



ISSN: 2675-5254

Ano 2025, Volume 2

Índice

Germán Benitez, Igor Souza

Conceitos Iniciais da Teoria de Categorias via Álgebra Linear69

Marcos Ferreira de Melo

EDO's Lineares Complexas com Coeficientes Constantes: Teoria Geral com um Mínimo de Pré-Requisitos80



SOBRE A RMU

A Revista Matemática Universitária (RMU) é uma publicação digital da Sociedade Brasileira de Matemática voltada para alunos e professores de cursos de nível superior de Matemática em suas várias modalidades. Seus objetivos são promover o intercâmbio entre os membros da comunidade matemática brasileira e apresentar a beleza, a vitalidade e os aspectos interdisciplinares, históricos, humanos e culturais da Rainha das Ciências.

Comitê Editorial

- Editor chefe:
Paolo Piccione - USP
- Editores:
Daniel Gonçalves - UFSC
Fernando Manfio - USP

ISSN

2675–5254I

Periodicidade

Semestral

Contato

Sociedade Brasileira de Matemática
Av. Rio Branco, 109, Sala 703, Centro
Rio de Janeiro – RJ
CEP: 20040-004

Email: rmu@sbm.org.br

Página web: <https://rmu.sbm.org.br/>



CONCEITOS INICIAIS DA TEORIA DE CATEGORIAS VIA ÁLGEBRA LINEAR

GERMÁN BENITEZ, IGOR SOUZA

RESUMO. A teoria de categorias assume um papel fundamental na matemática moderna, sendo tanto linguagem quanto ferramenta para importantes avanços. Portanto, é um conhecimento imprescindível para o matemático contemporâneo. Com o objetivo de introduzir e motivar o estudo desta área, apresentamos neste artigo algumas noções elementares desta teoria, demonstramos a equivalência categorial entre matrizes e transformações lineares, e como a mesma equivalência traduz alguns conceitos aritméticos para o contexto de espaços vetoriais.

1. INTRODUÇÃO

A teoria de categorias surgiu em meados da década de 1940, através dos matemáticos Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane em [EM45], como um instrumento para o estudo da topologia algébrica. Esta teoria teve tanto impacto nas grandes áreas da matemática (álgebra, análise, geometria, lógica, etc.) que se tornou mais que um assunto de pesquisa; na linguagem da matemática moderna, por exemplo, é através desta linguagem que são apresentados os problemas de classificação de estruturas. O propósito da teoria de categorias é, grosso modo, abstrair “contextos” de teorias matemáticas (Categorias) usando os conceitos de objetos e morfismos e a relação entre tais contextos (Funtores).

Para citar alguns exemplos clássicos, temos a categoria dos espaços vetoriais com suas transformações lineares, a categoria dos espaços topológicos com suas funções contínuas, a categoria das variedades diferenciáveis e suas aplicações diferenciáveis, a categoria dos grupos e seus homomorfismos de grupos, entre outros. Como resumida por Mac Lane em [Mac88, pg. 1], a teoria de categorias é “a observação de que muitas propriedades matemáticas podem ser unificadas e simplificadas através de diagramas de setas”.

Data de aceitação: 13 de Dezembro de 2025.

Palavras chave. categoria, funtor, equivalência de categorias.

Contudo, dificilmente tal assunto é discutido formalmente na graduação, seja pela dificuldade técnica que a própria disciplina ofereceria, ou pela forte abstração empregada nela. Porém, dado que grande parte da matemática moderna se beneficia de tal área, é aconselhável possuir ao menos os rudimentos desta, isto é, ter conhecimento das definições formais, de exemplos e abrangências dos conceitos de categorias, funtores e equivalência de categorias. Através deste trabalho, esperamos que o leitor tenha uma introdução a teoria e, que apesar de breve, possa despertar o interesse pela área e motivar um aprofundamento nela.

A abordagem deste artigo se dará pelo ponto de vista da álgebra linear em nível de graduação, único requisito para leitura. Deste modo, poderemos analisar exemplos familiares ao leitor, ilustrando a linguagem categorial e sua potência matemática. Para um resumo histórico e filosófico da teoria, indicamos [LM05]. Para um aprofundamento teórico, o artigo original [EM45] de Eilenberg e Mac Lane seria uma introdução interessante, mas rígida, enquanto [Mac88] é tido como referência clássica. Como referência moderna da teoria, indicamos [Rie16].

