RMU
REVISTA MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Revista Matemática Universitária, vol. 2, 2025
ISSN: 2675-5254 — **DOI:** 10.21711/26755254/rmu20256

EDO'S LINEARES COMPLEXAS COM COEFICIENTES CONSTANTES: TEORIA GERAL COM UM MÍNIMO DE PRÉ-REQUISITOS

MARCOS FERREIRA DE MELO

Resumo. Neste artigo, apresentamos a teoria geral de existência e unicidade para Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) lineares com coeficientes complexos constantes, usando apenas um resultado básico sobre derivadas. Ressaltamos a obtenção da solução geral dessas EDO's, sem o uso de técnicas de integração, de séries de potências e do teorema clássico de existência e unicidade.

1. Introdução

Diversos problemas, dos mais variados ramos do conhecimento, têm sido modelados e resolvidos por meio de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) lineares com coeficientes constantes. No sistema massa-mola (veja a figura 1), por exemplo, combinando a lei de Hooke $F(x) = -kx$ com a segunda lei de Newton $F(x) = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$, conclui-se que a equação do movimento para um corpo de massa m, atrelado à mola, na ausência de atrito, é dada por

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0, \tag{1}$$

em que k é a constante da mola.

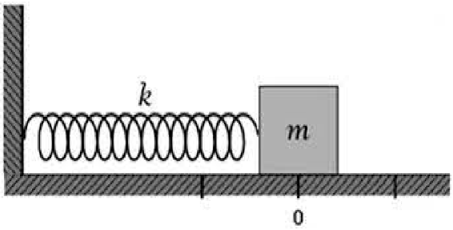
No caso dos circuitos elétricos RLC (veja a figura 2), as leis de Ohm e de Kirchhoff garantem que

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = \varepsilon \tag{2}$$

sendo L a indutância, R a resistência, C a capacitância, $Q = Q(t)$ a carga e $\varepsilon = \varepsilon(t)$ a tensão distribuída ao circuito por uma fonte em cada instante t. Na ausência de

Data de aceitação: 13 de Setembro de 2025.
Palavras chave. Equações diferenciais ordinárias; Coeficientes complexos constantes; Existência e unicidade.

Figura 1. Sistema massa-mola



Fonte: https://docente.ifrn.edu.br/edsonjose/disciplinas/fisica. Acesso em: 9 de outubro de 2023.

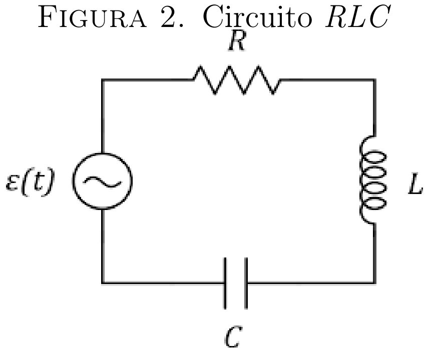
capacitância, tem-se um circuito RL. Nesse caso, a Equação Diferencial Ordinária (EDO) (2) fica reduzida a

$$L\frac{dI}{dt} + RI = \varepsilon, \tag{3}$$

em que $I = \dfrac{dQ}{dt}$ é a corrente do circuito. De modo semelhante, podem ser destacados os circuitos RC e LC, com as respectivas EDO's

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = \varepsilon \quad \text{e} \quad L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C}Q = \varepsilon. \tag{4}$$

Figura 2. Circuito RLC



Fonte: https://lemo.paginas.ufsc.br/files/2019/09/roteiro-exp-7.pdf Acesso em: 09/10/2023.

Diante disso, e de outros tantos exemplos (uma lista bem maior pode ser encontrada em [4]), fica evidente o interesse pela obtenção de soluções para EDO's da forma

$$\frac{dy}{dx} + a_0 y = \varphi(x), \tag{5}$$

ou do tipo

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = \varphi(x), \tag{6}$$

ou, mais geralmente, da forma

$$\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = \varphi(x), \tag{7}$$

em que $n \geq 1$ é um inteiro, $a_0, a_1 \ldots, a_{n-1}$ são constantes reais e $\varphi = \varphi(x)$ é uma função real dada.

