

**SOBRE ÍNDICES E CAMPOS DE VETORES: ASPECTOS DA  
TOPOLOGIA E DA DINÂMICA**

ANDRÉ BOSCARIOL RASERA, DEBORA BISPO DE OLIVEIRA COSTA, DIANA HERNANDES  
ARRIEL, ÉRICLES AQUILES BARBOSA LIMA, GEOVANE ROCHA DE ARAÚJO, GIULIANO  
ZUGLIANI, KETTY ABAROA DE REZENDE, MARINA ANDRADE DOMINGUES, MURILO  
ZIGART, VICTÓRIA DA SILVA ROCHA

RESUMO. Nosso objetivo aqui é fornecer um texto, destinado a um público mais amplo, sobre índices de campos de vetores em uma variedade bidimensional. Como um dos seus produtos, apresentamos construções de campos vetoriais com apenas uma singularidade, um fato interessante mas que, até onde sabemos, não é encontrado em uma referência clássica.

*Dedicado à Professora Cidinha*

1. INTRODUÇÃO

O índice de Poincaré-Hopf e o índice de Conley serão estudados neste trabalho no contexto de fluxos em variedades fechadas bidimensionais (superfícies). Ambos os índices fornecem informações dinâmicas sobre o comportamento de conjuntos invariantes de campos de vetores e informações topológicas relacionadas à variedade. Nosso objetivo é explorar em quais aspectos estes dois invariantes topológicos estão relacionados e como diferem.

O índice de Poincaré-Hopf de um zero isolado, i.e, de uma singularidade de um campo de vetores diferenciável visa descrever o comportamento do campo perto deste zero. Isso será possível formalizando a idéia geométrica de “contar quantas vezes o campo cobre uma vizinhança de uma singularidade” ou contando o número de vezes que o campo dá voltas em torno de uma singularidade do campo considerando a orientação. O belo teorema de Poincaré-Hopf afirma que a soma dos índices de Poincaré-Hopf das singularidades de um campo numa variedade compacta  $M$  é a sua característica de Euler de  $M$ ,  $\chi(M)$ .

---

Data de aceitação: 13 de dezembro de 2025.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 58A10.

*Palavras chave.* Singularidades, folheações.

O índice de Conley, por outro lado, é uma ferramenta topológica mais geral e usada para estudar fluxos contínuos em espaços topológicos. O índice de Conley associa um objeto da topologia algébrica como um tipo de homotopia de um espaço pontuado ou um módulo graduado de homologia ou cohomologia a um conjunto isolado invariante  $S$ . Um conjunto isolado invariante é um conjunto de pontos que permanece invariante pelo fluxo e que possui uma vizinhança isolante que o contém como conjunto invariante maximal. Este índice provê informações sobre a estrutura de  $S$  e o comportamento do fluxo próximo a  $S$ . É muito utilizado para provar a existência de conjuntos invariantes e sua propriedade principal é a sua invariância sob continuação. É uma generalização do índice clássico de Morse. Também neste contexto é possível determinar a característica de Euler de  $M$ ,  $\chi(M)$ , utilizando-o.

A relação entre os índices de Poincaré-Hopf e o de Conley pode ser estabelecida se restringirmos o nosso objeto de estudo a singularidades isoladas que são conjuntos isolados invariantes de dimensão zero. Por um lado, o índice de Poincaré-Hopf, dado por um inteiro, conhecido como o grau, nos fornece informações locais sobre como o campo dá voltas em torno da singularidade, enquanto o índice de Conley captura o comportamento local de como o fluxo escapa à vizinhança isolante da singularidade.

Por outro lado, o índice de Conley se aplica a uma classe mais geral de sistemas dinâmicos com conjuntos invariantes mais complicados que singularidades de campos de vetores, de dimensão arbitrária como por exemplo, órbitas periódicas, conjuntos caóticos como uma suspensão de uma ferradura de Smale, etc.. Desta maneira torna-se muito útil no estudo da estrutura global da dinâmica.

Há muitas aplicações do índice de Conley à teoria de bifurcações e continuação. Ao perturbar um fluxo, o índice de Conley de um conjunto isolado invariante  $S$  do fluxo pode permanecer o mesmo fornecendo informações sobre a persistência de  $S$  sob perturbação. Já o índice de Poincaré-Hopf não tem essa robustez e seu objetivo é contar e caracterizar as singularidades de campos de vetores e não pretende estabelecer uma teoria de continuação.

Tanto para fluxos como para folheações existe a noção da colisão ou “merging” de singularidades criando novas singularidades ou cancelando-as. Em ambos os casos nos referimos a este fenômeno como uma bifurcação que é uma mudança qualitativa na estrutura do sistema, tanto localmente como globalmente, i.e., nas linhas de fluxo ou nas folhas. Essas colisões de pontos críticos de fluxos podem afetar o índice de Poincaré-Hopf bem como o índice de Conley e ademais a topologia dos conjuntos de nível. A colisão das singularidades poderá afetar a topologia das folhas e a sua holonomia.

Um exemplo simples de folheação de superfícies são as curvas de níveis de uma função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  que é transversal ao fluxo gradiente de  $f$  menos nos pontos críticos.

Ao considerarmos folheações transversas a um fluxo gradiente, teremos perto de poços ou fontes um comportamento de convergência ou divergência das linhas de fluxo, enquanto as folhas espiralarão em direção à singularidade ou se afastarão refletindo o comportamento do fluxo. Nos pontos de sela, a folheação terá folhas que intersectam transversalmente

as variedades estáveis e instáveis da singularidade do fluxo e se parecem com hipérbolos (para mais detalhes, veja por exemplo [MP] ou [S]). Dessa forma as folhas cortam transversalmente às linhas de fluxo. Numa variedade fechada, as folhas transversas ao fluxo gradiente podem ser não-compactas.

Para efeito deste artigo, restringiremos o estudo às singularidades em campos de vetores e folheações bidimensionais. O texto foi dividido da maneira a seguir.

Na Seção 2, introduzimos o índice de Poincaré-Hopf e o teorema homônimo, além de apresentarmos a construção de dois campos vetoriais em uma superfície com uma única singularidade, estudando as órbitas dos mesmos. Na Seção 3, uma nova construção de um tal campo é apresentada, sob um ponto de vista mais analítico.

Na Seção 4, fazemos uma breve introdução ao índice de Conley e uma comparação com o índice de Poincaré-Hopf, na tentativa de motivar o leitor ao seu aprofundamento.