O artigo se divide da seguinte maneira: Na Seção 2, abordaremos as definições de categoria, funtor, isomorfismo e equivalência de categorias, conceitos básicos da teoria, e ilustraremos estes com exemplos acessíveis ao leitor. Na Seção 3, mostraremos que a categoria dos espaços vetoriais de dimensão finita é equivalente (mas não isomorfa) a uma categoria cujos objetos são os números naturais, e as matrizes seus morfismos, finalizando com alguns comentários sobre como algumas operações aritméticas dos números naturais podem ser vistas via tal equivalência categorial.

2. CATEGORIAS E FUNTORES

De maneira informal, uma categoria é uma coleção de objetos, relações entre estes e uma regra de composição entre tais relações. O que torna uma categoria coerente é a estrutura que associa essas três características. Contudo, há a possibilidade de diferentes categorias possuírem nenhum destes elementos em comum, mas terem uma estrutura intrinsecamente semelhante. Um funtor nada mais é que uma tradução entre tais estruturas, a nível de objeto, relação e composição. O objetivo desta seção é formalizar tais noções.

Definição 2.1 (Categoria). *Uma categoria \mathcal{C} consiste das seguintes coleções:*

- (i) *Uma classe $\text{Obj}(\mathcal{C})$, cujos elementos serão chamados de **objetos**.*
- (ii) *Para todo par de objetos $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, um conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ tal que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \cap \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \emptyset$ se $(A, B) \neq (X, Y)$. Um elemento $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ é chamado de **morfismo** e será denotado por $f : A \rightarrow B$.*
- (iii) *Para quaisquer três objetos A, B e C , uma **lei de composição***

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C) \\ (f, g) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

Tal composição está sujeita aos seguintes axiomas:

- (a) *Para quaisquer morfismos $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ e $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$, vale a igualdade*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

- (b) Para todo objeto $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, existe um morfismo $\text{Id}_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$, chamado **morfismo identidade**, tal que, para quaisquer $B, C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ e $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ e $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$, valem as igualdades

$$f \circ \text{Id}_A = f \quad \text{e} \quad \text{Id}_A \circ g = g.$$

Observação 2.2. Apesar de possuírem a mesma notação, um morfismo não necessariamente é uma função, como será visto no Exemplo 2.6. Assim como em [Mac88, pgs. 7–10], definimos as coleções de objetos e morfismos de categorias como classes e conjuntos, respectivamente. Para uma discussão mais detalhada sobre as distinções entre os termos “coleção”, “conjunto” e “classe”, ver [Bor94, pgs. 1–4]. Porém, há casos onde existe a necessidade de tomar ambas as coleções como classes, como pode ser visto em [Mac88, pgs. 21–24].

Um caso especial de morfismo é quando o mesmo possui um inverso, ou seja, outro morfismo na categoria cujas composições à esquerda e à direita resultam nos respectivos morfismos identidades. Quando isso ocorrer, diremos que tal morfismo é um **isomorfismo**, e que os objetos relacionados são **isomorfos**. Daremos agora alguns exemplos de categorias que serão utilizadas mais adiante.

Exemplo 2.3 (A categoria dos conjuntos). A categoria mais intuitiva que podemos definir é a categoria dos conjuntos Conj , constituída da seguinte forma:

- (i) $\text{Obj}(\text{Conj})$ é a classe de todos os conjuntos.
- (ii) Para todo par de objetos $X, Y \in \text{Obj}(\text{Conj})$, o conjunto de morfismos $\text{Hom}_{\text{Conj}}(X, Y)$ é formado por todas as funções de X em Y .
- (iii) A composição de morfismos será dada pela composição usual de funções.

A verificação de que tal exemplo descreve uma categoria é imediata: a composição de funções é associativa, enquanto a composição de quaisquer funções de ou para um objeto com a respectiva identidade é a própria função.

Uma das palavras-chave da teoria das categorias é *abstração*. Neste caso, abstraímos as relações entre objetos semelhantes, o que fez a função ser a relação escolhida no exemplo anterior. Dois conjuntos isomorfos são indistinguíveis segundo a cardinalidade, principal estrutura estudada entre tais objetos. Inspirados nesta abstração, os conceitos fundamentais da álgebra linear, espaço vetorial e transformação linear, nos permitem definir naturalmente a seguinte categoria.

