RMU
REVISTA MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Revista Matemática Universitária, vol. 1, 2025

ISSN: 2675-5254 — **DOI:** 10.21711/26755254/rmu20252

RECORRÊNCIA E DÍGITOS DECIMAIS: UMA VIAGEM PELO TEOREMA DE POINCARÉ

RODRIGO ANDRADE, CLAUDIO CAMPANA, GERSON LEDESMA

Resumo. Neste artigo, introduzimos elementos da teoria ergódica por meio do Teorema de Recorrência de Poincaré, que garante que, sob certas condições, quase todos os estados de um sistema dinâmico retornam arbitrariamente próximos de sua condição inicial ao longo do tempo. Aplicamos esse resultado à análise da representação decimal de números reais, demonstrando que, para quase todo número real, qualquer dígito (ou bloco de dígitos) aparece infinitas vezes em sua expansão decimal. O trabalho também apresenta uma introdução acessível à medida de Lebesgue e à preservação de medida, com o objetivo de facilitar o contato com ideias centrais da teoria ergódica.

1. Introdução

Henri Poincaré (1854–1912) foi um matemático, físico e filósofo francês, considerado um dos fundadores da teoria dos sistemas dinâmicos e da topologia. Contribuiu de forma decisiva em áreas como a teoria do caos, a mecânica celeste, a relatividade, as equações diferenciais e as funções automorfas. Uma de suas ideias mais influentes na matemática moderna é o Teorema de Recorrência, pilar da teoria ergódica, que estuda o comportamento estatístico de sistemas dinâmicos no tempo.

Neste artigo, exploramos o Teorema de Recorrência de Poincaré e sua aplicação à representação decimal de números reais. Embora o resultado seja clássico, apresentamos uma exposição detalhada e acessível, utilizando conceitos da medida de Lebesgue e propriedades de preservação de medida. Esperamos que esta abordagem sirva como introdução amigável à teoria ergódica, conectando ideias abstratas a uma aplicação concreta e intuitiva.

Data de aceitação: 09 de Dezembro de 2025.

Palavras chave. Medida de Lebesgue, Teorema de Recorrência de Poincaré, Expansão decimal.

2. Medida de Lebesgue: uma visão inicial

Começamos com a construção da medida de Lebesgue na reta real $\mathbb{R}$. A noção de medida generaliza conceitos como comprimento, área e volume, permitindo atribuir um "tamanho"a subconjuntos de um espaço, mesmo quando estes não possuem uma forma geométrica regular.

Seja $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo com extremos $a \leq b$. Definimos seu comprimento por $|J| = b - a$. No caso de intervalos ilimitados ou do conjunto vazio, convenciona-se que $|J| = +\infty$ e $|\emptyset| = 0$, respectivamente.

Um resultado fundamental da análise real afirma que todo conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}$ pode ser escrito como uma união enumerável e disjunta de intervalos abertos I_i. O comprimento de U é então definido como a soma dos comprimentos desses intervalos

$$|U| = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|.$$

Entretanto, para podermos atribuir um comprimento a conjuntos mais gerais - que não sejam simplesmente intervalos ou união de intervalos - introduzimos a chamada medida exterior de Lebesgue. Seja $A \subset \mathbb{R}$ definimos a medida exterior de Lebesgue por

$$(1)\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| \;:\; A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \text{ onde os } I_j \text{ são intervalos limitados} \right\}.$$

Esta definição busca o menor total de comprimentos de intervalos que recobrem o conjunto A, fornecendo assim uma noção de "tamanho"aplicável a conjuntos arbitrários da reta real.

Com isso, podemos ver a λ^* como uma função definida em $\mathcal{P}(X)$ (o conjunto das partes de $\mathbb{R}$), com valores no conjunto dos números reais estendido, denotado por

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

A medida exterior λ^* satisfaz diversas propriedades fundamentais, a saber:

Proposição 2.1.
(1) $\lambda^*(A) \geq 0$ *para todo* $A \subset \mathbb{R}$.
(2) *Se* $A \subset B \subset \mathbb{R}$, *então* $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$.
(3) *Para qualquer sequência de subconjuntos* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, *verifica-se*

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) \quad (\textit{Subaditividade}).$$

(4) *Se* I *é um intervalo limitado de extremos* a *e* b *em* $\mathbb{R}$, *então*

$$\lambda^*(I) = |I| = b - a.$$

Demonstração. Os itens 1 e 2, seguem diretamente da definição de medida exterior.

3. Se algum A_n verifica $\lambda^*(A_n) = \infty$, então o lado direito da desigualdade é infinito, e a desigualdade é automaticamente satisfeita. Assim, podemos assumir que $\lambda^*(A_n) < \infty$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Seja $\epsilon > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, pela

definição de medida exterior, existe uma sequência de intervalos limitados $\{I_{kn}\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{kn} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |I_{kn}| \leq \lambda^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Agora, considere a família de todos esses intervalos $\mathcal{I} = \{I_{kn} : \ k, n \in \mathbb{N}\}$, segue que

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{kn} = \bigcup \{I : \ I \in \mathcal{I}\}.$$

Assim esta família de intervalos torna-se um cobrimento para A, logo

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |I_{kn}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) + \epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário, segue o resultado.

4. Como $I \subset I$, segue diretamente da definição de media exterior que

$$\lambda^*(I) \leq |I| = b - a.$$

Por outro lado, seja $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ um cobrimento de I por intervalos limitados e fixe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que

$$[a + \epsilon, b - \epsilon] \subset I.$$

Assim temos que $\{I_i^\circ\}_{i=1}^{\infty}$, onde I_k° denota a parte interior de I_k, ainda cobre $[a + \epsilon, b - \epsilon]$ e portanto existem uma subcoleção finita $I_{i_1}, \ldots, I_{i_n}$ tal que

$$[a + \epsilon, b - \epsilon] \subset I_{i_1} \cup \cdots \cup I_{i_n},$$

de onde obtemos que

$$b - a - 2\epsilon < \sum_{j=1}^{n} |I_{i_j}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|.$$

Com isto, $b - a - 2\epsilon$ é uma cota inferior para a soma dos comprimentos dos intervalos que cobrem I, e portanto, pela definição de medida exterior,

$$b - a - 2\epsilon \leq \lambda^*(I).$$

Como isto vale para todo $\epsilon > 0$ pequeno, fazendo $\epsilon \to 0$, obtemos

$$b - a \leq \lambda^*(I).$$

O que termina a prova.

□

Antes de definirmos a medida de Lebesgue propriamente dita, é necessário identificar quais subconjuntos de $\mathbb{R}$ são adequados para serem medidos. Nem todo subconjunto da reta real admite uma medida coerente com as propriedades desejadas da medida de comprimento. Por isso, restringimos nossa atenção a uma classe especial de conjuntos, chamados conjuntos Lebesgue mensuráveis, os quais podem ser bem aproximados por conjuntos abertos. A seguir, formalizamos essa noção.

Definição 2.1. *Seja $A \subset \mathbb{R}$. Dizemos que A é Lebesgue mensurável se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um conjunto aberto $U_\varepsilon \subset \mathbb{R}$ tal que*

$$A \subset U_\varepsilon \quad e \quad \lambda^*(U_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon.$$

Segue diretamente da Definição 2.1, que o conjunto vazio, assim como todos os conjuntos abertos da reta real, são Lebesgue mensuráveis. Além disso, essa definição é equivalente à definição clássica de conjunto mensurável, baseada no critério de Carathéodory, conforme apresentada em [1]. Essa equivalência será estabelecida na proposição a seguir.

Proposição 2.2. *Seja $A \subset \mathbb{R}$. As seguintes condições são equivalentes:*

1) *A é Lebesgue mensurável;*
2) *$\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap A^C)$, para todo $E \subset \mathbb{R}$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $E \subset \mathbb{R}$ e suponha que A é Lebesgue mensurável. Pela subaditividade, temos

$$\lambda^*(E) \leq \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap A^C).$$

Para a desigualdade oposta, suponha primeiro que $A = U$ um aberto em $\mathbb{R}$, ou seja, $U = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} I_i$, com cada I_i sendo um intervalo aberto. Para qualquer intervalo J, vale

$$J = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} (J \cap I_i) \bigsqcup \left(J \setminus \bigsqcup_{i=1}^{\infty} I_i \right),$$

onde cada termo à direita é no máximo uma união disjunta de intervalos. Da definição do comprimento de intervalos, segue que

$$|J| = \sum_{i=1}^{\infty} |J \cap I_i| + |J \setminus \bigsqcup_{i=1}^{\infty} I_i|. \tag{2}$$

Dado $\epsilon > 0$, existe um cobrimento $\{J_l\}_{l=1}^{\infty}$ de E tal que

$$\sum_{l=1}^{\infty} |J_l| \leq \lambda^*(E) + \epsilon.$$

A partir desse cobrimento, obtemos os cobrimentos $\{I_i \cap J_l\}_{i,l=1}^{\infty}$ de $E \cap U$ e $\{J_l \setminus \bigsqcup_{i=1}^{\infty} I_i\}_{l=1}^{\infty}$ de $E \setminus U$. Assim, usando (2), temos

$$\begin{aligned}
\lambda^*(E \cap U) + \lambda^*(E \setminus U) &\leq \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |J_l \cap I_i| + \sum_{l=1}^{\infty} |J_l \setminus \bigsqcup_{i=1}^{\infty} I_i| \\
&\leq \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |J_l \cap I_i| + |J_l \setminus \bigsqcup_{i=1}^{\infty} I_i| \right) \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} |J_l| \leq \lambda^*(E) + \epsilon.
\end{aligned}$$

Como ϵ é arbitrário, segue que

$$\lambda^*(E \cap U) + \lambda^*(E \setminus U) \leq \lambda^*(E).$$

No caso geral, como A é Lebesgue mensurável, para todo $\epsilon > 0$ existe um aberto $U_\epsilon \supset A$ com
$$\lambda^*(U_\epsilon \setminus A) \leq \epsilon.$$
Notando que $E \cap A^C = (E \cap U_\epsilon^C) \cup (E \cap (U_\epsilon \setminus A))$, pela subaditividade e o caso já tratado, temos
$$\begin{aligned}\lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap A^C) &\leq \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap U_\epsilon^C) + \lambda^*(E \cap (U_\epsilon \setminus A))\\ &\leq \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap U_\epsilon^C) + \lambda^*(U_\epsilon \setminus A)\\ &\leq \lambda^*(E) + \epsilon.\end{aligned}$$
Logo, para todo $\epsilon > 0$, vale
$$\lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap A^C) \leq \lambda^*(E),$$
o que conclui a suficiência.
($\Leftarrow$) Suponha inicialmente que $\lambda^*(A) < \infty$. Dado $\epsilon > 0$, existe um cobrimento $\{I_k\}_{k=1}^\infty$ de A tal que
$$\sum_{k=1}^\infty |I_k| \leq \lambda^*(A) + \frac{\epsilon}{2}.$$
Denotando os extremos de I_k por a_k, b_k com $a_k \leq b_k$, temos
$$I_k \subset]a_k - \frac{\epsilon}{2^{k+2}}, b_k + \frac{\epsilon}{2^{k+2}}[= J_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$
Assim, $\{J_k\}_k$ é um cobrimento aberto de A. Definindo $U = \bigcup_{k=1}^\infty J_k$, obtemos
$$\lambda^*(U) \leq \sum_{k=1}^\infty |J_k| = \sum_{k=1}^\infty \left(|I_k| + \frac{\epsilon}{2^{k+1}}\right) \leq \lambda^*(A) + \epsilon.$$
Como A satisfaz a condição (2), segue que
$$\lambda^*(U \setminus A) = \lambda^*(U) - \lambda^*(U \cap A) = \lambda^*(U) - \lambda^*(A) < \epsilon.$$
No caso $\lambda^*(A) = \infty$, defina $A_k = A \cap [-k, k]$, $k \in \mathbb{N}$. Pelo caso anterior, para cada k existe um aberto $U_k \supset A_k$ com $\lambda^*(U_k \setminus A_k) < \frac{\epsilon}{2^k}$. Definindo $U = \bigcup_{k=1}^\infty U_k$, temos
$$\begin{aligned}\lambda^*(U \setminus A) &\leq \lambda^*\left(\bigcup_{k=1}^\infty (U_k \setminus A)\right)\\ &\leq \sum_{k=1}^\infty \lambda^*(U_k \setminus A) < \epsilon.\end{aligned}$$
Isso conclui a prova. $\square$

Outro conceito importante para a teoria da medida é o de conjunto de medida nula. Dado um subconjunto $N \subset \mathbb{R}$, dizemos que N é um conjunto de medida nula se $\lambda^*(N) = 0$. Agora, usando a recíproca da Proposição 2.2, pode-se provar que todo conjunto de medida nula é Lebesgue mensurável.

Denotemos a coleção de todos os conjuntos Lebesgue mensuráveis em $\mathbb{R}$ por $\mathscr{L}$. Quando a medida exterior de Lebesgue λ^* é restrita à família $\mathscr{L}$, denotamos essa restrição por λ. Com isso, temos a seguinte definição.

Definição 2.2. *A tripla* $(\mathbb{R}, \mathscr{L}, \lambda)$ *é chamada de espaço de Lebesgue.*

Com esta definição, temos a seguinte proposição:

Proposição 2.3. *O espaço de Lebesgue* $(\mathbb{R}, \mathscr{L}, \lambda)$ *verifica:*

(1) *Se* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{L}$, *então* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{L}$.
(2) *Se* $A \in \mathscr{L}$, *então* $A^C \in \mathscr{L}$.
(3) *Se* $\{B_i\}$ *é uma sequência disjunta em* $\mathscr{L}$, *então*

$$\lambda(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(B_i).$$

(4) *Se* $A, B \in \mathscr{L}$, $A \subset B$ *e* $\lambda(A) < \infty$, *então* $\lambda(B \setminus A) = \lambda(B) - \lambda(A)$.
(5) *Se* $\{C_i\}$ *é uma sequência crescente em* $\mathscr{L}$, *isto é,* $C_i \subset C_{i+1}$, *para todo* $i \in \mathbb{N}$, *então*

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \lim_{i \to \infty} \lambda(C_i).$$

Demonstração. (1) Dado $\epsilon > 0$, para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $U_i \subset \mathbb{R}$ aberto tal que

$$A_i \subset U_i \quad \text{e} \quad \lambda^*(U_i \setminus A_i) < \frac{\epsilon}{2^i}.$$

Defina U como a união de todos os U_i. Então U é um conjunto aberto e como

$$U \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (U_i \setminus A_i).$$

Segue da Proposição 2.1,

$$\lambda^*\left(U \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \lambda^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (U_i \setminus A_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*(U_i \setminus A_i) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} = \epsilon$$

Concluímos que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{L}$.

(2) Segue diretamente da Proposição 2.2.

(3) Seja $U_n = \bigsqcup_{i=1}^{n} B_i$. Pela equivalência da Proposição 2.2, para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\lambda^*(U_k) = \lambda^*(U_k \cap B_k) + \lambda^*(U_k \cap B_k^C) = \lambda^*(B_k) + \lambda^*(U_{k-1}).$$

De onde, indutivamente temos que

$$\lambda^*(U_n) = \lambda(B_n) + \lambda(B_{n-1}) + \cdots + \lambda(B_2) + \lambda(B_1)$$

desta igualdade, para cada $n \in \mathbb{N}$ obtemos

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda(B_n) = \lambda^*(U_n) \leq \lambda\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(B_i)$$

Fazendo $n \to \infty$ obtemos o resultado desejado.

(4) Notemos que $B \setminus A = B \cap A^C = (B^C \cup A)^C \in \mathscr{L}$ e $B = A \sqcup (B \setminus A)$ assim $\lambda(B) = \lambda(A \sqcup (B \setminus A)) = \lambda(A) + \lambda(B \setminus A)$, de onde segue a igualdade.

(5) Seja $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, se $\lambda(C_i) = \infty$, para algum $i \in \mathbb{N}$, então $\lambda(C_j) = \infty$, para todo $j \geq i$. Assim neste caso, o resultado segue. Agora, suponhamos $\lambda(A_i) < \infty$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Denotando $C_0 = \emptyset$, temos que

$$C = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} (C_i \setminus C_{i-1}).$$

Assim, usando os itens anteriores temos

$$\begin{aligned} \lambda(C) &= \lambda\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} (C_i \setminus C_{i-1})\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(C_i \setminus C_{i-1}) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \lambda(C_i \setminus C_{i-1}) \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \big(\lambda(C_i) - \lambda(C_{i-1})\big) = \lim_{k\to\infty} \lambda(C_k). \end{aligned}$$

□

Em geral, uma família $\mathscr{A}$ de subconjuntos de um conjunto M que satisfaz os seguintes itens:

(1) $M \in \mathscr{A}$ e $\emptyset \in \mathscr{A}$;
(2) Se $A \in \mathscr{A}$, então $A^c \in \mathscr{A}$;
(3) Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$, então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$;

é chamada de σ-álgebra e seus elementos são chamados de conjuntos mensuráveis. Uma função $\mu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ é chamada de medida definida sobre a σ-álgebra $\mathscr{A}$, se satisfaz:

- $\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu(E) \geq 0$, para cada $E \in \mathscr{A}$
- μ é σ-aditiva, ou seja, para toda sequência de conjuntos disjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$,

$$\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

O triplo $(M, \mathscr{A}, \mu)$ é denominado um **espaço de medida**. Pela discussão feita acima, o espaço de Lebesgue $(\mathbb{R}, \mathscr{L}, \lambda)$ é um espaço de medida.

3. Recorrência e o Teorema de Poincaré

O Teorema de Recorrência de Poincaré constitui um dos pilares fundamentais da teoria dos sistemas dinâmicos. Neste trabalho, consideramos sistemas dinâmicos com tempo discreto definidos por uma transformação $f : M \to M$, onde M é um espaço mensurável - isto é, um conjunto M munido de uma σ-álgebra de subconjuntos, cujos elementos são chamados de conjuntos mensuráveis.

Nesse contexto, interpretamos f como uma regra que associa a cada estado $x \in M$ o estado futuro $f(x) \in M$. Dizemos que a transformação f é mensurável, se a pré-imagem de qualquer conjunto mensurável é também mensurável.

O Teorema de Poincaré afirma que, em sistemas conservativos (isto é, que preservam uma medida), quase todo ponto retorna arbitrariamente próximo de sua posição inicial. Este resultado revela uma propriedade surpreendente: mesmo em sistemas aparentemente caóticos, existe uma tendência intrínseca de recorrência aos estados iniciais.

Definição 3.1. *Seja $(M, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e seja $f : M \to M$ uma transformação mensurável. Dizemos que a medida μ é invariante pela transformação f (ou que f preserva a medida μ) se, para todo conjunto mensurável $E \subset M$, temos $\mu(E) = \mu\left(f^{-1}(E)\right)$.*

Antes de enunciar o teorema, diremos que uma propriedade é válida para μ-quase todo ponto, num espaço de medida $(M, \mathcal{A}, \mu)$ se ela se verifica para todos os pontos de M, exceto em um subconjunto de medida nula.

Teorema 3.1 (Teorema de Recorrência de Poincaré)**.** *Seja $f : M \to M$ uma transformação mensurável, e seja μ uma medida finita invariante por f. Seja $E \subset M$ um conjunto mensurável tal que $\mu(E) > 0$. Então, para μ-quase todo ponto $x \in E$ existe um inteiro $n \geq 1$ tal que $f^n(x) \in E$.*

Demonstração.

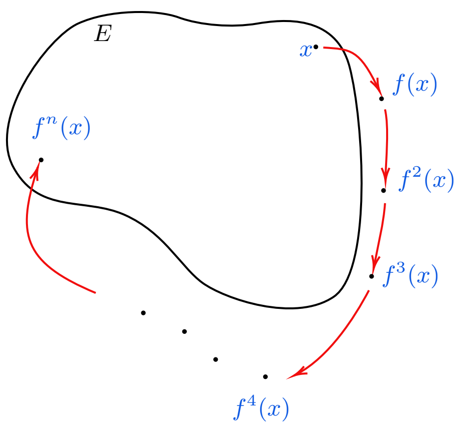

Figura 1: Teorema de Recorrência de Poincaré.

Considere o conjunto

$$E_0 = \{x \in E : f^n(x) \notin E, \forall n \geq 1\} = E \setminus \bigcup_{k \geq 0} f^{-k}(E).$$

Ou seja, E_0 é o conjunto de pontos em E que nunca retornam a E sob iterações de f. Como E é mensurável e f é mensurável, o conjunto E_0 é também mensurável, assim como os conjuntos

$$E_n = f^{-n}\left(E_0\right), \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

Pretendemos provar que $\mu(E_0) = 0$. Como μ é uma invariante por f, temos que

(3) $$\mu\left(E_0\right) = \mu\left(f^{-n}\left(E_0\right)\right) = \mu(E_n), \quad \forall n \geq 1.$$

Mostraremos que os conjuntos E_n são mutuamente disjuntos. Com efeito, suponha por contradição que existe $x \in E_j \cap E_k$ com $j < k$. Então,

$$\begin{aligned} x \in E_j \cap E_k &\Longrightarrow x \in E_j \text{ e } x \in E_k. \\ &\Longrightarrow x \in f^{-j}(E_0) \text{ e } x \in f^{-k}(E_0). \\ &\Longrightarrow \underbrace{f^j(x)}_{y} \in E_0 \text{ e } f^k(x) = f^{k-j}\left(f^j(x)\right) \in E_0. \\ &\Longrightarrow y \in E_0 \text{ e } f^{k-j}(y) \in E_0. \end{aligned}$$

Isto significa que y volta pelo menos uma vez a E_0, o que contradiz a definição de E_0. Portanto, as pré-imagens são disjuntas entre si. Desta forma, usando a aditividade da medida e (3), temos

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_0).$$

Como a união dos E_n tem medida finita, pela finitude da medida μ, a única possibilidade é que $\mu(E_0) = 0$. □

O próximo resultado é uma consequência mais forte do Teorema de Recorrência de Poincaré. Ele afirma que todo ponto de E retorna a E infinitas vezes ao longo da evolução do sistema.

Corolário 3.1. *Nas condições do Teorema de Recorrência de Poincaré, para μ-quase todo ponto $x \in E$, existem infinitos valores de $n \geq 1$ tais que $f^n(x) \in E$.*

Demonstração. Usando a notação da prova do Teorema 3.1, definimos o conjunto

$$E_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(E_0)$$

que é mensurável e contém todos os pontos em E, que retornam apenas uma vez para E. Como $\mu(E_0) = 0$ e μ é uma medida invariante, segue que $\mu(E_1) = 0$. De maneira análoga, definimos o conjunto

$$E_2 = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(E_1)$$

que contém os pontos que retornam exatamente duas vezes ao conjunto E. Novamente, pela invariância da medida e o fato $\mu(E_1) = 0$, temos E_2 é mensurável e que $\mu(E_2) = 0$. Procedendo indutivamente, definimos

$$E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(E_{n-1})$$

que é mensurável e é formado pelos pontos que retornam exatamente n-vezes ao conjunto E, e satisfaz $\mu(E_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. O conjunto de pontos que retorna apenas uma quantidade finita de vezes a E é então dado por

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

que é mensurável e tem medida nula, e assim, para quase todo ponto de E, os retornos a E ocorrem infinitamente vezes. $\square$

Em geral, determinar quando uma transformação $f : (M, \mathcal{A}, \mu) \to (M, \mathcal{A}, \mu)$ preserva a medida não é uma tarefa simples. Frequentemente, é necessário recorrer a técnicas específicas ou a teoremas auxiliares — como o Teorema de Radon-Nikodym, o Teorema de Rokhlin ou propriedades ergódicas — para verificar se uma transformação é de fato preservadora de medida (ver [2] e [3]).

No entanto, no caso particular do espaço de Lebesgue $(\mathbb{R}, \mathscr{L}, \lambda)$, essa verificação pode ser consideravelmente simplificada. Nesse contexto, a propriedade de preservação da medida pode ser deduzida a partir do comportamento da transformação em intervalos. Como veremos a seguir, essa característica permite estender a preservação da medida de classes mais simples de conjuntos, intervalos, para toda a σ-álgebra de Lebesgue. Primeiro, veremos que podemos aproximar um conjunto Lebesgue mensurável por outro conjunto com a mesma medida e que tem imagem inversa pela transformação ainda Lebesgue mensurável e que preserva a medida.

Lema 3.1. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma transformação tal que para cada intervalo aberto I de $\mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades:*

(1) *$f^{-1}(I)$ é mensurável e*
(2) *$\lambda\big(f^{-1}(I)\big) = \lambda(I)$.*

Então para cada $A \in \mathscr{L}$ com $\lambda(A) < +\infty$, existe $V \in \mathscr{L}$ satisfazendo:

$$A \subset V, \quad f^{-1}(V) \in \mathscr{L}, \quad e \quad \lambda(f^{-1}(V)) = \lambda(V) = \lambda(A).$$

Demonstração. Seja $A \in \mathscr{L}$ com $\lambda(A) < +\infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um conjunto aberto U_n tal que

$$A \subset U_n \quad \text{e} \quad \lambda(U_n \setminus A) < 1/n.$$

Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$V_n = \bigcap_{k=1}^{n} U_k.$$

Cada V_n é aberto, contendo A, e, além disso, verifica

$$\lambda(V_n) \leq \lambda(U_n) < \lambda(A) + 1/n,$$

portanto, $\lambda(V_n) < +\infty$. Definimos então

$$V = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n.$$

Como a interseção decrescente de conjuntos mensuráveis com medida finita é um conjunto mensurável, temos que $V \in \mathscr{L}$ e, pela Proposição 2.3, temos

$$0 \leq \lambda(V \setminus A) \quad \leq \quad \lambda(V_n \setminus A) = \lambda(V_n) - \lambda(A) \leq 1/n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Tomando limite, conseguimos que $\lambda(V \setminus A) = 0$, e assim

$$\lambda(V) = \lambda(A).$$

Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, V_n é um conjunto aberto, podemos escrevê-lo como união disjunta (enumerável) de intervalos abertos

$$V_n = \bigsqcup_{m=1}^{+\infty} I_{nm}$$

onde I_{nm} é um intervalo aberto. Pela hipótese sobre f, temos que

$$f^{-1}(V_n) = \bigsqcup_{m=1}^{+\infty} f^{-1}(I_{nm}),$$

com cada $f^{-1}(I_{nm}) \in \mathscr{L}$ e $\lambda(f^{-1}(I_{nm})) = \lambda(I_{nm})$. Portanto, $f^{-1}(V_n) \in \mathscr{L}$ e

$$\lambda(f^{-1}(V_n)) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda(f^{-1}(I_{nm})) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda(I_{nm}) = \lambda(V_n).$$

Como a pré-imagem da interseção é a interseção das pré-imagens, temos que $f^{-1}(V) \in \mathscr{L}$ e pela Proposição 2.3, temos

$$\lambda(f^{-1}(V)) = \lim_{n\to\infty} \lambda(f^{-1}(V_n)) = \lim_{n\to\infty} \lambda(V_n) = \lambda(V).$$

Assim, o conjunto $V \in \mathscr{L}$ satisfaz $A \subset V$, $f^{-1}(V) \in \mathscr{L}$, e

$$\lambda(V) = \lambda(f^{-1}(V)) = \lambda(A).$$

como queríamos demostrar. $\square$

Com este resultado podemos provar o seguinte Teorema.

Teorema 3.2. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma transformação tal que, para todo intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$,*

(1) $f^{-1}(I) \in \mathscr{L}$,
(2) $\lambda(f^{-1}(I)) = \lambda(I)$.

Então f preserva a medida de Lebesgue.

Demonstração. Seja $A \in \mathscr{L}$. Suponha inicialmente que $\lambda(A) < +\infty$. Pelo Lema 3.1, existe um conjunto $V \in \mathscr{L}$ tal que

$$A \subset V, \quad \lambda(V) = \lambda(A), \quad f^{-1}(V) \in \mathscr{L}, \quad \lambda(f^{-1}(V)) = \lambda(V).$$

Se chamamos de $N = V \setminus A$, então

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(V) \setminus f^{-1}(N). \tag{4}$$

Afirmação 3.1. *$f^{-1}(N)$ é mensurável e $\lambda\big(f^{-1}(N)\big) = 0$.*

Com efeito, como $\lambda(N) = \lambda(V) - \lambda(A) = 0$, segue do Lema 3.1 que existe $W \in \mathscr{L}$, tal que:

$$N \subset W, \quad f^{-1}(W) \in \mathscr{L}, \quad \text{e} \quad \lambda\big(f^{-1}(W)\big) = \lambda(W) = \lambda(N) = 0.$$

Como $N \subset W$, então

$$\lambda^*\big(f^{-1}(N)\big) \leq \lambda^*\big(f^{-1}(W)\big) = \lambda\big(f^{-1}(W)\big) = 0.$$

Logo, $f^{-1}(N)$ tem medida nula e de onde concluímos que $f^{-1}(N) \in \mathscr{L}$, o que conclui a prova da afirmação.

Retomando a demonstração principal, da equação (4), segue que $f^{-1}(A) \in \mathscr{L}$ e da Afirmação 3.1, temos

$$\lambda\big(f^{-1}(A)\big) = \lambda\big(f^{-1}(V) \setminus f^{-1}(N)\big) = \lambda(f^{-1}(V)) - \lambda\big(f^{-1}(N)\big) = \lambda(V) = \lambda(A).$$

Portanto, o resultado vale para conjuntos de medida finita.

No caso geral em que $\lambda(A) = +\infty$, escrevemos

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \text{onde} \quad A_n = A \cap [-n, n] \in \mathscr{L}, \quad \lambda(A_n) < +\infty.$$

Pelo caso finito, temos

$$\lambda(f^{-1}(A_n)) = \lambda(A_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n),$$

segue da Proposição 2.3 que

$$\lambda(f^{-1}(A)) = \lim_{n\to\infty} \lambda(f^{-1}(A_n)) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lambda(A).$$

Assim, $f^{-1}(A) \in \mathscr{L}$ e $\lambda(f^{-1}(A)) = \lambda(A)$ em todos os casos. Portanto, f preserva a medida de Lebesgue. $\square$

4. Dígitos decimais e recorrência

Nesta seção, apresentamos uma aplicação do Teorema de Recorrência de Poincaré à representação decimal de números reais. Mostraremos que, para quase todo ponto $x \in]0, 1[$ cuja representação decimal contenha o dígito 5 (ou, de modo mais geral, qualquer dígito ou bloco de dígitos fixado), esse dígito ocorre infinitas vezes na expansão decimal de x.

Para demonstrar esse fato, consideramos o espaço de medida $([0, 1], \mathscr{L}([0, 1]), \lambda)$, onde λ denota a medida de Lebesgue restrita à σ-álgebra dos subconjuntos mensuráveis de $[0, 1]$, e analisamos a transformação $f : [0, 1] \to [0, 1]$ definida por

$$f(x) = 10x - \lfloor 10x \rfloor,$$

onde $\lfloor 10x \rfloor$ representa a parte inteira de $10x$, ou seja, o maior inteiro menor ou igual a $10x$. Intuitivamente, essa transformação remove o primeiro dígito da expansão decimal de x, atuando como um deslocamento no sistema decimal. Se $x = 0, a_0 a_1 a_2 \ldots$, então $f(x) = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$. Esta função é conhecida como a transformação decimal, veja Figura 2.

transformaÃğÃčo decimal.pdf

Figura 2: Gráfico da transformação decimal.

Para poder aplicar o Teorema de Recorrência, precisamos provar que a medida de Lebesgue é invariante pela transformação decimal.

Lema 4.1. *λ é invariante por f.*

Demonstração. Vamos verificar que f satisfaz as duas condições do Teorema 3.2. Para isto, considere $]a,b[\subset[0,1]$ e então temos que

$$f^{-1}(]a,b[)=\bigsqcup_{k=0}^{9}\left]\frac{a+k}{10},\frac{b+k}{10}\right[.$$

Desde que esta união é disjunta, tem-se que

$$\lambda(f^{-1}(]a,b[))=\lambda\left(\bigsqcup_{k=0}^{9}\left]\frac{a+k}{10},\frac{b+k}{10}\right[\right)=\sum_{k=0}^{9}\lambda\left(\left]\frac{a+k}{10},\frac{b+k}{10}\right[\right)=\sum_{k=0}^{9}\frac{b-a}{10}.$$

De onde obtemos que $\lambda\left(f^{-1}(]a,b[)\right)=b-a$. Do mesmo modo podem ser provados os outros intervalos em $[0,1]$. Portanto, pelo Teorema 3.2, tem-se que a expansão decimal f preserva a medida de Lebesgue λ. □

Com este resultado podemos provar o seguinte lema.

Lema 4.2. *Quase todo ponto de $[0{,}5,\ 0{,}6[$ tem infinitos dígitos 5 na sua expansão decimal.*

Demonstração. Como a medida de Lebesgue em $[0,1]$ é invariante pela transformação decimal, Lema 4.1, e além disso $\lambda([0{,}5,\ 0{,}6[)>0$, segue do Corolário 3.1 que para λ-quase todo ponto $x\in[0{,}5,\ 0{,}6[$ existem infinitos $n\in\mathbb{N}$ tais que $f^n(x)\in[0{,}5,\ 0{,}6[$, o que é equivalente a dizer que a expansão decimal de λ-quase todo ponto $x\in[0{,}5,\ 0{,}6[$ contém infinitos dígitos 5. □

Com estes lemas, podemos provar o resultado principal.

Teorema 4.1. *λ-quase todo ponto x em $[0,1]$, tem infinitos 5 na sua expansão decimal.*

Demonstração. Para provar este teorema, vamos primeiro mostrar que o conjunto

$$\begin{aligned}E_0&=\{x\in[0,1]: x \text{ não tem dígito 5 na sua expansão decimal}\}\\&=[0,1]\setminus\bigcup_{k\geq 1}f^{-k}([0{,}5,\ 0{,}6[).\end{aligned}$$

De onde temos que este conjunto é Lebesgue mensurável e, além disso, usando o mesmo argumento da demonstração do Teorema 3.1, pode-se provar que $\lambda(E_0)=0$. Por outro lado, usando os mesmos conjuntos da prova do Corolário 3.1, pode-se provar que o conjunto

$$F=\{x\in[0,1]:\ x \text{ tem finitos dígitos 5 em sua representação decimal}\}$$

é Lebesgue mensurável e $\lambda(F)=0$. Logo temos que a expansão decimal de λ-quase todo $x\in[0,1]$ contém infinitos dígitos 5. Note também que alguns números possuem duas representações decimais (como $0{,}499\ldots=0{,}5$), mas o conjunto desses pontos é contável e, portanto, de medida de Lebesgue nula. Isso não afeta a validade dos resultados. □

Seguindo estes passos, pode-se provar o mesmo resultado para qualquer outro dígito $k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ ou qualquer bloco de números, por exemplo 32, repete-se infinitamente na expansão decimal para λ-quase todo ponto $x \in [0, 1]$. Usando as translações (que também preservam medida) pode-se mostrar que esta propriedade se estende a reta toda.

Este tipo de resultado ilustra o poder do Teorema de Recorrência de Poincaré, que permite revelar regularidades profundas em estruturas que parecem puramente aleatórias, como a distribuição dos dígitos nas expansões decimais. Assim, este artigo buscou apresentar de maneira acessível essa interação entre teoria ergódica e propriedades aritméticas, destacando de forma natural e elegante como o Teorema de Poincaré explica esses comportamentos de longo prazo.

Referências

[1] Bartle, Robert G.: The Elements of Integration and Lebesgue Measure. John Wiley & Sons, 2014.
[2] Oliveira, Krerley; Viana, Marcelo: Teoria Ergódica: Um curso introdutório. IMPA, 2010.
[3] Silva, César E.: Invitation to Ergodic Theory, . Amer. Math Soc., vol. **42**, 2008.

Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil
Email address: rodrigoandraderibeiro99@gmail.com, plinio@ime.uerj.br, guido.ledesma@ime.uerj.br