Esse texto foi resultado de uma atividade de pesquisa que ocorreu durante três semanas no Verão de 2024 no IMECC-UNICAMP. Alunos em final de graduação e no mestrado trabalharam em grupos de estudos intensivos e orientados. O grupo deste projeto foi supervisionado pela Profa. Ketty Rezende, pelo Dr. Murilo Zigart, e pelo Prof. Giuliano Zugliani, sendo os demais autores os estudantes que participaram. Agradecemos ao IMECC pelo apoio e suporte financeiro para a realização deste projeto.

## 2. ÍNDICE DE POINCARÉ-HOPF

Seja  $X$  uma variedade suave orientável em  $\mathbb{R}^N$  e  $\vec{v} : X \rightarrow \mathbb{R}^N$  um campo vetorial tangente em  $X$ , isto é,  $\vec{v}(x) \in T_x(X) \forall x \in X$ . Assuma também que  $\vec{v}$  é suave e que suas singularidades são isoladas.

Suponha que  $\vec{v}$  possui pelo menos uma singularidade. Em seu entorno, o comportamento do campo pode variar bruscamente. Dessa maneira, é interessante estudar a variação direcional dos vetores do campo em torno das singularidades, de onde surge o índice de Poincaré-Hopf.

Para definir o índice de um campo em uma variedade, precisamos defini-lo primeiramente em  $\mathbb{R}^k$ . No caso em que  $\vec{v}$  é um campo em  $\mathbb{R}^k$  podemos supor, sem perda de generalidade, que a singularidade estudada está na origem. Nessas condições, existe  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno tal que a origem é a única singularidade de  $\vec{v}$  no interior de uma esfera  $S_\epsilon$  de raio  $\epsilon$  centrada na origem, de onde podemos definir o seguinte mapa:

$$D : S_\epsilon \rightarrow S^{k-1}$$

$$x \mapsto \frac{\vec{v}(x)}{|\vec{v}(x)|}.$$

A partir dessa construção, definimos o **índice de Poincaré-Hopf** de  $\vec{v}$  em 0,  $\text{ind}_0(\vec{v})$ , como o grau do mapa direcional  $D : S_\epsilon \rightarrow S^{k-1}$  (como em [M]).

Em particular, no caso bidimensional,  $\text{ind}_0(\vec{v})$  é dado pelo número de vezes que  $\text{Im}(D)$  completa uma volta no sentido anti-horário em  $S^1$  subtraído do número de vezes que  $\text{Im}(D)$  completa uma volta no sentido horário em  $S^1$ . Vejamos alguns exemplos:

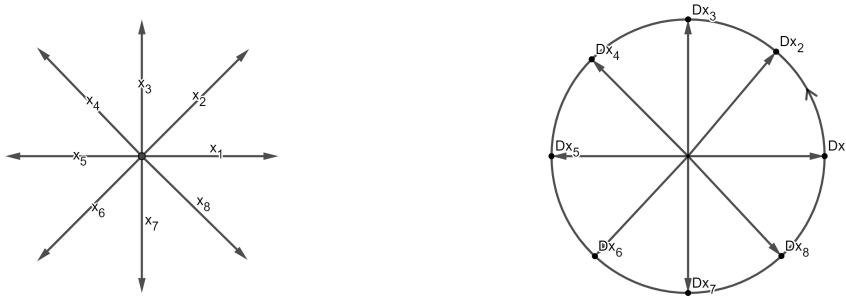


FIGURA 1. Singularidade repulsora, índice = +1

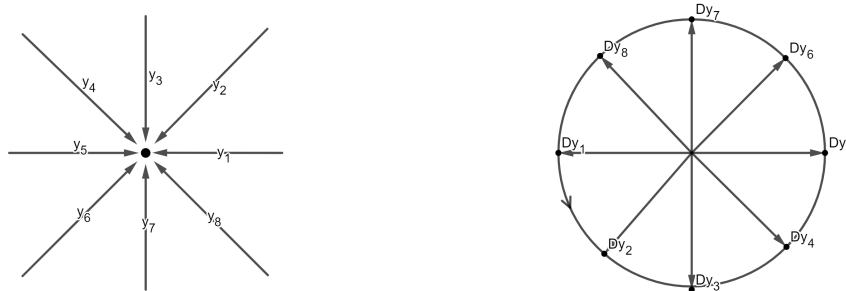


FIGURA 2. Singularidade atratora, índice = +1

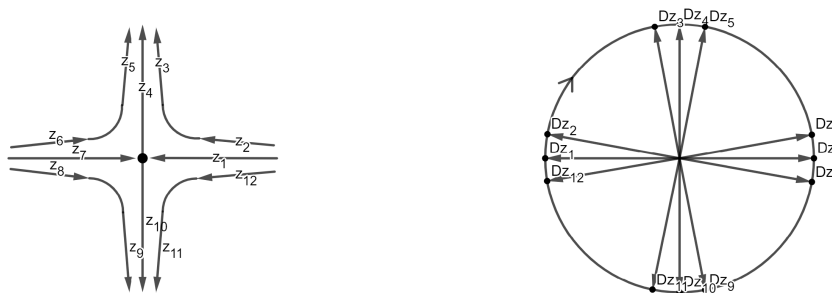


FIGURA 3. Singularidade sela, índice = -1

Para definir o índice de Poincaré-Hopf de uma singularidade  $x$  em uma variedade suave orientável arbitrária  $X$ , utilizamos uma parametrização local  $\phi : U \rightarrow X$ , onde  $U$  é uma

vizinhança aberta da origem em  $\mathbb{R}^k$  e  $\phi(0) = x$ . A partir dessa parametrização, podemos transportar o campo na vizinhança de  $x \in X$  para  $\mathbb{R}^k$  através do seguinte pullback:

$$\begin{aligned}\phi^*\vec{v} : U &\rightarrow \mathbb{R}^k \\ u &\mapsto d\phi_u^{-1}\vec{v}(\phi(u)).\end{aligned}$$

Daí, definimos  $\text{ind}_x(\vec{v}) = \text{ind}_0(\phi^*\vec{v})$ . É possível provar que o índice independe da parametrização e, portanto, está bem definido.

Associado a esta definição, podemos provar um teorema muito interessante, que nos fornece uma obstrução topológica para a construção de campos em variedades, como veremos a seguir.

**Teorema 2.1** (Teorema do Índice de Poincaré-Hopf). *Seja  $X$  uma variedade compacta orientável, e  $\vec{v}$  um campo vetorial suave em  $X$  com singularidades isoladas  $x_1, \dots, x_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Tem-se que a soma global dos índices de Poincaré-Hopf de  $\vec{v}$  é igual à característica de Euler de  $X$ , isto é,*

$$\chi(X) = \sum_{i=1}^k \text{ind}_{x_i}(\vec{v}).$$

No caso planar, o comportamento das trajetórias próximo a uma singularidade é bastante restrito, e portanto simples de classificar. De fato, Bendixson observou que, entre as órbitas chamadas separatrizes ([S]), há apenas três tipos de comportamento: parabólico, hiperbólico e elíptico.

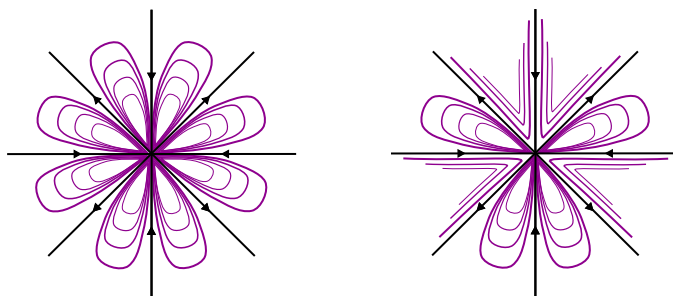


FIGURA 4. Singularidades com setores elípticos.

Estaremos interessados no caso em que a singularidade não exhibe setor elíptico: se ela possuir setor elíptico, então não será um conjunto invariante isolado, conceito que introduziremos na seção seguinte. Assim, é conveniente apresentarmos uma maneira de calcular o índice de Poincaré-Hopf desses tipos de singularidade em função apenas do número de separatrizes da mesma.

Note que, nas singularidades que desejamos estudar, o número de setores hiperbólicos  $m \in \mathbb{N}$  é sempre o dobro do número de separatrizes  $s \in \mathbb{N}$ , como ilustra a figura 5. Além disso, dado um setor hiperbólico de ângulo  $\alpha$ , a imagem desse setor pelo mapa  $D : S_\epsilon \rightarrow S^1$  percorrerá um ângulo  $\alpha - \pi$  em  $S^1$ , como vemos na figura 6.

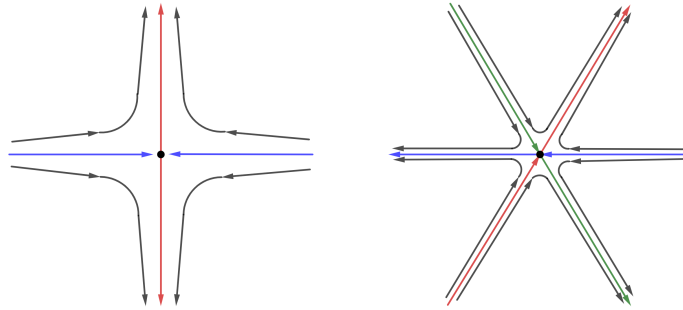


FIGURA 5. Singularidades com setores hiperbólicos.

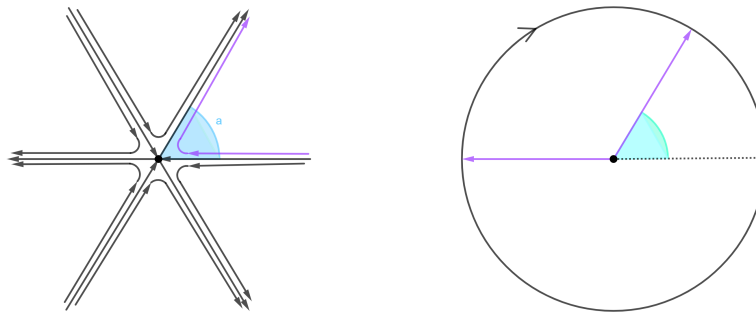


FIGURA 6. Ângulo percorrido por setor hiperbólico

Desse modo, podemos afirmar que o índice de Poincaré-Hopf desse tipo de singularidade será dado por

$$\text{ind}_0(\vec{v}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^m (\alpha_i - \pi) = \frac{2\pi - m\pi}{2\pi} = \frac{2\pi - 2\pi s}{2\pi} = 1 - s .$$

Portanto, o índice de Poincaré-Hopf de uma singularidade de um campo em uma superfície que contém apenas setores hiperbólicos é  $1 - s$ , onde  $s$  é o número de separatrizes da singularidade.

No contexto do Teorema de Poincaré-Hopf, podemos considerar, em particular, campos em superfícies suaves orientáveis. Assim, se a superfície possui apenas uma singularidade, sua característica de Euler deve coincidir com o índice de Poincaré-Hopf da singularidade. Nessas condições, nos perguntamos se um campo com uma única singularidade em uma superfície suave orientável é realizável. De fato, o teorema abaixo responde essa pergunta.

**Teorema 2.2.** *Seja  $X$  uma variedade suave compacta e conexa. Então,  $X$  admite um campo vetorial tangente suave com uma única singularidade.*

Vamos fornecer agora uma demonstração deste resultado.

Note que o Teorema de Poincaré-Hopf não nos descreve exatamente qual o comportamento do tal campo ao redor da singularidade; conhecemos apenas seu índice de Poincaré-Hopf. Assim, procuramos construir campos globais com uma única singularidade em superfícies fechadas controlando o comportamento local desta singularidade, ao exigir que possua apenas setores hiperbólicos.

Para tal, consideramos as superfícies fechadas “modelo” (as somas conexas de toros) e suas representações planares (quando a soma conexa possui mais de uma componente, queremos dizer uma representação no plano hiperbólico). Indicamos nas figuras abaixo como são construídas essas representações no caso do bitoro e do tritoro. É possível generalizar essa construção imediatamente para gêneros maiores.

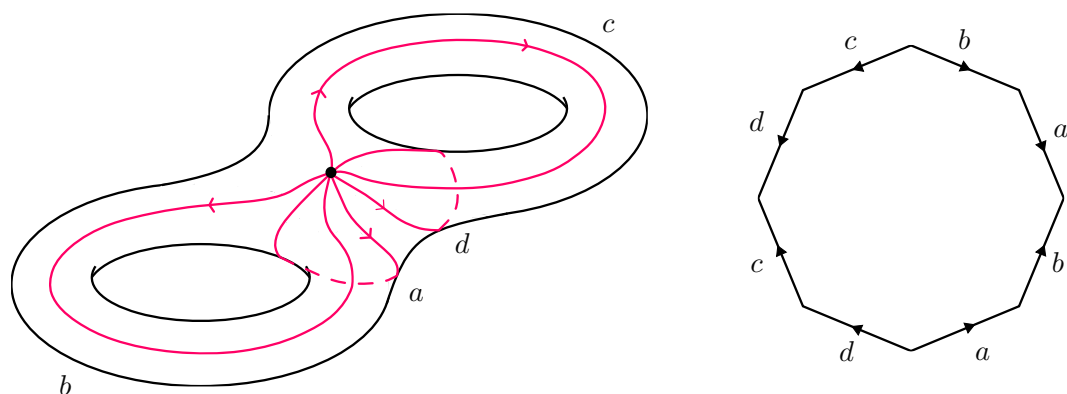


FIGURA 7. Representação planar do bitoro. Cada circunferência desenhada na superfície à esquerda, nomeada por uma letra, corresponde aos lados do polígono à direita nomeados por essa mesma letra. As setas indicam a direção da colagem.

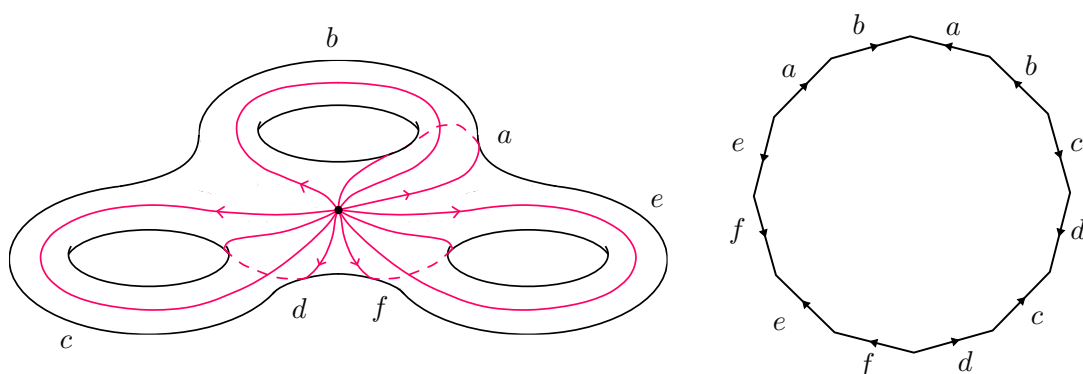


FIGURA 8. Representação planar do tritoro. Cada circunferência desenhada na superfície à esquerda, nomeada por uma letra, corresponde aos lados do polígono à direita nomeados por essa mesma letra. As setas indicam a direção da colagem.

Esquematzamos como deve ser o comportamento de um campo com uma única singularidade no bitoro com apenas setores hiperbólicos nas figuras abaixo. Usando a representação tridimensional, podemos compreender como a topologia da superfície influencia as possíveis trajetórias que o fluxo advindo do campo pode ter; usando a representação planar, verificamos se o fluxo imaginado é capaz de preencher a superfície.

Através desse exercício, conseguimos encontrar dois fluxos possivelmente realizáveis (a menos de equivalência topológica) no bitoro.

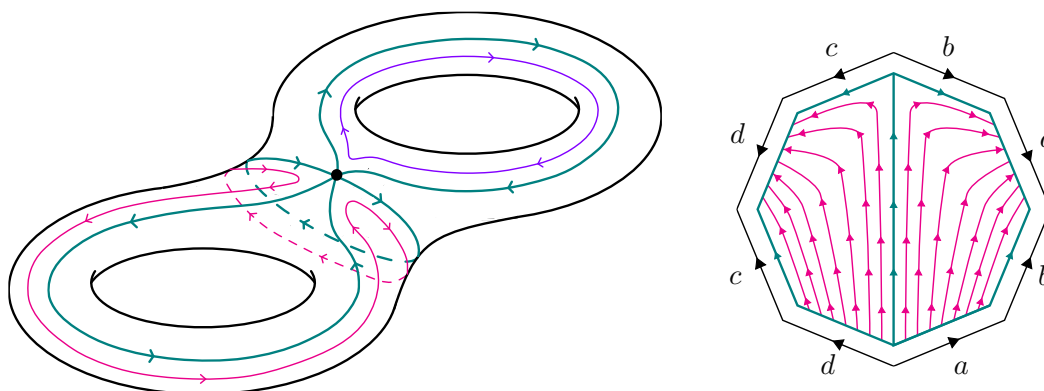


FIGURA 9. Fluxo com órbitas periódicas no bitoro (há apenas 3 órbitas homoclínicas, representadas em verde).

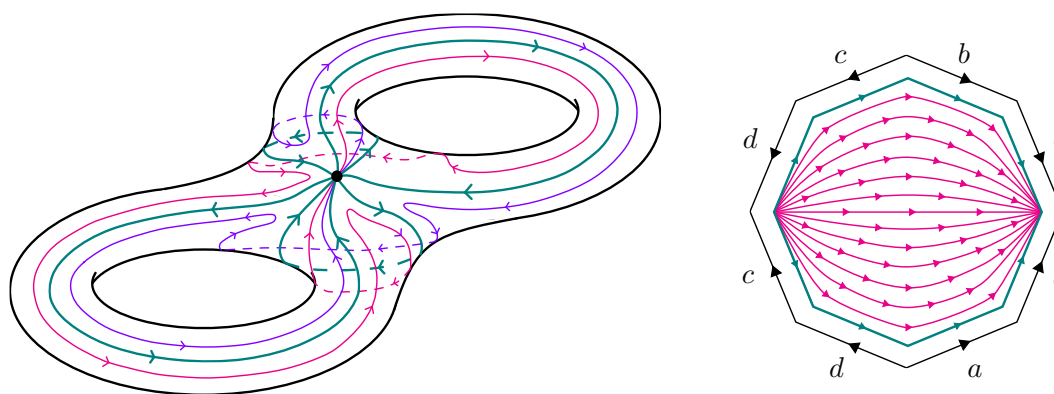


FIGURA 10. Fluxo com apenas órbitas homoclínicas no bitoro.

A partir da simples representação planar desses fluxos, podemos inferir um padrão e generalizá-lo. No caso do fluxo com apenas órbitas homoclínicas, a representação planar é praticamente a mesma, qualquer que seja a soma conexa de toros. No caso do fluxo com órbitas periódicas, construímos sua representação também no tritoro, exibida na figura abaixo.

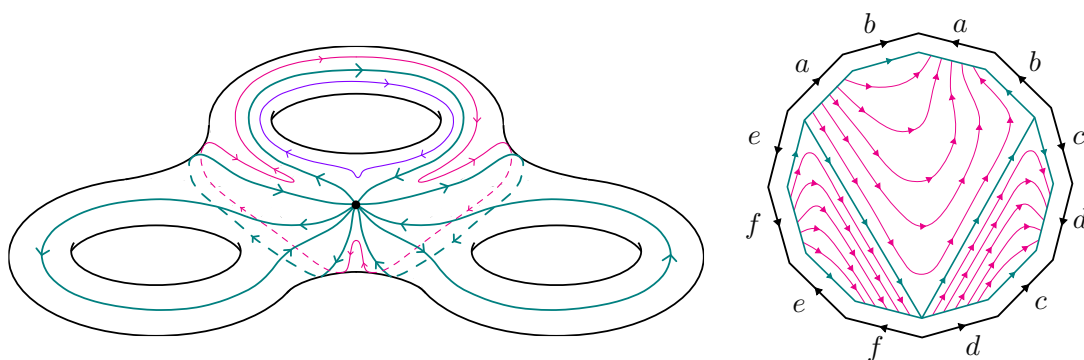


FIGURA 11. Fluxo com órbitas periódicas no tritoro.

No caso geral, temos  $n$  toros conectados. Se formos desenhar a representação planar do campo em questão, teremos  $n - 1$  toros com órbitas parecidas com as órbitas na região dos “sub-toros”  $efef$  e  $cdcd$ , com órbitas homoclínicas separando a região relativa a cada toro do resto da representação; essas órbitas homoclínicas estarão concatenadas umas nas outras, em sequência. As órbitas no “sub-toro” restante completarão o diagrama, como ocorre em  $baba$ . Essa construção está representada de forma simplificada na figura abaixo.

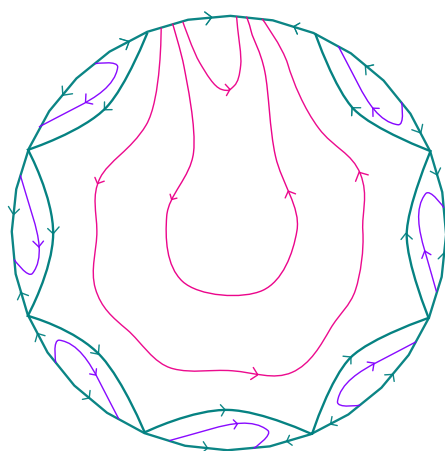


FIGURA 12. Generalização da representação planar do campo com órbitas periódicas.

### 3. UMA CONSTRUÇÃO VIA FORMAS

Nosso objetivo nesta seção será dar uma prova alternativa ao Teorema 2.2, desta vez construindo uma superfície orientável de gênero  $g$  onde está definida uma 1-forma fechada com apenas um zero (ponto singular).

Começaremos pelo bitoro. Nós não pretendemos aqui apresentar todos os detalhes dos procedimentos, mas sim as principais ideias envolvidas. Nós primeiramente formalizaremos um pouco melhor o que entendemos por soma conexa. Uma vez compreendido, esse processo então poderá ser efetuado repetidas vezes.

Uma inspiração para o processo descritos vem da construção de exemplos de [BPZZ], Seção 4.

**3.1. Construção analítica de somas conexas.** Comece com duas superfícies no espaço. Para simplificar, exemplificaremos quando uma delas é um quadrado  $Q \doteq \{0\} \times [-1, 1] \times [-1, 1]$  em  $\mathbb{R}^3$  (com  $(x, y, z)$  como as coordenadas canônicas globais).

Já a outra superfície será um cilindro  $C$  na direção do eixo  $x$ , de raio  $r$  menor que 1, com o bordo  $S$  do lado direito no plano  $x = 1$ .

Para fazer a soma conexa entre elas, considere discos abertos  $D' \subset D \subset Q$  centrados na origem e remova  $D'$ , de raio  $r' > r$ . Seja  $P$  um tubo homeomorfo a um cilindro aberto tal que  $P \cap \{x = c\}$  é uma circunferência no cilindro, se  $c \geq 1$  e  $P \cap \{x = 0\} = D \setminus D'$ .

Para cada  $c \in (-1, 1)$ , o tubo será tal que  $P \cap \{x = c\}$  também é uma circunferência, além de que  $m(c) = \min_{P \cap \{x=c\}}\{z\}$  e  $M(c) = \max_{P \cap \{x=c\}}\{z\}$  são ambos assumidos no plano  $xz$ . Mais ainda, pediremos que  $M(c)$  defina uma função suave estritamente decrescente, e  $m(c)$  defina uma função estritamente crescente,  $c \in (-1, 1)$ . O resultado está na figura 13.

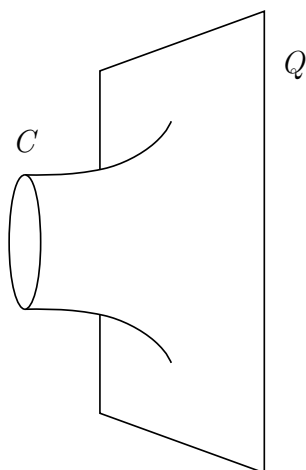


FIGURA 13. Soma de um quadrado com um cilindro.

Esta função, e por conseguinte esse tubo, são obtidos através de uma ferramenta importante na Matemática chamada *partição da unidade* (ou ainda, *funções de corte*). Em poucas palavras, ela permite construir funções suaves globais que se anulam em intervalos, sendo a base de construção a função  $x \mapsto e^{-1/x}$ .

Nesse exemplo, seria necessário aplicá-la duas vezes (para “emendar” o cilindro com  $Q$ ). No entanto, não é difícil ver que essa ferramenta pode ser aplicada em situações bem mais gerais do que considerando o cilindro na horizontal como fizemos.

Mais ainda, a seguir, nós faremos somas conexas envolvendo dois cilindros. Para utilizar essa construção, basta identificar os lados verticais do quadrado  $Q$ .

**3.2. Construção de uma forma no bitoro com um único ponto singular - passo inicial.** Nesse passo inicial, nós vamos considerar a superfície com bordo da figura 14, que

será o *bloco de construção* do nosso objetivo final. Nesta superfície estará definida uma 1-forma especial. Observamos que a superfície é definida através de duas somas conexas, envolvendo três *cilindros*.

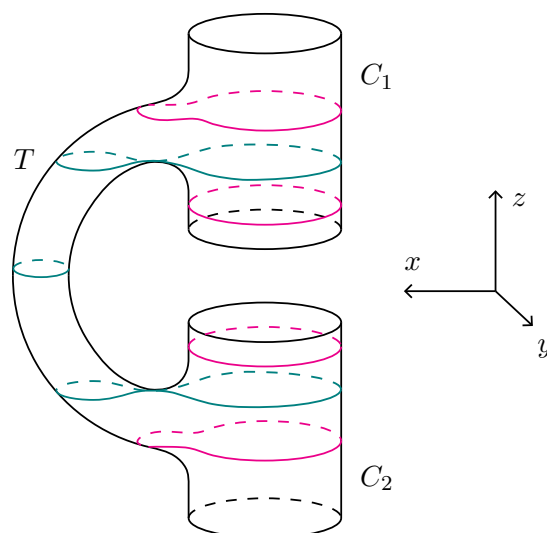


FIGURA 14. Bloco obtido através da soma de três cilindros.

De fato, dois deles,  $C_1$  e  $C_2$ , serão tratados como o quadrado  $Q$  acima. O terceiro,  $T$ , que se assemelha à metade de um toro, possui duas componentes de bordo que serão tratadas cada uma como o bordo  $S$  acima.

Como vimos na construção anterior que a soma conexa pode ser efetuada através de dois cilindros, neste passo a realizaremos duas vezes: uma para  $C_1$  com uma componente de bordo de  $T$  e outra para  $C_2$  com a outra componente de bordo de  $T$ .

Se considerarmos a coordenada  $z$  como função altura, aparecerão dois pontos de sela nessa superfície, onde o plano tangente é horizontal.

Podemos então definir nesta superfície a 1-forma fechada  $dz$ . Uma forma 1-fechada define uma folheação orientada na superfície, exceto nos seus zeros (pontos críticos da função  $z$ ). A função  $z$  é constante nessas folhas. Em azul, na figura 14, destacamos os conjuntos de nível singulares de  $z$ ; em verde destacamos algumas folhas compactas de  $dz$ .

**3.3. Construção de uma forma com um único ponto singular - passo final.** Agora, faremos três identificações em nosso bloco de construção. Veja a figura 15.

As duas primeiras são aquelas que, ao colarmos os cada par de componentes bordo de  $C_1$  e  $C_2$ , transformamos estes respectivamente em toros  $T_1$  e  $T_2$ .

Em tais toros é possível considerar a 1-forma  $d\theta$  (ou melhor, um *pull-back* da mesma), onde  $\theta$  é uma variável angular. Em essência, isso é possível porque, em um ponto regular, a forma  $d\theta$  comporta-se como  $dz$ .

Dessa maneira, efetuando-se a soma conexa perto de pontos regulares, produziremos uma 1-forma fechada em uma superfície difeomorfa a um bitoro que ainda apresenta apenas

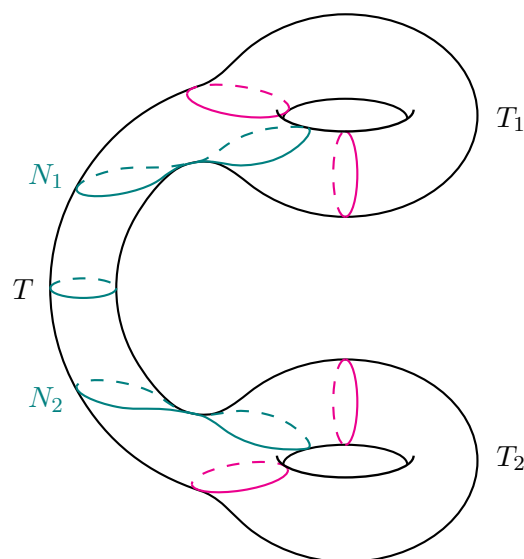


FIGURA 15. Superfície obtida após identificações.

dois pontos singulares, as selas do bloco. Sabemos que isto está coerente com o Teorema de Poincaré-Hopf. Na figura 15, mantivemos as cores das folhas antes do processo de identificação.

Esta 1-forma foi construída para que fosse possível realizar uma última identificação.

Nesse ponto é interessante mencionar o Teorema da retração de Morse, que diz que se  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave em uma variedade compacta, e o conjunto  $\{x \in M : a \leq f(x) \leq b\}$  não contém pontos singulares, então os conjuntos  $\{x \in M : f(x) \leq a\}$  e  $\{x \in M : f(x) \leq b\}$  tem o mesmo tipo de homotopia. E a ideia por trás desse resultado é apenas utilizar o gradiente da função  $f$ .

É importante reforçar que o fluxo gradiente é transversal às folhas da forma.

A terceira identificação então colidirá as duas selas num único ponto singular. Observe que o Teorema da retração de Morse não envolve pontos singulares. Aqui faremos uma retração de modo a identificar as circunferências  $N_1$  e  $N_2$  da figura 15.

Finalmente, após completadas as três identificações, teremos como resultado uma superfície difeomorfa a um bitoro, com apenas um ponto singular. A singularidade é retratada na figura 16, e naturalmente possui índice  $-2$ . De fato, essa singularidade já foi abordada na seção anterior.

**3.4. Construção de uma forma com um único ponto singular em uma superfície de gênero arbitrário.** É possível generalizar os passos acima por indução. Para ilustrar o processo, fornecemos a figura 17 com a indicação das selas e deixamos a cargo do leitor efetuar as identificações necessárias para obter o tritoro desejado.

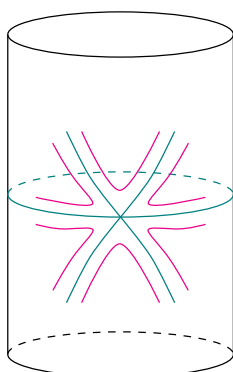


FIGURA 16. Estrutura local da singularidade isolada.

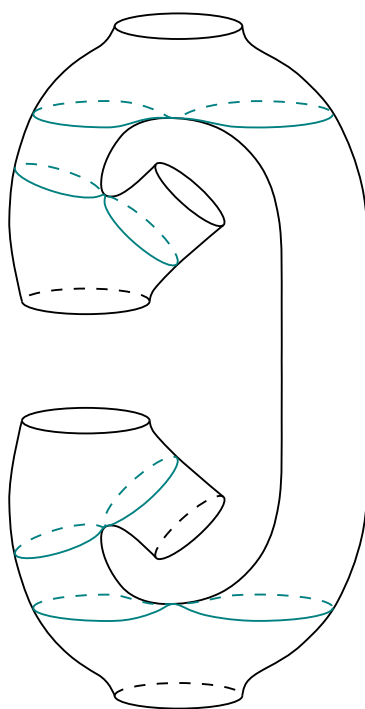


FIGURA 17. Construção para gêneros maiores.

#### 4. ÍNDICE DE CONLEY

Vimos que o índice de Poincaré-Hopf é uma ferramenta importante no estudo de singularidades de campos vetoriais suaves sobre variedades suaves. Para definir o índice de Poincaré-Hopf precisamos que os espaços tangentes da variedade estejam bem definidos numa vizinhança das singularidades. Assim, se quisermos lidar com variedades singularizadas, precisaremos de outra ferramenta para entender o que ocorre com os campos vetoriais na região singularizada. Para isso, estudaremos o índice de Conley.

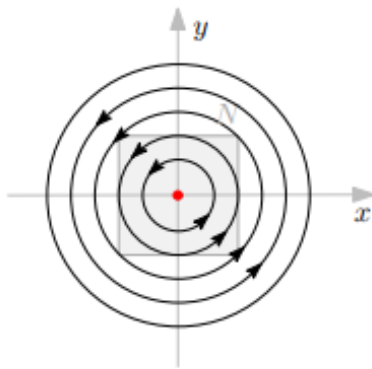
Seja  $X$  um espaço métrico localmente compacto e  $\phi$  um fluxo contínuo em  $X$ .

**Definição 4.1** (Conjunto Invariante). *Um subconjunto  $S \subset X$  é dito invariante com respeito ao fluxo  $\phi$  se, para todo  $p \in S$ , tem-se que  $\phi(t, p) \in S$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Em outras palavras,  $\phi(\mathbb{R}, S) = S$ .*

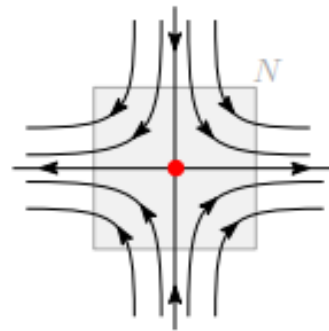
**Definição 4.2** (Conjunto Invariante Maximal). *Seja  $N \subset X$  um subconjunto de  $X$ . O conjunto invariante maximal de  $N$  é definido por:*

$$\text{Inv}(N) = \{x \in X \mid \phi(t, x) \in N, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

**Definição 4.3** (Conjunto Invariante Isolado). *Um subconjunto  $S \subset X$  é chamado de conjunto invariante isolado se existe uma vizinhança compacta  $N$  de  $S$  em  $X$  tal que  $S \subset \text{Int}(N)$  e  $S = \text{Inv}(N)$ . Neste caso,  $N$  é dita uma vizinhança isolante para  $S$  em  $X$ .*



(A) A origem não é conjunto invariante isolado



(B) A origem é conjunto invariante isolado

**Definição 4.4** (Par índice). *Um par índice para um conjunto invariante isolado  $S$  é um par de conjuntos compactos  $L \subset N$  tal que:*

- (1)  $\overline{N \setminus L}$  é uma vizinhança isolante de  $S$  em  $M$ ;
- (2)  $L$  é positivamente invariante em relação a  $N$ , ou seja, se  $p \in L$  e  $\phi_t(p) \in N$  para  $t \in [0, t_0]$ ;
- (3)  $L$  é o conjunto de saída do fluxo em  $N$ .

**Definição 4.5.** *Chamamos índice homotópico de Conley  $h(S)$  o tipo de homotopia do espaço pontuado  $(N/L, [L])$ , em que  $(N, L)$  é um par índice para  $S$ .*

O índice homotópico de Conley é “cego”, uma vez que leva em conta apenas as entradas e saídas do fluxo, e não a natureza do conjunto invariante isolado. Por exemplo, os conjuntos invariantes distintos abaixo possuem o mesmo índice.

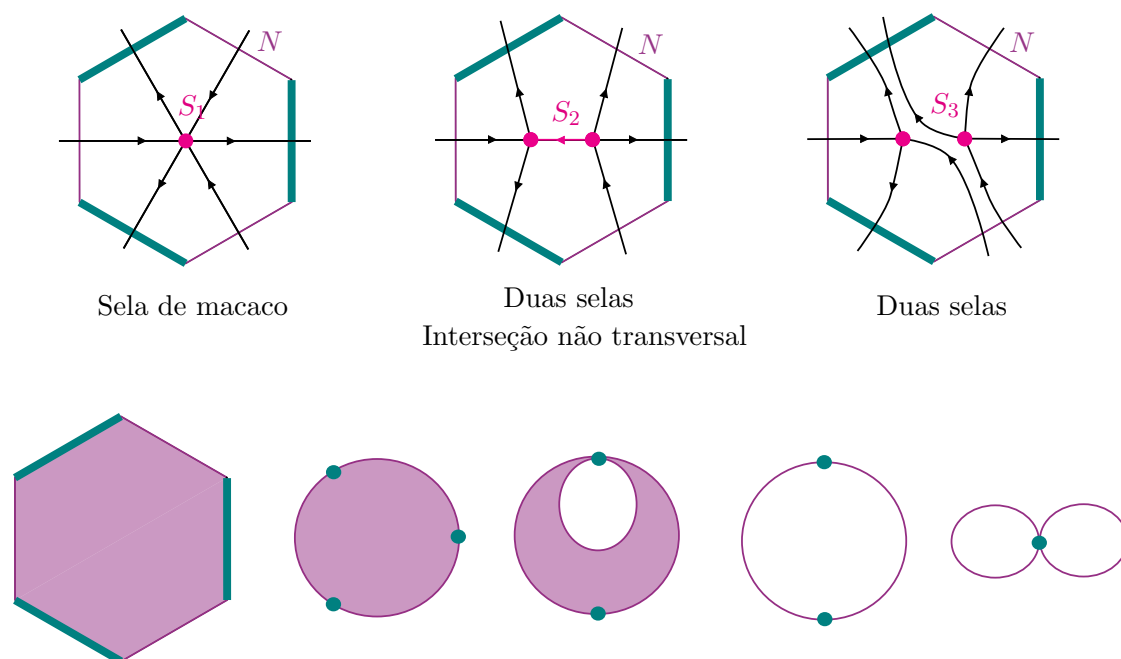


FIGURA 19. Exemplos de invariantes distintos com mesmo índice

**Definição 4.6.** *Sejam  $S$  um conjunto invariante isolado em relação ao fluxo  $\varphi$  e  $(N, L)$  um par índice para  $S$ . O índice homológico de Conley é definido por*

$$CH_*(S, \varphi) = \tilde{H}_*(N/L),$$

em que  $\tilde{H}_*(N/L)$  é o  $n$ -ésimo grupo de homologia reduzida do espaço pontuado  $(N/L, [L])$ .

**Definição 4.7.** *O índice numérico de Conley de  $S$ ,  $h_k$  é a dimensão do índice homológico de Conley  $CH_k(S)$ .*

Em nosso caso de interesse, isto é, singularidades de campos de vetores em uma variedade bidimensional que possuem apenas setores hiperbólicos, podemos notar que o número de componentes conexas do conjunto de saída  $L$  é igual ao número de separatrizes da singularidade. Dessa maneira, podemos encontrar uma relação entre o número de separatrizes de tais singularidades e seu índice homotópico de Conley.

Observando a primeira fileira da figura 20, podemos notar que, para o caso em que temos duas separatrizes,  $h(S) = S^1$ . A partir daí, estudando-se o caso que possui uma separatriz a mais, teremos um ponto a mais. Este novo ponto deverá ser identificado com o ponto que uniu as extremidades da esfera, produzindo uma nova esfera, o que resulta em  $h(S) = S^1 \vee S^1$ , como mostra a segunda fileira da figura 20. Repetindo esse raciocínio de maneira indutiva, obtemos que, para uma singularidade com  $s \in \mathbb{N}$  separatrizes, o índice homotópico de Conley será dado pela soma wedge de  $s - 1$  esferas  $S^1$ .

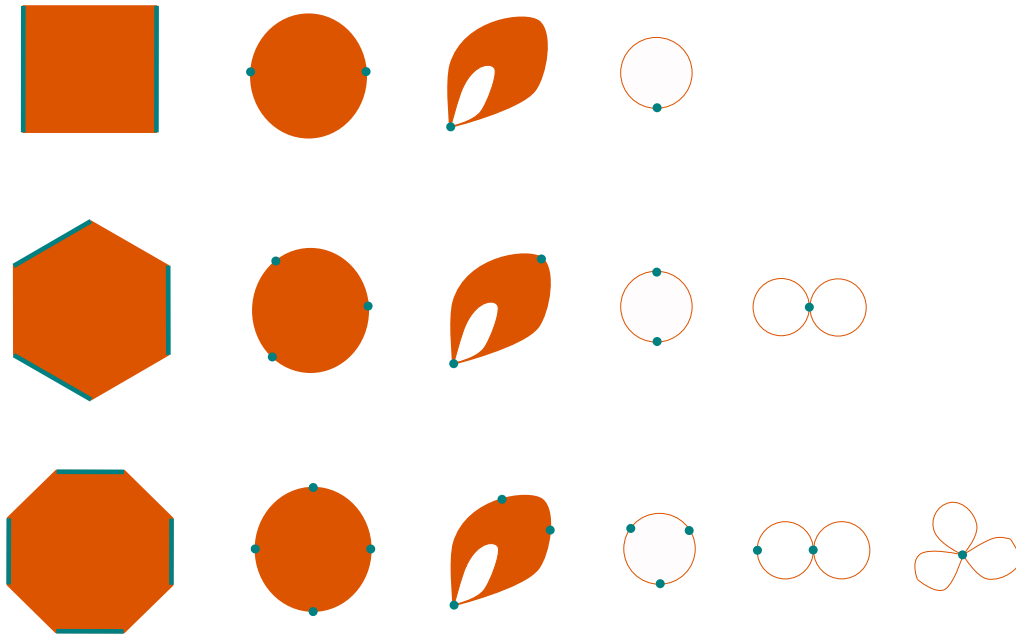


FIGURA 20. Índice homotópico de Conley de singularidades com setores hiperbólicos.

A partir do cálculo do índice homotópico de Conley para uma singularidade com apenas setores hiperbólicos com  $s$  separatrizes, podemos concluir que o índice numérico de Conley da mesma será  $(h_0, h_1, h_2) = (0, s - 1, 0)$ .

Se tivermos um campo  $\vec{v}$  suave com uma única singularidade  $x_0$  numa superfície, como discutimos nas seções anteriores, e essa singularidade possuir apenas setores hiperbólicos (como os exemplos que também concebemos nas seções anteriores), então a característica de Euler da superfície, igual à soma alternada dos  $h_i$ , será igual a  $-h_1$ . Retomando o Teorema de Poincaré-Hopf, conseguimos relacionar nesse contexto específico o índice de Conley com o índice de Poincaré-Hopf da seguinte maneira:

$$\text{ind}_{x_0}(\vec{v}) = -h_1.$$

Vale ressaltar que essa relação não vale em geral. Mais do que isso, se tivermos singularidades com setores elípticos, não é sequer possível isolar a singularidade para calcular seu índice de Conley, enquanto o índice de Poincaré-Hopf está sempre definido.

## 5. AGRADECIMENTOS

Gostaríamos de agradecer o(a) parecerista anônimo(a) pelos apontamentos que contribuíram para melhorar o presente texto. G. Zugliani foi parcialmente financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo nº 2021/00693-2.

## REFERÊNCIAS

- [BPZZ] BERGAMASCO, A. ET AL., *Classes of globally solvable involutive systems*, J. Pseudo-Differ. Oper. Appl. 8 (2017), 551–583. <https://doi.org/10.1007/s11868-017-0217-9>
- [M] MILNOR, J., *Topology of differentiable viewpoint*, The University Press of Virginia (1965).
- [MP] MELO, W. E PALIS, J., *Geometric theory of dynamical systems: an introduction*, Springer-Verlag NewYork Inc.(1982). <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5703-5>
- [S] SOTOMAYOR, J., *Lições de equações diferenciais ordinárias*, IMPA (1979).

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, CAMPINAS, BRASIL

Email address: a231312@dac.unicamp.br, deborabispo548@gmail.com,  
d170020@dac.unicamp.br, ericlesaquileslima@gmail.com,  
a.geovane.rocha@gmail.com, giuzu@unicamp.br,  
ketty@unicamp.br, marina.andrade@sou.unifal-mg.edu.br,  
murilo.zigart@gmail.com, virocha@id.uff.br