No presente trabalho, usando apenas o fato de que uma função derivável num aberto conexo é constante se, e somente se, tem derivada nula, mostramos como obter a solução geral da EDO no plano complexo

$$\frac{d^n w}{dz^n} + \alpha_{n-1}\frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}} + \ldots + \alpha_1\frac{dw}{dz} + \alpha_0 w = \varphi(z), \tag{8}$$

em que $n \geq 1$ é um inteiro, $\alpha_0, \alpha_1 \ldots, \alpha_{n-1}$ são constantes complexas e $\varphi = \varphi(z)$ é uma função de uma variável complexa. Com isso, apresentamos como resolver as EDO's (7) e (8) sem fazer uso de técnicas de integração (como em [2] e [3]), de séries de potências (como em [1]) ou do teorema clássico de existência e unicidade (como em [5]).

2. EDO's Lineares Complexas com Coeficientes Constantes

Uma equação diferencial linear complexa com coeficientes constantes e ordem n é uma EDO do tipo (8).

Resolver a EDO (8) num domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$ é determinar uma função holomorfa[1] $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que

$$f^{(n)}(z) + \alpha_{n-1}f^{(n-1)}(z) + \ldots + \alpha_1 f'(z) + \alpha_0 f(z) = \varphi(z),$$

para todo $z \in \Omega$. No caso de ser possível destacar duas soluções f_1 e f_2 para a EDO (8), verifica-se facilmente que a função $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$ é uma solução da equação

$$\frac{d^n w}{dz^n} + \alpha_{n-1}\frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}} + \ldots + \alpha_1\frac{dw}{dz} + \alpha_0 w = 0, \tag{9}$$

que é a denominada EDO homogênea associada. Isto significa que se $f_p(z)$ é uma solução particular de (8) e $\mathcal{H}_n$ é o conjunto de todas as soluções de (9), então $\mathcal{H}_n + f_p = \{f_h + f_p;\ f_h \in \mathcal{H}_n\}$ é o conjunto solução de (8).

Dessa forma, a resolução da EDO (8) fica reduzida à da EDO homogênea associada (9), uma vez fixada uma solução particular de (8).

3. EDOs Lineares Homogêneas Complexas com Coeficientes Constantes

Conforme discutido na seção anterior, concentramo-nos na resolução das EDO's complexas do tipo (9), destacando os seguintes fatos, com ênfase no último listado:

- sempre existem funções inteiras[2] $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que são soluções dessas equações diferenciais;
- essas soluções estão bem determinadas, ou seja, elas podem ser apresentadas em termos de uma solução geral;

[1] Uma função de variável complexa é dita holomorfa num domínio quando é derivável em todos os pontos desse domínio.

[2] Uma função inteira é uma função definida e holomorfa no domínio $\mathbb{C}$.

- a solução geral de cada uma dessas EDO's pode ser obtida com um mínimo de pré-requisitos de cálculo diferencial.

3.1. **Existência de Soluções.** Mostrar que a EDO (9) sempre possui uma solução inteira é simples, visto que a função exponencial complexa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por $f(z) = e^{\lambda z}$, estando $\lambda \in \mathbb{C}$ fixado a priori, resolve a EDO se, e somente se, λ é uma raiz da equação polinomial

$$z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0, \tag{10}$$

denominada *equação característica associada* à EDO. Em particular, se os números $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ são as raízes de (10), então a função inteira $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$F(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k z} \tag{11}$$

é solução da EDO (9), sejam quais forem os números complexos previamente fixados $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

No caso de as raízes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ serem todas distintas, questiona-se, naturalmente, se todas as soluções da EDO são da forma (11) ou, em outras palavras, se essa é a solução geral de (9). Por outro lado, quando há repetições entre as raízes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ e o somatório em (11) fica reduzido em parcelas após alguns termos serem colocados em evidência, o questionamento passa a se concentrar em como seria a solução geral para a EDO (9), levando-se em conta as multiplicidades de tais raízes.

3.2. **Solução Geral e Unicidade de Soluções.** Para obter a solução geral da EDO linear homogênea complexa com coeficientes constantes de ordem n, apresentada na forma geral em (9), consideramos, separadamente, os valores do inteiro $n \geq 1$, que é justamente o grau da equação polinomial (10) cujas raízes estão associadas a soluções da EDO.

3.2.1. **EDOs homogêneas de primeira ordem.** No caso em que $n = 1$, a EDO (9) é dada por

$$\frac{dw}{dz} + \alpha_0 w = 0 \tag{12}$$

e sua equação característica associada é

$$z + \alpha_0 = 0, \tag{13}$$

cuja raiz é $\lambda_1 = -\alpha_0$. Nesse caso, se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma solução de (12), ou seja, se ocorre a identidade $f'(z) = \lambda_1 f(z)$, então a função inteira $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $g(z) = e^{-\lambda_1 z} f(z)$ é tal que

$$g'(z) = \frac{d}{dz}\left[e^{-\lambda_1 z} f(z)\right] = -\lambda_1 e^{-\lambda_1 z} f(z) + e^{-\lambda_1 z} f'(z) = e^{-\lambda_1 z}[-\lambda_1 f(z) + \lambda_1 f(z)] = 0,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, ou seja, g é constante. Assim, existe um número $c_1 \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = c_1 e^{\lambda_1 z}, \tag{14}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, o que nos permite concluir que (14) é a solução geral da EDO (12). Em particular, fixado $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}^2$, existe uma única solução inteira para o *problema de valor inicial* (PVI)

(15) $$\begin{cases} \dfrac{dw}{dz} &= \lambda_1 w \\ w(z_0) &= w_0, \end{cases}$$

a saber, $w(z) = w_0 e^{\lambda_1(z-z_0)}$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Com efeito, para a obtenção desta solução do PVI (15), parte-se da expressão da solução geral $w(z) = c_1 e^{\lambda_1 z}$ e, a partir do uso da condição inicial $w_0 = w(z_0) = c_1 e^{\lambda_1 z_0}$, determina-se a constante $c_1 = e^{-\lambda_1 z_0}$, resultando em

$$w(z) = e^{-\lambda_1 z_0} e^{\lambda_1 z} = e^{\lambda_1(z-z_0)}.$$

3.2.2. **EDO's homogêneas de segunda ordem.** No caso em que $n = 2$, a EDO (9) é dada por

(16) $$\frac{d^2w}{dz^2} + \alpha_1 \frac{dw}{dz} + \alpha_0 w = 0$$

e sua equação característica associada,

(17) $$z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0,$$

tem duas raízes complexas λ_1 e λ_2, iguais ou distintas. Considerando, inicialmente, o caso em que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, temos o seguinte resultado:

Teorema 1. *Se λ_1 e λ_2 são as raízes distintas da equação característica (17) e $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma solução inteira da EDO (16), então existem constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ de modo que*

(18) $$f(z) = c_1 e^{\lambda_1 z} + c_2 e^{\lambda_2 z},$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Primeiramente, observemos que é constante[3] a função inteira $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

(19) $$g(z) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_1 z} \left[f'(z) - \lambda_2 f(z)\right].$$

Com efeito, usando as condições

$$z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0 = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)$$

e

$$f''(z) = -\alpha_1 f'(z) - \alpha_0 f(z),$$

[3] Veja na observação 1 a seguir uma motivação para a definição das funções g e h que aparecem nesta demonstração.

válidas para todo $z \in \mathbb{C}$, obtemos

$$\begin{aligned} g'(z) &= \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left\{-\lambda_1 e^{-\lambda_1 z}\left[f'(z)-\lambda_2 f(z)\right]+e^{-\lambda_1 z}\left[f''(z)-\lambda_2 f'(z)\right]\right\} \\ &= \frac{e^{-\lambda_1 z}}{\lambda_1-\lambda_2}\left[(\lambda_1\lambda_2-\alpha_0)f(z)-(\lambda_1+\lambda_2+\alpha_1)f'(z)\right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Este resultado mostra que a expressão em (19) é uma constante. A partir de agora iremos denotá-la por $c_1 \in \mathbb{C}$.

Por fim, mostremos que também é constante a função inteira $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$h(z) = e^{-\lambda_2 z}\left[f(z) - c_1 e^{\lambda_1 z}\right]. \tag{20}$$

De fato, usando a identidade $c_1 = \dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-\lambda_1 z}\left[f'(z)-\lambda_2 f(z)\right]$, vemos que

$$\begin{aligned} h'(z) &= -\lambda_2 e^{-\lambda_2 z}\left[f(z)-c_1 e^{\lambda_1 z}\right]+e^{-\lambda_2 z}\left[f'(z)-c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 z}\right] \\ &= e^{-\lambda_2 z}\left[f'(z)-\lambda_2 f(z)\right]-c_1(\lambda_1-\lambda_2)e^{(\lambda_1-\lambda_2)z} \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Isto mostra que a expressão em (20) é uma constante que, quando denotada por $c_2 \in \mathbb{C}$, resulta na identidade (18), para todo $z \in \mathbb{C}$. □

Observação 1. *Visto que se deseja provar a existência de constantes c_1 e c_2 tais que seja válida a identidade $f(z) = c_1 e^{\lambda_1 z} + c_2 e^{\lambda_2 z}$ que, por sua vez, implica em $f'(z) = c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 z} + c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 z}$, nota-se que $f'(z) - \lambda_2 f(z) = c_1(\lambda_1 - \lambda_2)e^{\lambda_1 z}$, ou seja, deve-se ter*

$$c_1 = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-\lambda_1 z}\left[f'(z)-\lambda_2 f(z)\right].$$

Isto motiva a introdução da função g na demonstração acima.

Tendo sido determinada a constante c_1 na identidade pretendida $f(z) = c_1 e^{\lambda_1 z} + c_2 e^{\lambda_2 z}$, a condição

$$c_2 = e^{-\lambda_2 z}\left[f(z) - c_1 e^{\lambda_1 z}\right]$$

motiva a definição da função h na referida demonstração.

Nas demonstrações a seguir, usam-se motivações análogas para a obtenção das respectivas constantes.

Considerando agora o caso em que a equação (17) admite uma raiz dupla, o resultado correspondente ao anterior é o seguinte:

Teorema 2. *Se λ é raiz dupla da equação característica (17) e $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma solução inteira da EDO (16), então existem constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ de modo que*

$$f(z) = (c_1 z + c_2)\, e^{\lambda z}, \tag{21}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Primeiramente, observemos que é constante a função inteira $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(z) = e^{-\lambda z}\left[f'(z) - \lambda f(z)\right]. \tag{22}$$

Com efeito, usando as condições

$$z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0 = (z-\lambda)^2$$

e

$$f''(z) = -\alpha_1 f'(z) - \alpha_0 f(z),$$

válidas para todo $z \in \mathbb{C}$, obtemos

$$\begin{array}{rcl} g'(z) & = & -\lambda e^{-\lambda z}\left[f'(z) - \lambda f(z)\right] + e^{-\lambda z}\left[f''(z) - \lambda f'(z)\right] \\ & = & e^{-\lambda z}\left[(\lambda^2 - \alpha_0) f(z) - (2\lambda - \alpha_1) f'(z)\right] \\ & = & 0, \end{array}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Este resultado mostra que a expressão em (22) é uma constante. A partir de agora iremos denotá-la por $c_1 \in \mathbb{C}$.

Por fim, mostremos que também é constante a função inteira $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$h(z) = e^{-\lambda z}\left[f(z) - c_1 z e^{\lambda z}\right]. \tag{23}$$

De fato, usando a identidade $c_1 = e^{-\lambda z}\left[f'(z) - \lambda f(z)\right]$, vemos que

$$\begin{array}{rcl} h'(z) & = & -\lambda e^{-\lambda z}\left[f(z) - c_1 z e^{\lambda z}\right] + e^{-\lambda z}\left[f'(z) - c_1 e^{\lambda z} - c_1 \lambda z e^{\lambda z}\right] \\ & = & e^{-\lambda z}\left[f'(z) - \lambda f(z)\right] - c_1 \\ & = & 0, \end{array}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Isto mostra que a expressão em (23) é uma constante que, quando denotada por $c_2 \in \mathbb{C}$, resulta na identidade (21), para todo $z \in \mathbb{C}$. $\square$

Fazendo uso dos dois teoremas acima, concluímos o seguinte resultado.

