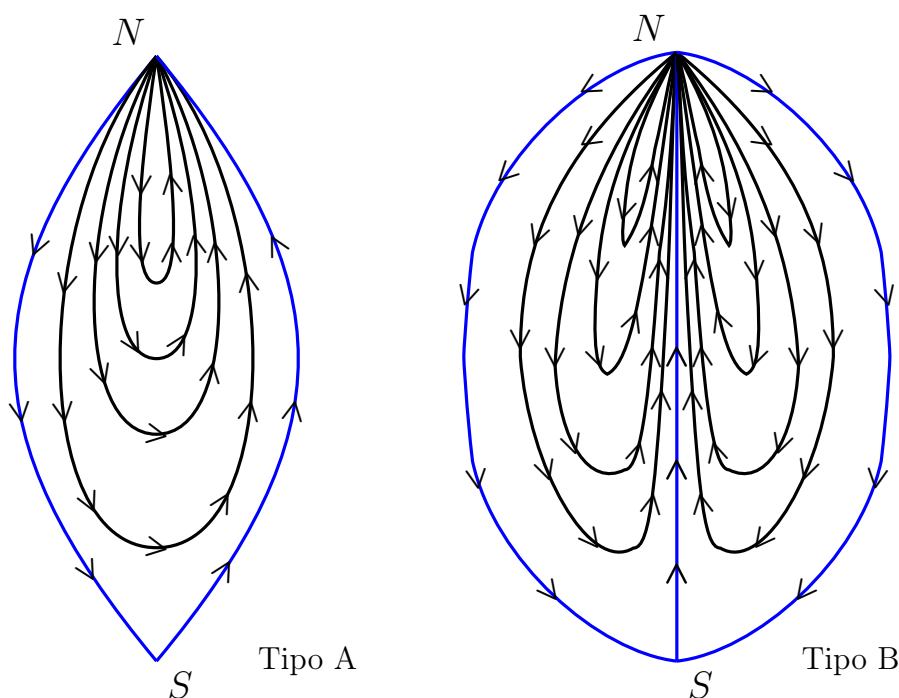


FIGURA 12. Gomos de Tipo A e B.

Note que não podemos colar dois gomos do tipo A semelhantes um ao lado do outro, pois os lados a serem colados possuem orientações opostas.

Para contornar essa incompatibilidade, vamos considerar “gomos duplos”, formados por dois gomos dispostos um ao lado do outro de maneira simétrica em relação ao eixo comum (veja a Figura 12(B)). Essa configuração garante uma transição suave entre os campos vetoriais nos gomos. Vamos chamar essa configuração dupla por “*gomo do tipo B*”.

Proposição 5.1. *Colocando p gomos duplos de tipo B um ao lado do outro, de maneira a preencher a esfera \mathbb{S}^2 , o índice Poincaré-Hopf de um campo de vetores tangente ao fluxo resultante é igual a $1 + p$ no polo Norte N e é igual a $1 - p$ no polo Sul S .*

Demonstração. Apresentamos a demonstração para um número arbitrário p de gomos, entretanto o leitor pode ter em mente o caso $p = 3$ para fins de ilustração e facilitar a compreensão.

Cálculo do índice no polo Norte N :

Consideramos a decomposição da esfera \mathbb{S}^2 utilizando p gomos do tipo B . Nesse caso, o disco unitário de centro N é, portanto, dividido em $2p$ setores (veja Figura 13 a, para o caso $p = 3$). Em cada um desses setores, o ângulo entre os eixos (semi-retas) que delimitam o setor é π/p .

Com o propósito de calcular o índice de Poincaré-Hopf no polo Norte, analisamos o comportamento de um vetor tangente às linhas do fluxo, cuja origem está no círculo C de raio 1. O índice em N corresponde ao número de voltas que este vetor faz enquanto percorremos uma volta completa no círculo C no sentido positivo.

Seja V_1 o vetor tangente ao eixo de ângulo 0, que tomamos como vetor de partida. Ao atravessarmos o primeiro setor (veja Figura 13 a), o vetor chega à posição V_2 , agora tangente ao eixo de ângulo π/p . No entanto, como a orientação é alterada, o ângulo entre o vetor inicial V_1 e o vetor final V_2 é dado por

$$\pi + \frac{\pi}{p}.$$

As mesmas considerações mostram que no segundo setor, entre os eixos de ângulos π/p e $2\pi/p$, o ângulo entre o vetor inicial V_2 e o vetor final V_3 também é dado por

$$\pi + \frac{\pi}{p}.$$

Como existem $2p$ setores, quando tivermos feito uma volta completa, o vetor V_1 terá feito uma volta de ângulo

$$2p \left(\pi + \frac{\pi}{p} \right) = (p + 1)2\pi$$

(para $p = 3$, temos 8π). Então, o índice de Poincaré-Hopf no polo Norte N vale $(p + 1)$ (para $p = 3$, temos 4).

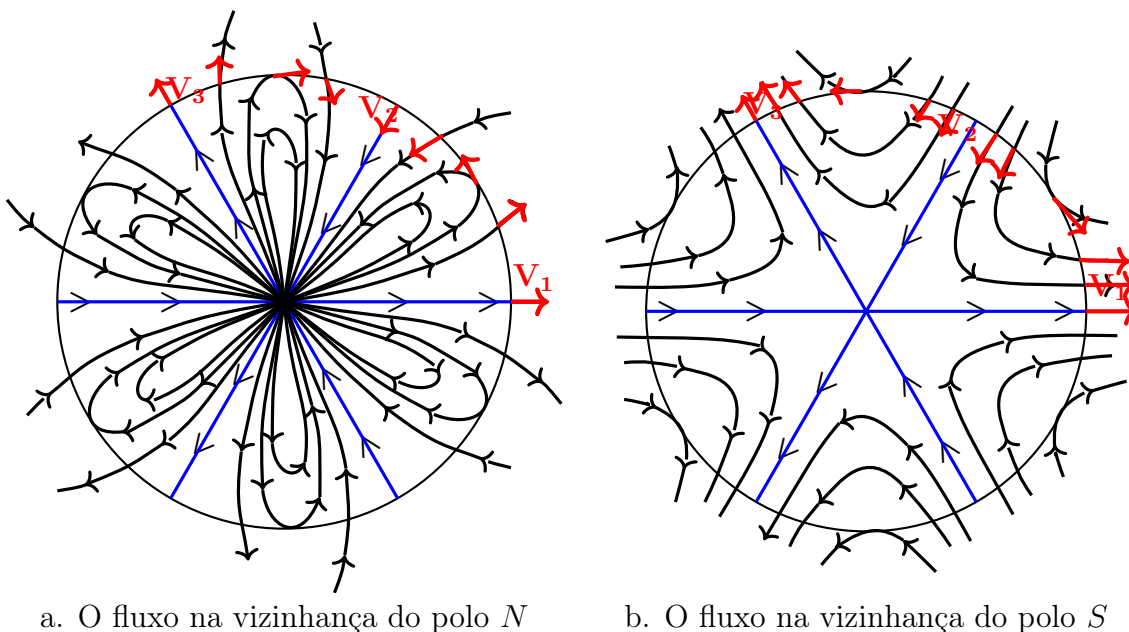


FIGURA 13. O fluxo na vizinhança dos polos.

Cálculo direto do índice no polo Sul S (sem usar que a soma dos dois índices vale 2).

Em cada setor, o ângulo entre as linhas que delimitam o setor é π/p . Como o campo de vetores tangentes ao fluxo gira no sentido negativo, dentro de um setor o campo de vetores gira (ângulo entre V_1 e V_2)

$$\frac{\pi}{p} - \pi = (1 - p) \frac{\pi}{p}.$$

Como existem $2p$ setores, quando tivermos feito uma volta completa, o ângulo será, portanto

$$2p(1 - p) \frac{\pi}{p} = (1 - p)2\pi$$

(para $p = 3$, temos -4π). Então, o índice de Poincaré-Hopf no polo Sul S vale $(1 - p)$ (para $p = 3$, temos -2).

□

Consequência: Para qualquer número inteiro n positivo ou negativo, é possível construir facilmente um campo de vetores com índices, respectivamente, n e $2 - n$ nos dois polos Norte e Sul.

Caso particular: com um único gomo do tipo B, o índice do campo vale $+2$ no polo Norte e 0 no polo Sul.

Observação 5.2. *É claro que podemos imaginar gomos duplos de tipo C invertendo os comportamentos de “elipse” e “hipérbole”; dentro de um lado do gomo (veja a Figura 14).*

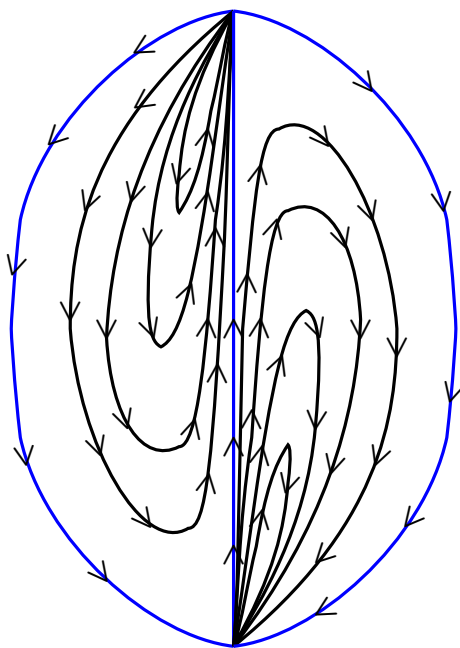


FIGURA 14. Gomo Tipo C.

Proposição 5.3. Colocando p gomos duplos de tipo C um ao lado do outro, de maneira a preencher a esfera \mathbb{S}^2 , o índice Poincaré-Hopf de um campo de vetores tangente ao fluxo vale $+1$ nos dois polos N e S qualquer que seja o número p de gomos.

Demonstração. Suponhamos que temos p gomos duplos de tipo C . Os gomos duplos de tipo C estão sucessões de setores de tipo da Figura 13 (polo N) e da Figura 13 (polo S). Na sucessão de um sector do tipo da Figura 13 (polo N) e da Figura 13 (polo S), o ângulo entre o vetor inicial e o vetor de chegada vale

$$\pi + \frac{\pi}{p} + \frac{\pi}{p} - \pi = 2\frac{\pi}{p}$$

(veja a prova da Proposição 5.1). Como temos p setores duplos, quando tivermos feito uma revolução completa o ângulo será

$$p\left(2\frac{\pi}{p}\right) = 2\pi$$

qualquer que seja o número de gomos. \square

Observação 5.4. Como mencionamos, estamos interessados em campos particulares descritos geometricamente como acima. Porém, existem também outros campos vetoriais em \mathbb{S}^2 com apenas duas singularidades isoladas, embora não sejam tangente à esfera, e para as quais podemos calcular o índice de Poincaré-Hopf, como nos exemplos a seguir. Neste caso, a aplicação de Gauss é uma aplicação de \mathbb{S}^2 em \mathbb{S}^2 que dá uma aplicação dos segundos grupos de homologia, multiplicação pelo índice.

Exemplos 5.5. Consideramos, com $n \in \mathbb{Z}$, os exemplos seguintes:

- (1) $V(u, v) = (\text{sen}^n(u)\cos(nv), \text{sen}^n(u)\text{sen}(nv), \cos(v))$,
- (2) $V(u, v) = (-n\text{sen}(u)\text{sen}(nv), n\text{sen}(u)\cos(nv), \cos(v))$.

Os índices destes campos vetoriais satisfazem a condição proposta: os campos dados têm índices bem definidos nos polos Norte e Sul da esfera e valem n e $2 - n$, respectivamente.

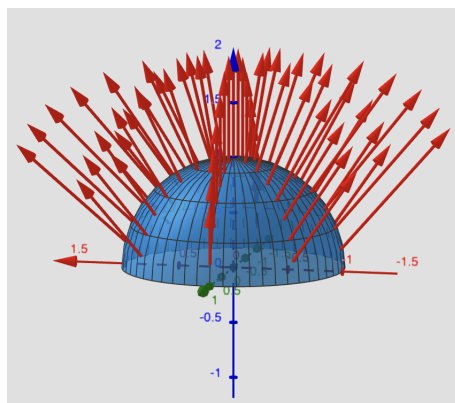


FIGURA 15. Campo vetorial dos exemplos (1) na esfera - Tipo elipse.

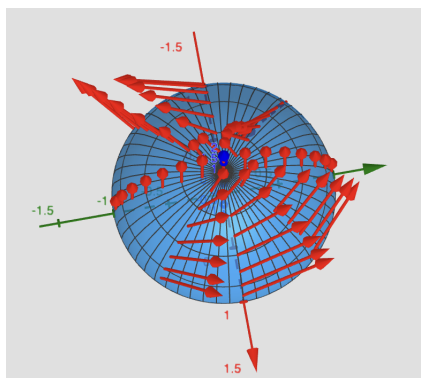


FIGURA 16. Campo vetorial do exemplo (2) - tipo hipérbole.

Nas Figuras 15 e 16, desenhamos somente o campo vetorial no hemisfério superior, a fim de não complicar a exposição.

AGRADECIMENTOS

Parte deste trabalho foi desenvolvido durante estadias dos autores no I2M (CNRS e Universidade de Aix-Marseille) e no CIRM, Marseille, França. Os três autores agradecem pelo convite e pela hospitalidade dessas instituições. Agradecemos também UFABC e IBILCE-UNESP, Brasil.

A segunda autora contou com o apoio da FAPESP (processo 19/21181-0). A terceira autora conta com apoio financeiro da FAPESP, processo 23/07802-7.

REFERÊNCIAS

- [1] Claudia Addabbo, *Il libellus de impletione loci di Francesco Maurolico e la tassellazione dello spazio*. PhD thesis (2015) Appendici. University of Pisa.
- [2] Jean-Paul Brasselet e Thuy Nguyen Thi Bich, *Teorema de Poincaré-Hopf*. Revista Eletrônica Paulista de Matemática, CQD, Bauru, v. 16, pp. 134–162, dez. 2019.
- [3] Jean-Paul Brasselet, Tadeusz Mostowski e Thuy Nguyen Thi Bich, *Poincaré–Hopf Theorem for singular analytic varieties*. Banach Center Publications 128 (2024), 23-43.
- [4] Elon L. Lima, A característica de Euler-Poincaré, *Revista Matemática Universitária* 1, SBM, 1985.
- [5] Elon L. Lima, O Teorema de Euler sobre poliedros, *Revista Matemática Universitária* 2, SBM, 1985.
- [6] Marie-Hélène Schwartz *Champs radiaux sur une stratification analytique* Paris: Hermann, 1991. (Travaux en cours, 39).

CNRS AND AIX-MARSEILLE UNIVERSITY, MARSEILLE, FRANCE

E-mail address: jean-paul.brasselet@univ-amu.fr

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC, SANTO ANDRÉ, BRASIL

E-mail address: dahisy.lima@ufabc.edu.br

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA FILHO, SÃO JOSÉ DO RIO PRETO, BRASIL.

E-mail address: bich.thuy@unesp.br