Exemplo 2.4 (A categoria dos espaços vetoriais de dimensão finita). A categoria dos espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo \mathbb{K} fixado, denotada aqui por $\text{Vec}_{\mathbb{K}}$, é definida da seguinte forma:

- (i) $\text{Obj}(\text{Vec}_{\mathbb{K}})$ é a classe de todos os \mathbb{K} -espaços vetoriais de dimensão finita.
- (ii) Para todo par de objetos $E, F \in \text{Obj}(\text{Vec}_{\mathbb{K}})$, o conjunto dos morfismos $\text{Hom}_{\text{Vec}_{\mathbb{K}}}(E, F)$ é formado por todas as transformações lineares de E em F .
- (iii) A composição de morfismos será dada pela composição usual de funções.

Observação 2.5. A notação $\text{Vec}_{\mathbb{K}}$ também aparece na literatura como a categoria dos \mathbb{K} -espaços vetoriais, não necessariamente de dimensão finita. Os morfismos continuam sendo os mesmos, devendo apenas atentarmos ao fato de perdermos a

representação matricial de vetores e transformações lineares. Neste trabalho, assumiremos um corpo fixo \mathbb{K} ao nos referirmos a categoria $\text{Vec}_{\mathbb{K}}$.

Perceba que, na categoria $\text{Vec}_{\mathbb{K}}$, os objetos e morfismos fazem parte da categoria Conj . De maneira geral, dada uma categoria \mathcal{C} , dizemos que uma categoria \mathcal{A} é **subcategoria** de \mathcal{C} quando: $\text{Obj}(\mathcal{A})$ é uma subcoleção de $\text{Obj}(\mathcal{C})$; $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ é um subconjunto de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ para quaisquer $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{A})$; e a lei de composição em \mathcal{A} é a mesma de \mathcal{C} . De maneira informal, obtemos uma subcategoria considerando algumas estruturas extras.

No Exemplo 2.4, utilizamos a estrutura algébrica do espaço vetorial para construir nossa categoria $\text{Vec}_{\mathbb{K}}$. O natural seria tentar utilizar outras estruturas algébricas para construir categorias, como no exemplo a seguir.

Exemplo 2.6 (A categoria das matrizes). *Dado um corpo \mathbb{K} , definimos a categoria $\text{Matr}_{\mathbb{K}}$ com as seguintes coleções*

- (i) $\text{Obj}(\text{Matr}_{\mathbb{K}})$ é o conjunto $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ dos inteiros não negativos.
- (ii) Para todo par de objetos $m, n \in \text{Obj}(\text{Matr}_{\mathbb{K}})$, o conjunto de morfismos $\text{Hom}_{\text{Matr}_{\mathbb{K}}}(n, m)$ é o conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ das matrizes $m \times n$ com entradas em \mathbb{K} .
- (iii) A composição de morfismos será dada pelo produto de matrizes.

A verificação que $\text{Matr}_{\mathbb{K}}$ é uma categoria segue da própria estrutura dos morfismos, já que o produto matricial é associativo e a matriz identidade cumpre o papel de morfismo identidade por definição.

Observação 2.7. *Dado que o objetivo deste trabalho é mostrar uma equivalência entre as categorias dos espaços vetoriais de dimensão finita e das matrizes, precisamos considerar as transformações lineares nulas. Por isso, na Definição 2.6 também consideramos formalmente matrizes com zero linhas e/ou zero colunas, as únicas deste tipo, e a composição com estas resulta numa matriz com zero linhas e/ou zero colunas.*

No último exemplo, diferente dos anteriores, os morfismos não são funções, porém cumprem o papel de relacionar quaisquer dois objetos da categoria. De fato, no item (ii) da Definição 2.1, a cada dois objetos associamos um conjunto de morfismos, podendo até mesmo ser o conjunto vazio.

Apesar de parecer ingênua, a noção de categoria pode se estender para os mais diversos casos. Desde as categorias Ab dos grupos abelianos (onde morfismos são homomorfismos de grupos), e Top dos espaços topológicos (onde morfismos são funções contínuas), até categorias bem mais abstratas, envolvendo diagramas (como *quivers*) ou que possuem categorias como objetos. O primeiro capítulo de [Rie16] mostra diversos exemplos mais abstratos.

Na definição de categoria, definimos um morfismo como algo que relaciona objetos de uma mesma categoria. Gostaríamos de estender tal relação de forma a abranger categorias. Em outras palavras, um análogo de função para categorias.

Definição 2.8 (Funtor). *Sejam \mathcal{A} e \mathcal{B} duas categorias. Um **funtor** de \mathcal{A} para \mathcal{B} , denotado por $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, é uma correspondência que associa:*

- (i) A cada objeto $X \in \text{Obj}(\mathcal{A})$, um único objeto $\mathcal{F}(X) \in \text{Obj}(\mathcal{B})$.
- (ii) A cada morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$, um morfismo $\mathcal{F}(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$ satisfazendo as seguintes propriedades:
 - (a) Para todo objeto $X \in \text{Obj}(\mathcal{A})$, $\mathcal{F}(\text{Id}_X) = \text{Id}_{\mathcal{F}(X)}$.
 - (b) Para todo par de morfismos $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ e $g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z)$, $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$.

Observação 2.9. A definição anterior corresponde a de funtor **covariante**. Embora tratemos somente com funtores covariantes neste trabalho, vale a pena comentar a definição de funtor **contravariante**, que satisfaz (i) e:

- (ii') A cada morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$, a correspondência associa um morfismo $\mathcal{F}(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}(Y), \mathcal{F}(X))$ que satisfaz as seguintes propriedades:
 - (a) Para todo objeto $X \in \text{Obj}(\mathcal{A})$, $\mathcal{F}(\text{Id}_X) = \text{Id}_{\mathcal{F}(X)}$.
 - (b) Para todo par de morfismos $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ e $g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z)$, $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$.

Perceba que ao tomarmos dois funtores $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ e $\mathcal{G} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$, é natural definir o funtor composição $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ como sendo a composição das correspondências de \mathcal{F} e \mathcal{G} sobre objetos e morfismos. Dada que tal composição é associativa, obtemos uma estrutura próxima a de uma categoria, conforme a Definição 2.1, com categorias como objetos e funtores como morfismos. Em relação ao morfismo identidade da Definição 2.1 (iii.b), podemos contar com o seguinte funtor.

Exemplo 2.10 (Funtor identidade). Dada uma categoria \mathcal{C} , definimos o funtor $\text{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ que associa todo objeto a ele mesmo, e todo morfismo a ele mesmo.

Contudo, a coleção de funtores entre duas categorias pode não formar um conjunto, contradizendo o item (ii) da Definição 2.1. Por exemplo, considere a coleção $\text{Funt}(\mathcal{U}, \text{Conj})$ de todos os funtores de \mathcal{U} para Conj , onde \mathcal{U} é a subcategoria de Conj com único objeto sendo o conjunto unitário, denotado por $\{*\}$, e $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(\{*\}, \{*\}) = \{\text{Id}_*\}$. Essa coleção não é um conjunto, pois existe uma bijeção

$$\psi : \text{Obj}(\text{Conj}) \rightarrow \text{Funt}(\mathcal{U}, \text{Conj})$$

$$X \mapsto \psi_X,$$

sendo $\psi_X : \mathcal{U} \rightarrow \text{Conj}$ o funtor unicamente determinado por $\psi_X(*) = X$ e $\psi_X(\text{Id}_*) = \text{Id}_X$.

Para contornar este empecilho, basta considerar categorias **pequenas**, isto é, categorias cuja coleção de objetos é um conjunto. De fato, a coleção de todos os morfismos de uma categoria \mathcal{C}

$$\text{Mor}(\mathcal{C}) := \bigsqcup_{A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B),$$

é conjunto quando \mathcal{C} é pequena. Além disso, podemos ver a coleção $\text{Funt}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ de funtores de \mathcal{C} para \mathcal{D} contida da seguinte forma

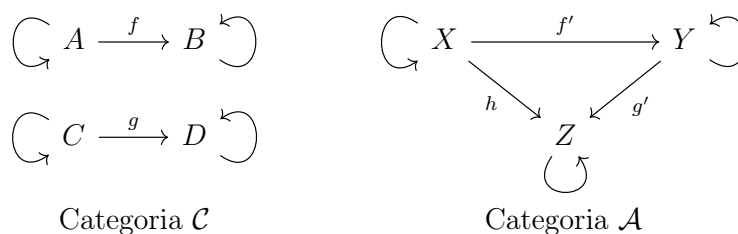
$$\text{Funt}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \subset \mathcal{P}(\text{Obj}(\mathcal{C}) \times \text{Obj}(\mathcal{D})) \times \mathcal{P}(\text{Mor}(\mathcal{C}) \times \text{Mor}(\mathcal{D})),$$

onde $\mathcal{P}(X)$ denota a coleção de partes de X . Sendo ambas as categorias pequenas, $\text{Funt}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ também será um conjunto. