

CONCEITOS INICIAIS DA TEORIA DE CATEGORIAS VIA ÁLGEBRA LINEAR

GERMÁN BENITEZ, IGOR SOUZA

RESUMO. A teoria de categorias assume um papel fundamental na matemática moderna, sendo tanto linguagem quanto ferramenta para importantes avanços. Portanto, é um conhecimento imprescindível para o matemático contemporâneo. Com o objetivo de introduzir e motivar o estudo desta área, apresentamos neste artigo algumas noções elementares desta teoria, demonstramos a equivalência categorial entre matrizes e transformações lineares, e como a mesma equivalência traduz alguns conceitos aritméticos para o contexto de espaços vetoriais.

1. INTRODUÇÃO

A teoria de categorias surgiu em meados da década de 1940, através dos matemáticos Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane em [EM45], como um instrumento para o estudo da topologia algébrica. Esta teoria teve tanto impacto nas grandes áreas da matemática (álgebra, análise, geometria, lógica, etc.) que se tornou mais que um assunto de pesquisa; na linguagem da matemática moderna, por exemplo, é através desta linguagem que são apresentados os problemas de classificação de estruturas. O propósito da teoria de categorias é, grosso modo, abstrair “contextos” de teorias matemáticas (Categorias) usando os conceitos de objetos e morfismos e a relação entre tais contextos (Funtores).

Para citar alguns exemplos clássicos, temos a categoria dos espaços vetoriais com suas transformações lineares, a categoria dos espaços topológicos com suas funções contínuas, a categoria das variedades diferenciáveis e suas aplicações diferenciáveis, a categoria dos grupos e seus homomorfismos de grupos, entre outros. Como resumida por Mac Lane em [Mac88, pg. 1], a teoria de categorias é “a observação de que muitas propriedades matemáticas podem ser unificadas e simplificadas através de diagramas de setas”.

Data de aceitação: 13 de Dezembro de 2025.

Palavras chave. categoria, funtor, equivalência de categorias.

Contudo, dificilmente tal assunto é discutido formalmente na graduação, seja pela dificuldade técnica que a própria disciplina ofereceria, ou pela forte abstração empregada nela. Porém, dado que grande parte da matemática moderna se beneficia de tal área, é aconselhável possuir ao menos os rudimentos desta, isto é, ter conhecimento das definições formais, de exemplos e abrangências dos conceitos de categorias, funtores e equivalência de categorias. Através deste trabalho, esperamos que o leitor tenha uma introdução a teoria e, que apesar de breve, possa despertar o interesse pela área e motivar um aprofundamento nela.

A abordagem deste artigo se dará pelo ponto de vista da álgebra linear em nível de graduação, único requisito para leitura. Deste modo, poderemos analisar exemplos familiares ao leitor, ilustrando a linguagem categorial e sua potência matemática. Para um resumo histórico e filosófico da teoria, indicamos [LM05]. Para um aprofundamento teórico, o artigo original [EM45] de Eilenberg e Mac Lane seria uma introdução interessante, mas rígida, enquanto [Mac88] é tido como referência clássica. Como referência moderna da teoria, indicamos [Rie16].

O artigo se divide da seguinte maneira: Na Seção 2, abordaremos as definições de categoria, funtor, isomorfismo e equivalência de categorias, conceitos básicos da teoria, e ilustraremos estes com exemplos acessíveis ao leitor. Na Seção 3, mostraremos que a categoria dos espaços vetoriais de dimensão finita é equivalente (mas não isomorfa) a uma categoria cujos objetos são os números naturais, e as matrizes seus morfismos, finalizando com alguns comentários sobre como algumas operações aritméticas dos números naturais podem ser vistas via tal equivalência categorial.

2. CATEGORIAS E FUNTORES

De maneira informal, uma categoria é uma coleção de objetos, relações entre estes e uma regra de composição entre tais relações. O que torna uma categoria coerente é a estrutura que associa essas três características. Contudo, há a possibilidade de diferentes categorias possuírem nenhum destes elementos em comum, mas terem uma estrutura intrinsecamente semelhante. Um funtor nada mais é que uma tradução entre tais estruturas, a nível de objeto, relação e composição. O objetivo desta seção é formalizar tais noções.

Definição 2.1 (Categoria). *Uma **categoria** \mathcal{C} consiste das seguintes coleções:*

- (i) *Uma classe $\text{Obj}(\mathcal{C})$, cujos elementos serão chamados de **objetos**.*
- (ii) *Para todo par de objetos $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, um conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ tal que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \cap \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \emptyset$ se $(A, B) \neq (X, Y)$. Um elemento $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ é chamado de **morfismo** e será denotado por $f : A \rightarrow B$.*
- (iii) *Para quaisquer três objetos A, B e C , uma **lei de composição***

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C) \\ (f, g) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

Tal composição está sujeita aos seguintes axiomas:

- (a) *Para quaisquer morfismos $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ e $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$, vale a igualdade*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

- (b) Para todo objeto $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, existe um morfismo $\text{Id}_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$, chamado **morfismo identidade**, tal que, para quaisquer $B, C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ e $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ e $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$, valem as igualdades

$$f \circ \text{Id}_A = f \quad \text{e} \quad \text{Id}_A \circ g = g.$$

Observação 2.2. Apesar de possuírem a mesma notação, um morfismo não necessariamente é uma função, como será visto no Exemplo 2.6. Assim como em [Mac88, pgs. 7–10], definimos as coleções de objetos e morfismos de categorias como classes e conjuntos, respectivamente. Para uma discussão mais detalhada sobre as distinções entre os termos “coleção”, “conjunto” e “classe”, ver [Bor94, pgs. 1–4]. Porém, há casos onde existe a necessidade de tomar ambas as coleções como classes, como pode ser visto em [Mac88, pgs. 21–24].

Um caso especial de morfismo é quando o mesmo possui um inverso, ou seja, outro morfismo na categoria cujas composições à esquerda e à direita resultam nos respectivos morfismos identidades. Quando isso ocorrer, diremos que tal morfismo é um **isomorfismo**, e que os objetos relacionados são **isomorfos**. Daremos agora alguns exemplos de categorias que serão utilizadas mais adiante.

Exemplo 2.3 (A categoria dos conjuntos). A categoria mais intuitiva que podemos definir é a categoria dos conjuntos Conj , constituída da seguinte forma:

- (i) $\text{Obj}(\text{Conj})$ é a classe de todos os conjuntos.
- (ii) Para todo par de objetos $X, Y \in \text{Obj}(\text{Conj})$, o conjunto de morfismos $\text{Hom}_{\text{Conj}}(X, Y)$ é formado por todas as funções de X em Y .
- (iii) A composição de morfismos será dada pela composição usual de funções.

A verificação de que tal exemplo descreve uma categoria é imediata: a composição de funções é associativa, enquanto a composição de quaisquer funções de ou para um objeto com a respectiva identidade é a própria função.

Uma das palavras-chave da teoria das categorias é *abstração*. Neste caso, abstraímos as relações entre objetos semelhantes, o que fez a função ser a relação escolhida no exemplo anterior. Dois conjuntos isomorfos são indistinguíveis segundo a cardinalidade, principal estrutura estudada entre tais objetos. Inspirados nesta abstração, os conceitos fundamentais da álgebra linear, espaço vetorial e transformação linear, nos permitem definir naturalmente a seguinte categoria.

Exemplo 2.4 (A categoria dos espaços vetoriais de dimensão finita). A categoria dos espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo \mathbb{K} fixado, denotada aqui por $\text{Vec}_{\mathbb{K}}$, é definida da seguinte forma:

- (i) $\text{Obj}(\text{Vec}_{\mathbb{K}})$ é a classe de todos os \mathbb{K} -espaços vetoriais de dimensão finita.
- (ii) Para todo par de objetos $E, F \in \text{Obj}(\text{Vec}_{\mathbb{K}})$, o conjunto dos morfismos $\text{Hom}_{\text{Vec}_{\mathbb{K}}}(E, F)$ é formado por todas as transformações lineares de E em F .
- (iii) A composição de morfismos será dada pela composição usual de funções.

Observação 2.5. A notação $\text{Vec}_{\mathbb{K}}$ também aparece na literatura como a categoria dos \mathbb{K} -espaços vetoriais, não necessariamente de dimensão finita. Os morfismos continuam sendo os mesmos, devendo apenas atentarmos ao fato de perdermos a

representação matricial de vetores e transformações lineares. Neste trabalho, assumiremos um corpo fixo \mathbb{K} ao nos referirmos a categoria $\text{Vec}_{\mathbb{K}}$.

Perceba que, na categoria $\text{Vec}_{\mathbb{K}}$, os objetos e morfismos fazem parte da categoria Conj. De maneira geral, dada uma categoria \mathcal{C} , dizemos que uma categoria \mathcal{A} é **subcategoria** de \mathcal{C} quando: $\text{Obj}(\mathcal{A})$ é uma subcoleção de $\text{Obj}(\mathcal{C})$; $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ é um subconjunto de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ para quaisquer $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{A})$; e a lei de composição em \mathcal{A} é a mesma de \mathcal{C} . De maneira informal, obtemos uma subcategoria considerando algumas estruturas extras.