Corolário 1. *Fixados $(z_0, w_0), (z_0', w_0') \in \mathbb{C}^2$, existe uma única solução inteira para o PVI*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{d^2w}{dz^2} + \alpha_1 \dfrac{dw}{dz} + \alpha_0 w & = & 0 \\ w(z_0) & = & w_0 \\ \dfrac{dw}{dz}(z_0') & = & w_0'. \end{array}\right. \tag{24}$$

3.2.3. **EDO's homogêneas de terceira ordem.** No caso em que $n = 3$, a EDO (9) é dada por

$$\frac{d^3w}{dz^3} + \alpha_2 \frac{d^2w}{dz^2} + \alpha_1 \frac{dw}{dz} + \alpha_0 w = 0 \tag{25}$$

e sua equação característica associada,

$$z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0, \tag{26}$$

tem três raízes complexas λ_1, λ_2 e λ_3, que podem ser todas distintas, todas iguais ou tais que há duas distintas. Considerando, inicialmente, o caso em que $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$, temos o seguinte resultado:

Teorema 3. *Se λ_1, λ_2 e λ_3 são as raízes distintas da equação característica (26) e $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma solução inteira da EDO (25), então existem constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ de modo que*

$$f(z) = c_1 e^{\lambda_1 z} + c_2 e^{\lambda_2 z} + c_3 e^{\lambda_3 z}, \tag{27}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Usando as identidades

$$z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0 = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)(z - \lambda_3)$$

e

$$f'''(z) + \alpha_2 f''(z) + \alpha_1 f'(z) + \alpha_0 f(z) = 0,$$

observamos que

$$\left(\frac{d}{dz} - \lambda_1\right) [f''(z) - (\lambda_2 - \lambda_3) f'(z) + \lambda_2 \lambda_3 f(z)] = 0,$$

ou seja, $f''(z) - (\lambda_2 - \lambda_3) f'(z) + \lambda_2 \lambda_3 f(z)$ resolve a EDO de primeira ordem $\dfrac{dw}{dz} = \lambda_1 w$ e, consequentemente, existe uma constante $\tilde{c_1} \in \mathbb{C}$ tal que

$$f''(z) - (\lambda_2 - \lambda_3) f'(z) + \lambda_2 \lambda_3 f(z) = \tilde{c_1} e^{\lambda_1 z}, \tag{28}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Visto que a equação (28) é uma EDO linear não homogênea de segunda ordem, segue-se que $f(z) = f_h(z) + f_p(z)$, em que $f_h(z)$ é uma solução da EDO homogênea associada, cuja equação característica é $(z - \lambda_2)(z - \lambda_3) = 0$, e $f_p(z)$ é uma solução particular de (28). Isso significa que existem constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ de modo que $f_p(x) = c_1 e^{\lambda_1 z}$ e $f_h(z) = c_2 e^{\lambda_2 z} + c_3 e^{\lambda_3 z}$, ou seja, vale a identidade (27). □

Considerando agora o caso em que a equação (26) admite uma raiz com multiplicidade dois, estabelecemos o seguinte:

Teorema 4. *Se λ_1, λ_2 e λ_3 são as raízes distintas da equação característica (26), com $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$, e $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma solução inteira da EDO (25), então existem constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ de modo que*

$$f(z) = c_1 e^{\lambda_1 z} + (c_2 z + c_3) e^{\lambda_2 z}, \tag{29}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Usando as identidades

$$z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0 = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)^2$$

e

$$f'''(z) + \alpha_2 f''(z) + \alpha_1 f'(z) + \alpha_0 f(z) = 0,$$

observamos que

$$\left(\frac{d}{dz} - \lambda_1\right)\left[f''(z) - 2\lambda_2 f'(z) + \lambda_2^2 f(z)\right] = 0,$$

ou seja, $f''(z) - 2\lambda_2 f'(z) + \lambda_2^2 f(z)$ resolve a EDO de primeira ordem $\dfrac{dw}{dz} = \lambda_1 w$ e, consequentemente, existe uma constante $\tilde{c_1} \in \mathbb{C}$ tal que

$$f''(z) - 2\lambda_2 f'(z) + \lambda_2^2 f(z) = \tilde{c_1} e^{\lambda_1 z}, \tag{30}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Visto que a equação (30) é uma EDO linear não homogênea de segunda ordem, segue-se que $f(z) = f_h(z) + f_p(z)$, em que $f_h(z)$ é uma solução da EDO homogênea associada, cuja equação característica é $(z-\lambda_2)^2 = 0$, e $f_p(z)$ é uma solução particular de (30). Isto significa que existem constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ de modo que $f_p(x) = c_1 e^{\lambda_1 z}$ e $f_h(z) = (c_2 z + c_3)e^{\lambda_2 z}$, ou seja, vale a identidade (29). □

Considerando, finalmente, o caso em que a equação (26) admite uma raiz com multiplicidade três, temos o seguinte resultado:

Teorema 5. *Se λ é raiz tripla da equação característica (26) e $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma solução inteira da EDO (25), então existem constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ de modo que*

$$f(z) = (c_1 z^2 + c_2 z + c_3)e^{\lambda z}, \tag{31}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Inicialmente, observemos que é constante a função inteira $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(z) = \frac{1}{2} e^{-\lambda z}\left[f''(z) - 2\lambda f'(z) + \lambda^2 f(z)\right]. \tag{32}$$

Com efeito, usando as condições $z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0 = (z-\lambda)^3$ e $f'''(z) = -\alpha_2 f''(z) - \alpha_1 f'(z) - \alpha_0 f(z)$, válidas para todo $z \in \mathbb{C}$, obtemos

$$\begin{aligned} g'(z) &= -\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda z}\left[f''(z) - 2\lambda f'(z) + \lambda^2 f(z)\right] + \frac{1}{2} e^{-\lambda z}\left[f'''(z) - 2\lambda f''(z) + \lambda^2 f'(z)\right] \\ &= \frac{1}{2} e^{-\lambda z}\left[-(\lambda^3 + \alpha_0) f(z) + (3\lambda^2 - \alpha_1) f'(z) + (-3\lambda - \alpha_2) f''(z)\right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Este resultado mostra que a expressão em (32) é uma constante. Se denotarmos tal constante por $c_1 \in \mathbb{C}$, veremos que a função f é solução da EDO linear não homogênea de segunda ordem $\dfrac{d^2 w}{dz^2} - 2\lambda \dfrac{dw}{dz} + \lambda^2 w = 2c_1 e^{\lambda z}$. Visto que $f_p(z) = c_1 z^2 e^{\lambda z}$ é uma solução particular dessa EDO, segue-se que $f(z) - f_p(z)$ é solução da EDO homogênea associada e, consequentemente, existem constantes $c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ de modo que $f(z) - f_p(z) = (c_2 z + c_3)e^{\lambda z}$. Isto conclui a demonstração. □

Fazendo uso dos três últimos teoremas acima, concluímos o seguinte resultado.

Corolário 2. *Fixados* $(z_0, w_0), (z_0', w_0'), (z_0'', w_0'') \in \mathbb{C}^2$, *existe uma única solução inteira para o PVI*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{d^3w}{dz^3} + \alpha_2 \dfrac{d^2w}{dz^2} + \alpha_1 \dfrac{dw}{dz} + \alpha_0 w & = & 0 \\ w(z_0) & = & w_0 \\ \frac{dw}{dz}(z_0') & = & w_0' \\ \frac{d^2w}{dz^2}(z_0'') & = & w_0''. \end{array}\right. \tag{33}$$

3.2.4. **EDO's homogêneas de ordem quatro ou superior.** No caso em que $n \geq 4$, a solução geral da EDO (9) é obtida de forma análoga ao que fizemos com $n \leq 3$, através do uso de indução matemática, por exemplo. Dessa forma, podemos afirmar que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são as raízes da equação característica (10), então a solução geral de (9) é:

- $f(z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k z}$, sendo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dois a dois distintos;
- $f(z) = (c_1 z + c_2)e^{\lambda_1 z} + \displaystyle\sum_{k=3}^{n} c_k e^{\lambda_k z}$, sendo $\lambda_1 = \lambda_2$ a única raiz dupla de (10);
- $f(z) = (c_1 z^2 + c_2 z + c_3)e^{\lambda_1 z} + \displaystyle\sum_{k=4}^{n} c_k e^{\lambda_k z}$, sendo $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ a única raiz tripla de (10);
- $f(z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{j} p_k(z) e^{\lambda_k z}$, sendo $\lambda_1, \ldots, \lambda_j$ as raízes distintas de (10), com λ_k de multiplicidade m_k e $p_k(z) \in \mathbb{C}[z]$ um polinômio de grau $m_k - 1$, para cada $k \in \{1, \ldots, j\}$, e $m_1 + \ldots + m_j = n$.

4. EDO's Lineares Homogêneas Reais com Coeficientes Constantes

Consideremos, agora, a EDO da forma

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dx} + \alpha_0 y = 0, \tag{34}$$

em que $n \geq 1$ é um inteiro e $a_0, a_2, \ldots, a_n$ são constantes reais. Quando as raízes da equação característica associada,

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \tag{35}$$

são todas reais, a solução geral de (34) é análoga à das EDO's complexas (9). No entanto, quando a equação (35) possui raízes complexas, temos duas opções a considerar:

- Para cada par de raízes complexas $a \pm bi$, usamos a exponencial complexa
$$e^{(a \pm ib)x} = e^{ax}(\cos bx \pm i \sin bx)$$
para obter um par de soluções reais
$$e^{ax}\cos bx = \frac{e^{ax}}{2}\left(e^{ibx} + e^{-ibx}\right) \quad \text{e} \quad e^{ax}\sin bx = \frac{e^{ax}}{2i}\left(e^{ibx} - e^{-ibx}\right)$$

que geram a solução geral da EDO;
- Ao invés de usar a exponencial complexa, verificamos que as funções reais $e^{ax}\cos bx$ e $e^{ax}\sin bx$ geram a solução geral da EDO.

Destacamos o seguinte resultado:

Teorema 6. *Se $\lambda = a + bi$ e $\bar{\lambda} = a - bi$, com $b \neq 0$, são as raízes da equação característica*

$$x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \tag{36}$$

e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é solução da EDO

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = 0, \tag{37}$$

então existem constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ de modo que

$$f(x) = e^{ax}\left(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx\right), \tag{38}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Inicialmente, usando as identidades

$$x^2 + a_1 x + a_0 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$$

e

$$f''(x) = -a_1 f'(x) - a_0 f(x),$$

válidas para todo $x \in \mathbb{R}$, observemos que é constante a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \frac{1}{b}e^{-ax}\left[f(x)(a\sin bx + b\cos bx) - f'(x)\sin bx\right]. \tag{39}$$

Com efeito, temos que

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{a}{b}e^{-ax}\left[f(x)(a\sin bx + b\cos bx) - f'(x)\sin bx\right] \\ &\quad +\frac{1}{b}e^{-ax}\left[f'(x)(a\sin bx + b\cos bx) + f(x)(ab\cos bx - b^2\sin bx)\right] \\ &\quad -\frac{1}{b}e^{-ax}\left[f''(x)\sin bx + bf'(x)\cos bx\right] \\ &= \frac{1}{b}e^{-ax}\sin bx\left[(a_0 - a^2 - b^2)f(x) + (2a + a_1)f'(x)\right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Este resultado mostra que a expressão em (39) é uma constante. A partir de agora iremos denotá-la por $c_1 \in \mathbb{R}$.

Por fim, mostremos que é constante a função $h : (0, \pi/|b|) \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \frac{e^{-ax}f(x) - c_1\cos bx}{\sin bx}. \tag{40}$$

Com efeito, usando a identidade $bc_1e^{ax} = f(x)(a\sin bx + b\cos bx) - f'(x)\sin bx$, temos que

$$h'(x) = \frac{e^{-ax}\left[-f(x)(a\sin bx + b\cos bx) + f'(x)\sin bx + e^{ax}bc_1\right]}{\sin^2 bx} = 0,$$

para todo $x \in (0, \pi/|b|)$. Isso mostra que a expressão em (40) é uma constante que, quando denotada por $c_2 \in \mathbb{R}$, resulta na identidade (38) no intervalo $(0, \pi/|b|)$.

Visto que as constantes $c_1 = f(0)$ e $c_2 = \frac{1}{b}\,[f'(0) - af(0)]$ estão determinadas e, pela periodicidade das funções seno e cosseno, o argumento acima garante que a identidade (38) vale em $\mathbb{R} - \{k\pi/b;\ k \in \mathbb{Z}\}$, concluímos, por continuidade, que a identidade (38) vale para todo $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Observação 2. *A demonstração acima mostra que é possível chegar à solução geral da EDO (37) sem fazer uso de números complexos, embora a resolução no contexto das EDO's complexas seja bem mais simples. Dessa forma, fica evidente a resolução da EDO (34), mesmo na presença de raízes complexas da equação característica (35), com as suas possíveis multiplicidades, fazendo uso ou não das EDO's complexas.*

Observação 3. *No contexto da Álgebra Linear, concluímos que, fixados um inteiro $n \geq 1$ e números $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \ldots, \varepsilon_{n-1} \in \mathbb{K}$, com $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, o conjunto $\mathcal{H}_n(\mathbb{K}) = \{f : \mathbb{K} \to \mathbb{K};\ f^{(n)} + \varepsilon_{n-1} f^{(n-1)} + \ldots + \varepsilon_1 f' + \varepsilon_0 f = 0\}$ é um $\mathbb{K}-$espaço vetorial $n-$dimensional, visto que as soluções gerais obtidas sempre apontam para um conjunto de geradores de $\mathcal{H}_n(\mathbb{K})$ com exatamente n elementos, obviamente linearmente independentes.*

5. Considerações finais

No presente trabalho, mostramos como resolver uma EDO linear homogênea com coeficientes reais ou complexos constantes sem fazer uso de técnicas de integração (como em [2] ou [3]), de séries de potências (como em [1]) ou do teorema clássico de existência e unicidade (como em [5]). Demonstramos como obter a solução geral de uma EDO linear com coeficientes constantes, utilizando apenas o fato de que uma função derivável num aberto conexo é constante se, e somente se, sua derivada é nula.

A abordagem sugerida traz contribuições que podem enriquecer a metodologia de ensino de professores que atuam nos cursos básicos de Cálculo, Equações Diferenciais e Variável Complexa. Antes de estudar integração de Riemann e séries de potências, os professores de Cálculo poderão apresentar a seus alunos a teoria geral de EDO's lineares com coeficientes constantes. Antes de apresentar o famoso teorema de Picard sobre existência e unicidade, os docentes de Equações Diferenciais poderão resolver completamente as referidas EDO's. Por fim, logo após introduzir o conceito de diferenciabilidade de funções de uma variável complexa, os professores de Variável Complexa poderão estudar essa teoria geral de EDO's no plano complexo. Nosso trabalho, portanto, apresentou uma forma de desenvolver a teoria geral de EDO's lineares com coeficientes constantes com um mínimo de pré-requisitos.

Agradecimentos

O autor agradece ao professor Antonio Caminha Muniz Neto, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, pelas diversas sugestões dadas durante a elaboração deste artigo.

Referências

[1] Apostol, Tom M. *Cálculo I.* REVERTÉ, 1979. 792 p. ISBN 8429150153.
[2] Guidorizzi, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo - Vol. 2.* LTC, 2001. 496 p. ISBN 852161280X.
[3] Neto, Antonio Caminha Muniz. *Fundamentos de Cálculo.* SBM, 2022. 577 p. ISBN 9788583371717.
[4] Simmons, J. *Differential Equations with Applications and Historical Notes.* Chapman and Hall/CRC, 2017. 764 p. ISBN 9781498702591.
[5] Sotomayor, Jorge. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias.* IMPA, 1979. 331 p. ISBN 85-244-0159-1.

Universidade Federal do Ceará
Avenida Humberto Monte, S/N, bloco 914
Fortaleza, CE
60455-760
Email address: mcosmelo@mat.ufc.br