No Exemplo 2.4, utilizamos a estrutura algébrica do espaço vetorial para construir nossa categoria $\text{Vec}_{\mathbb{K}}$. O natural seria tentar utilizar outras estruturas algébricas para construir categorias, como no exemplo a seguir.

Exemplo 2.6 (A categoria das matrizes). *Dado um corpo \mathbb{K} , definimos a categoria $\text{Matr}_{\mathbb{K}}$ com as seguintes coleções*

- (i) $\text{Obj}(\text{Matr}_{\mathbb{K}})$ é o conjunto $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ dos inteiros não negativos.
- (ii) Para todo par de objetos $m, n \in \text{Obj}(\text{Matr}_{\mathbb{K}})$, o conjunto de morfismos $\text{Hom}_{\text{Matr}_{\mathbb{K}}}(n, m)$ é o conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ das matrizes $m \times n$ com entradas em \mathbb{K} .
- (iii) A composição de morfismos será dada pelo produto de matrizes.

A verificação que $\text{Matr}_{\mathbb{K}}$ é uma categoria segue da própria estrutura dos morfismos, já que o produto matricial é associativo e a matriz identidade cumpre o papel de morfismo identidade por definição.

Observação 2.7. *Dado que o objetivo deste trabalho é mostrar uma equivalência entre as categorias dos espaços vetoriais de dimensão finita e das matrizes, precisamos considerar as transformações lineares nulas. Por isso, na Definição 2.6 também consideramos formalmente matrizes com zero linhas e/ou zero colunas, as únicas deste tipo, e a composição com estas resulta numa matriz com zero linhas e/ou zero colunas.*

No último exemplo, diferente dos anteriores, os morfismos não são funções, porém cumprem o papel de relacionar quaisquer dois objetos da categoria. De fato, no item (ii) da Definição 2.1, a cada dois objetos associamos um conjunto de morfismos, podendo até mesmo ser o conjunto vazio.

Apesar de parecer ingênua, a noção de categoria pode se estender para os mais diversos casos. Desde as categorias Ab dos grupos abelianos (onde morfismos são homomorfismos de grupos), e Top dos espaços topológicos (onde morfismos são funções contínuas), até categorias bem mais abstratas, envolvendo diagramas (como quivers) ou que possuem categorias como objetos. O primeiro capítulo de [Rie16] mostra diversos exemplos mais abstratos.

Na definição de categoria, definimos um morfismo como algo que relaciona objetos de uma mesma categoria. Gostaríamos de estender tal relação de forma a abranger categorias. Em outras palavras, um análogo de função para categorias.

Definição 2.8 (Functor). *Sejam \mathcal{A} e \mathcal{B} duas categorias. Um **functor** de \mathcal{A} para \mathcal{B} , denotado por $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, é uma correspondência que associa:*

- (i) A cada objeto $X \in \text{Obj}(\mathcal{A})$, um único objeto $\mathcal{F}(X) \in \text{Obj}(\mathcal{B})$.
- (ii) A cada morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$, um morfismo $\mathcal{F}(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$ satisfazendo as seguintes propriedades:
 - (a) Para todo objeto $X \in \text{Obj}(\mathcal{A})$, $\mathcal{F}(\text{Id}_X) = \text{Id}_{\mathcal{F}(X)}$.
 - (b) Para todo par de morfismos $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ e $g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z)$, $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$.

Observação 2.9. A definição anterior corresponde a de functor **covariante**. Embora tratemos somente com funtores covariantes neste trabalho, vale a pena comentar a definição de functor **contravariante**, que satisfaz (i) e:

- (ii') A cada morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$, a correspondência associa um morfismo $\mathcal{F}(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}(Y), \mathcal{F}(X))$ que satisfaz as seguintes propriedades:
 - (a) Para todo objeto $X \in \text{Obj}(\mathcal{A})$, $\mathcal{F}(\text{Id}_X) = \text{Id}_{\mathcal{F}(X)}$.
 - (b) Para todo par de morfismos $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ e $g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z)$, $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$.

Perceba que ao tomarmos dois funtores $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ e $\mathcal{G} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$, é natural definir o functor composição $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ como sendo a composição das correspondências de \mathcal{F} e \mathcal{G} sobre objetos e morfismos. Dada que tal composição é associativa, obtemos uma estrutura próxima a de uma categoria, conforme a Definição 2.1, com categorias como objetos e funtores como morfismos. Em relação ao morfismo identidade da Definição 2.1 (iii.b), podemos contar com o seguinte functor.

Exemplo 2.10 (Functor identidade). Dada uma categoria \mathcal{C} , definimos o functor $\text{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ que associa todo objeto a ele mesmo, e todo morfismo a ele mesmo.

Contudo, a coleção de funtores entre duas categorias pode não formar um conjunto, contradizendo o item (ii) da Definição 2.1. Por exemplo, considere a coleção $\text{Funt}(\mathcal{U}, \text{Conj})$ de todos os funtores de \mathcal{U} para Conj , onde \mathcal{U} é a subcategoria de Conj com único objeto sendo o conjunto unitário, denotado por $\{*\}$, e $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(\{*\}, \{*\}) = \{\text{Id}_*\}$. Essa coleção não é um conjunto, pois existe uma bijeção

$$\psi : \begin{array}{ccc} \text{Obj}(\text{Conj}) & \longrightarrow & \text{Funt}(\mathcal{U}, \text{Conj}) \\ X & \longmapsto & \psi_X \end{array},$$

sendo $\psi_X : \mathcal{U} \rightarrow \text{Conj}$ o functor unicamente determinado por $\psi_X(*) = X$ e $\psi_X(\text{Id}_*) = \text{Id}_X$.

Para contornar este empecilho, basta considerar categorias **pequenas**, isto é, categorias cuja coleção de objetos é um conjunto. De fato, a coleção de todos os morfismos de uma categoria \mathcal{C}

$$\text{Mor}(\mathcal{C}) := \bigsqcup_{A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B),$$

é conjunto quando \mathcal{C} é pequena. Além disso, podemos ver a coleção $\text{Funt}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ de funtores de \mathcal{C} para \mathcal{D} contida da seguinte forma

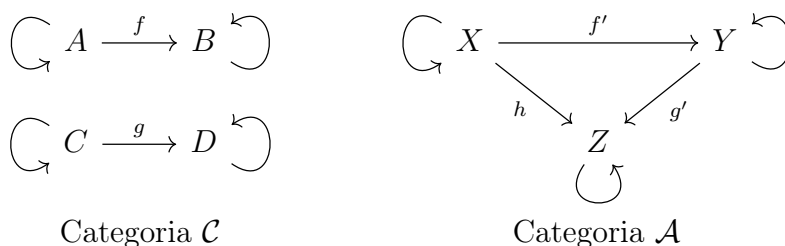
$$\text{Funt}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \subset \mathcal{P}(\text{Obj}(\mathcal{C}) \times \text{Obj}(\mathcal{D})) \times \mathcal{P}(\text{Mor}(\mathcal{C}) \times \text{Mor}(\mathcal{D})),$$

onde $\mathcal{P}(X)$ denota a coleção de partes de X . Sendo ambas as categorias pequenas, $\text{Funt}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ também será um conjunto. Com isso, temos mais um exemplo de categoria: categorias pequenas como objetos e funtores como morfismos.

Assim como categorias relacionam objetos com alguma estrutura em comum, funtores podem ser vistos como tradutores destas estruturas, e o exemplo abaixo mostra como um funtor pode manipular tal informação.

Exemplo 2.11 (Funtor esquecimento). *Considere a correspondência $\mathcal{F} : \text{Vec}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Set}$, que associa todo espaço vetorial ao seu conjunto de vetores, e toda transformação linear à sua função correspondente. A verificação de que tal associação é um funtor é imediata. Porém, notemos que, através de \mathcal{F} , a estrutura de espaço vetorial se perde, ou é esquecida, o que motiva denominarmos \mathcal{F} como um funtor esquecimento. Outros funtores deste tipo podem ser vistos em [Mac88, pg. 14] ou [Rie16, pgs. 13-14].*

Vale a pena destacar o seguinte aspecto não intuitivo dos funtores: dado um funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$, a imagem de \mathcal{F} não é necessariamente uma categoria. Ou seja, as coleções de imagens de todos os objetos e morfismos de \mathcal{C} não necessariamente formam uma subcategoria de \mathcal{A} . Como exemplo, considere as categorias \mathcal{C} e \mathcal{A} representadas pelos diagramas abaixo



em que cada vértice representa um objeto, cada loop representa o correspondente morfismo identidade, o Hom de dois objetos é a (única) flecha entre eles, se existir, ou o conjunto vazio caso contrário, e a composição de morfismos é a concatenação de flechas (Note que, com essa composição, qualquer caminho orientado entre dois vértices é igual a flecha entre os mesmos vértices). Agora, definimos a correspondência $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ da seguinte maneira:

$$\mathcal{F}(A) = X, \quad \mathcal{F}(B) = \mathcal{F}(C) = Y, \quad \mathcal{F}(D) = Z$$

$$\mathcal{F}(f) = f', \quad \mathcal{F}(g) = g'$$

além disso, $\mathcal{F}(\text{Id}_J) = \text{Id}_{\mathcal{F}(J)}$, para todo $J \in \text{Obj}(\mathcal{C})$. É simples verificar que tal correspondência é um funtor. Se as imagens dos objetos e dos morfismos formassem uma categoria, então $\mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f) = h$ deveria estar em correspondência com algum morfismo do conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, D)$ o que claramente não ocorre — ver Definição 2.1 (iii).

Exemplo 2.12 (Funtor partes de um conjunto). *Considere o funtor covariante $\mathcal{P} : \text{Conj} \rightarrow \text{Conj}$ definido da seguinte forma:*

- (i) *A todo objeto $X \in \text{Obj}(\text{Conj})$, associamos seu conjunto de partes $\mathcal{P}(X) \in \text{Obj}(\text{Conj})$.*

(ii) A todo morfismo $f \in \text{Hom}_{\text{Conj}}(A, B)$, associamos o morfismo

$$\mathcal{P}(f) : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(A) & \longrightarrow & \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & f(X) \end{array} .$$

Pela definição acima, o morfismo identidade de um objeto $X \in \text{Obj}(\text{Conj})$ é levado ao morfismo $\mathcal{P}(\text{Id}_X) : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$, que associa toda parte de X a ela mesma. Agora, para todo par de morfismos $f \in \text{Hom}_{\text{Conj}}(X, Y)$ e $g \in \text{Hom}_{\text{Conj}}(Y, Z)$, e um subconjunto $A \subset X$, temos

$$\mathcal{P}(g \circ f)(A) = (g \circ f)(A) = g(f(A)) = \mathcal{P}(g)(\mathcal{P}(f)(A)) = (\mathcal{P}(g) \circ \mathcal{P}(f))(A).$$

Ou seja, $\mathcal{P}(\text{Id}_X) = \text{Id}_{\mathcal{P}(X)}$ e $\mathcal{P}(g \circ f) = \mathcal{P}(g) \circ \mathcal{P}(f)$, e portanto, \mathcal{P} é um funtor.

Seguindo o raciocínio tradicional de várias áreas da matemática, um funtor $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é um **isomorfismo de categorias** quando existir um funtor $\mathcal{G} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} = \text{Id}_{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = \text{Id}_{\mathcal{B}}$. Em outras palavras, assim como toda propriedade categorial que um objeto possua é compartilhada com objetos isomorfos a ele na mesma categoria, categorias isomorfas compartilham as mesmas relações entre seus objetos, ou seja, possuem estruturas categoriais *semelhantes*.

Contudo, a noção de isomorfismo é muito rígida, pois, por exemplo, exige um objeto em \mathcal{A} para cada objeto em \mathcal{B} . Felizmente, contamos com uma definição mais flexível, que permite trabalhar com categorias de forma “equivalente” e não necessariamente isomorfas. Este conceito é chamado de *equivalência de categorias*, e o funtor definido na próxima seção será um exemplo dele.

Definição 2.13 (Funtor fiel, pleno e denso). *Seja $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ um funtor. Para cada par de objetos $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{A})$, considere a função*

$$\Phi_{XY} : \begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y)) \\ f & \longmapsto & \mathcal{F}(f) \end{array} .$$

Diremos que o funtor \mathcal{F} é

- (i) **Fiel** quando a função Φ_{XY} for injetiva, para todos $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{A})$.
- (ii) **Pleno** quando a função Φ_{XY} for sobrejetiva, para todos $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{A})$.
- (iii) **Denso** quando todo objeto Y de \mathcal{B} for isomorfo em \mathcal{B} a algum objeto $\mathcal{F}(X)$, com $X \in \text{Obj}(\mathcal{A})$.

Observação 2.14. *Em um análogo a funções, a composição de funtores fiéis (respectivamente plenos) continuará sendo fiel (respectivamente pleno), e um funtor fiel não necessariamente deverá ser pleno, ou vice versa.*

Todo isomorfismo de categorias claramente é fiel, pleno e denso, e consequentemente, o funtor identidade do Exemplo 2.10 satisfaz essas três propriedades. O funtor esquecimento do Exemplo 2.11 é fiel e pleno, porém não denso, já que nem todo conjunto admite uma estrutura de espaço vetorial. Por fim, vamos verificar quais destas condições o funtor do Exemplo 2.12 satisfaz. Consideremos a função Φ_{XY} da definição acima, para $X, Y \in \text{Obj}(\text{Conj})$ quaisquer.

Para a injetividade, se dois morfismos $f, g \in \text{Hom}_{\text{Conj}}(X, Y)$ são tais que $\mathcal{P}(f) = \mathcal{P}(g)$, então, para todo $Z \in \mathcal{P}(X)$, temos $f(Z) = g(Z)$ e, em especial, $f(\{z\}) = g(\{z\})$ para todo $z \in X$. Logo, temos $f = g$, e concluímos que Φ_{XY} é injetora.

Para a sobrejetividade, se $g \in \text{Hom}_{\text{Conj}}(\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(Y))$, então basta considerar $f \in \text{Hom}_{\text{Conj}}(X, Y)$ tal que $f(x) = g(\{x\})$, para todo $x \in X$ e temos $\mathcal{P}(f) = g$. Com isso, concluímos também que Φ_{XY} é sobrejetora.

Por fim, notemos que o conjunto vazio $\emptyset \in \text{Obj}(\text{Conj})$ não é isomorfo a nenhum conjunto das partes de outro conjunto, nem ao seu próprio uma vez que $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Portanto, o funtor do Exemplo 2.12 é fiel e pleno, mas não denso.

A definição convencional de equivalência de categorias, como pode ser vista em [Mac88, pg. 93], utiliza uma ferramenta mais abstrata que o escopo deste artigo permite discutir, chamada *transformação natural*. Evitamos tal definição, utilizando uma definição equivalente a original, e indicamos a referência anterior para a demonstração da equivalência entre ambas.

Definição 2.15 (Equivaleência de Categorias). *Dizemos que um funtor $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é uma **equivaleência de categorias** quando é fiel, pleno e denso. Neste caso, diremos que \mathcal{A} e \mathcal{B} são categorias equivalentes.*

3. A EQUIVALÊNCIA ENTRE ESPAÇOS VETORIAIS E MATRIZES

Esta seção será dedicada à demonstração do Teorema 3.3, o qual tem por objetivo interpretar categorialmente os seguintes resultados fundamentais de espaços vetoriais:

Teorema 3.1.

- (i) [CL20, Corolário 3.3.6, pg. 93] *Todo \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão n é isomorfo a \mathbb{K}^n .*
- (ii) [CL20, Exemplo 3.4.1, pg. 94] *Para toda transformação linear $T : V \rightarrow W$ entre espaços vetoriais de dimensão finita, existe uma matriz A tal que $[T(v)] = A[v]$, sendo $[v] \in \mathbb{K}^{\dim V}$ e $[T(v)] \in \mathbb{K}^{\dim W}$ os vetores coluna em relação às bases de V e W , respectivamente.*

De agora em diante, denotaremos por \mathbb{K}^n o \mathbb{K} -espaço vetorial $M_{n \times 1}(\mathbb{K})$ das matrizes $n \times 1$ com entradas no corpo \mathbb{K} .

Os resultados do Teorema 3.1 fazem parte do escopo de qualquer disciplina de Álgebra Linear em nível de graduação, tendo [Lim20] ou [CL20] como referências. Neste contexto, a interpretação categorial desejada trata de mostrar que as categorias $\text{Vec}_{\mathbb{K}}$ e $\text{Matr}_{\mathbb{K}}$ (Exemplos 2.4 e 2.6, respectivamente) são equivalentes. Para tanto, consideremos a correspondência $\mathcal{F} : \text{Matr}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Vec}_{\mathbb{K}}$, definida da seguinte forma:

- A todo inteiro não negativo $n \in \text{Obj}(\text{Matr}_{\mathbb{K}})$, associamos o \mathbb{K} -espaço vetorial

$$\mathcal{F}(n) = \mathbb{K}^n,$$

onde \mathbb{K}^0 denota o espaço vetorial nulo.

- A todo morfismo $A \in \text{Hom}_{\text{Matr}_{\mathbb{K}}}(m, n)$, associamos a transformação linear

$$\mathcal{F}(A) : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^m & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ v & \longmapsto & \mathcal{F}(A)(v) := Av \end{array}$$

sendo que $\mathcal{F}(A)$ é a transformação linear nula quando $mn = 0$.

Lema 3.2. $\mathcal{F} : \text{Matr}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \text{Vec}_{\mathbb{K}}$ é um funtor.

Demonstração. Vejamos que as propriedades (ii.a) e (ii.b) da Definição 2.8 são satisfeitas.

Para (ii.a), notemos que, para todo número natural $n \in \text{Obj}(\text{Matr}_{\mathbb{K}})$, os morfismos identidades $\text{Id}_n \in \text{Hom}_{\text{Matr}_{\mathbb{K}}}(n, n)$ e $\text{Id}_{\mathbb{K}^n} \in \text{Hom}_{\text{Vec}_{\mathbb{K}}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ são a matriz identidade de ordem n e a transformação linear identidade em \mathbb{K}^n , respectivamente. Portanto, $\mathcal{F}(\text{Id}_n) = \text{Id}_{\mathbb{K}^n} = \text{Id}_{\mathcal{F}(n)}$, para todo número inteiro não negativo n .

Para (ii.b), consideremos duas matrizes $A \in \text{Hom}_{\text{Matr}_{\mathbb{K}}}(m, p)$, $B \in \text{Hom}_{\text{Matr}_{\mathbb{K}}}(p, n)$ arbitrárias. Do Exemplo 2.6, temos que a composição em $\text{Matr}_{\mathbb{K}}$ é definida pelo produto matricial, isto é $B \circ A = BA \in \text{Hom}_{\text{Matr}_{\mathbb{K}}}(m, n)$, logo $\mathcal{F}(B \circ A) : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^n$. Por outro lado, a composição das transformações lineares $\mathcal{F}(A) : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^p$ e $\mathcal{F}(B) : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$, é dada por

$$(\mathcal{F}(B) \circ \mathcal{F}(A))(v) = \mathcal{F}(B)(\mathcal{F}(A)(v)) = \mathcal{F}(B)(Av) = B(Av) = (BA)v = \mathcal{F}(BA)(v),$$

para todo $v \in \mathbb{K}^m$. Isto implica que $\mathcal{F}(B \circ A) = \mathcal{F}(B) \circ \mathcal{F}(A)$. \square

O funtor $\mathcal{F} : \text{Matr}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \text{Vec}_{\mathbb{K}}$ vai nos permitir atingir o objetivo desta seção com o teorema a seguir, e para sua demonstração consideraremos a base canônica $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de \mathbb{K}^n , $n > 0$, sendo e_i o vetor de \mathbb{K}^n com i -ésima coordenada igual a 1, e as demais coordenadas iguais a 0.

Teorema 3.3. O funtor $\mathcal{F} : \text{Matr}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \text{Vec}_{\mathbb{K}}$ é uma equivalência de categorias.

Demonstração. Seguindo a Definição 2.13, mostraremos que o funtor é fiel, pleno e denso. A densidade de \mathcal{F} segue do Teorema 3.1 (i), pois qualquer espaço vetorial V de dimensão n é isomorfo à $\mathbb{K}^n = \mathcal{F}(n)$ na categoria $\text{Vec}_{\mathbb{K}}$. Para mostrar que o funtor é fiel e pleno, para $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ quaisquer, consideremos a função

$$\Phi_{mn} : \begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\text{Matr}_{\mathbb{K}}}(m, n) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\text{Vec}_{\mathbb{K}}}(\mathcal{F}(m), \mathcal{F}(n)) \\ A & \longmapsto & \mathcal{F}(A) \end{array} .$$

Mostremos que Φ_{mn} é injetora e sobrejetora. Note que, quando $mn = 0$, tais propriedades seguem da Observação 2.7 e do fato que $\text{Hom}_{\text{Vec}_{\mathbb{K}}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) = 0$. Agora consideremos $mn \neq 0$.

Para mostrar a injetividade, sejam $A, B \in \text{Hom}_{\text{Matr}_{\mathbb{K}}}(m, n)$ duas matrizes tais que $\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(B) : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^n$, ou seja, $Av = Bv$ para todo $v \in \mathbb{K}^m$. Em especial, $Ae_i = Be_i$, para todo elemento da base canônica de \mathbb{K}^m . Desta igualdade, temos que as i -ésimas colunas das matrizes A e B são iguais, e portanto, $A = B$.

A sobrejetividade segue do Teorema 3.1 (ii), pois para toda transformação linear $T \in \text{Hom}_{\text{Vec}_{\mathbb{K}}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, existe uma matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ tal que $[T(v)] = A[v]$, para todo $v \in \mathbb{K}^n$, e como em relação a base canônica tem-se que $[v] = v$ e $[T(v)] = T(v)$, então $T(v) = A[v] = \mathcal{F}(A)(v)$, do qual podemos concluir que $T = \mathcal{F}(A)$. \square

Concluída a equivalência, vejamos que o funtor \mathcal{F} não é um isomorfismo. De fato, suponha que $\mathcal{F} : \text{Matr}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Vec}_{\mathbb{K}}$ seja um isomorfismo. Para todo $n \in \text{Obj}(\text{Matr}_{\mathbb{K}})$, temos associado um espaço vetorial $\mathcal{F}(n) \in \text{Obj}(\text{Vec}_{\mathbb{K}})$. Podemos escolher um \mathbb{K} -espaço vetorial V de mesma dimensão que $\mathcal{F}(n)$, mas diferente deste. Sendo \mathcal{F} isomorfismo, deve existir $m \in \text{Obj}(\text{Matr}_{\mathbb{K}})$ tal que $\mathcal{F}(m) = V$. Segue que $\mathcal{F}(m) \neq \mathcal{F}(n)$ enquanto $n = m$, implicando que \mathcal{F} não está bem definido.

Para finalizar esta seção, dado que os objetos de $\text{Matr}_{\mathbb{K}}$ são os números inteiros não negativos, é natural questionar como o funtor traduz as propriedades aritméticas usuais de $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. A tabela abaixo traz algumas dessas traduções.

Relação de Ordem $n \leq m$	\longleftrightarrow	Existência de uma aplicação injetora $\iota : \mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{K}^m$
Relação de Ordem $n \geq m$	\longleftrightarrow	Existência de uma aplicação sobrejetora $\pi : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$
Adição $n + m$	\longleftrightarrow	Soma direta de espaços vetoriais $\mathbb{K}^n \oplus \mathbb{K}^m$
Subtração $n - m$	\longleftrightarrow	Quociente de espaços vetoriais $\mathbb{K}^n / \iota(\mathbb{K}^m)$
Multiplicação $n \cdot m$	\longleftrightarrow	Soma direta de n cópias de \mathbb{K}^m
Divisibilidade $n \div m$	\longleftrightarrow	Número de cópias de \mathbb{K}^m mergulhadas em \mathbb{K}^n

Dados $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, vejamos algumas dessas traduções em detalhes.

Para a relação de ordem usual, considere as respectivas bases canônicas de $\mathcal{F}(n) = \mathbb{K}^n$ e $\mathcal{F}(m) = \mathbb{K}^m$. Note que existe uma aplicação linear injetora $\iota : \mathcal{F}(n) \hookrightarrow \mathcal{F}(m)$ tal que $\iota(e_i) = e_i$ se, e somente se, $n \leq m$. De maneira similar, existe uma aplicação linear sobrejetora $\pi : \mathcal{F}(n) \twoheadrightarrow \mathcal{F}(m)$ com $\pi(e_i) = e_i$ se, e somente se, $n \geq m$.

A adição e a multiplicação seguem do fato que

$$\mathcal{F}(n + m) = \mathbb{K}^{n+m} = \mathbb{K}^n \oplus \mathbb{K}^m = \mathcal{F}(n) \oplus \mathcal{F}(m).$$

Na subtração, se $m \leq n$, existe uma transformação linear injetora $\iota : \mathbb{K}^m \hookrightarrow \mathbb{K}^n$, e de [CL20, Proposição 2.6.6, pg. 72], existe um subespaço vetorial W de \mathbb{K}^n tal que $\iota(\mathbb{K}^m) \oplus W = \mathbb{K}^n$. Portanto, $\dim W = n - m$ e existe uma transformação linear sobrejetora $\pi : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow W$ cujo núcleo é $\iota(\mathbb{K}^m)$. Pelo 1º Teorema do Isomorfismo [GL18, Teorema V.5.6, pg. 164], temos $\mathbb{K}^n / \iota(\mathbb{K}^m) \cong W$. Assim

$$\mathcal{F}(n - m) \cong W \cong \mathbb{K}^n / \iota(\mathbb{K}^m).$$

Em especial, do 1º Teorema do Isomorfismo, dados dois \mathbb{K} -espaços vetoriais V e W , e uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ entre estes, temos que T induz o isomorfismo

$$V / \ker T \cong T(V),$$

enquanto que, pela tradução acima, temos que $\dim V / \ker T = \dim V - \dim \ker T$. Ou seja, obtemos a igualdade

$$\dim V = \dim \ker T + \dim T(V),$$

que nada mais é que o Teorema do Núcleo e Imagem [Lim20, Teorema 6.6, p. 65]. Encorajamos que o leitor reflita sobre quais outros resultados da Álgebra Linear podem ser traduzidos utilizando esta equivalência.

REFERÊNCIAS

- [Bor94] Borceux, F., *Handbook of Categorical Algebra 1. Basic Category Theory*, Cambridge University Press, 1994.
- [CL20] Coelho F. U., Lourenço M. L., *Um Curso de Álgebra Linear*, Edusp, 2^a edição, 2020.
- [EM45] Eilenberg S., Mac Lane S., *General Theory of Natural Equivalences*, Transactions of the American Mathematical Society, Volume 58, n^o 2, 1945, 231–94.
- [GL18] Garcia A., Lequain Y., *Elementos de Álgebra*, IMPA, 6^a edição, 2018.
- [LM05] Landry E., Marquis J.P., *Categories in Context: Historical, Foundational, and Philosophical*, Philosophia Mathematica, Volume 13, 1^a Edição, Fevereiro de 2005, 1–43.
- [Lim20] Lima E. L., *Álgebra Linear*, IMPA, 10^a edição, 2020.
- [Mac88] Mac Lane S., *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, 2^a edição, 1988.
- [Rie16] Riehl E., *Category Theory in Context*, Dover Publications, 1^a edição, 2016.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
MANAUS - AM, BRAZIL
69080-900

Email address: gabm@ufam.edu.br, gabm03@gmail.com,
igor.nascimento@ufam.edu.br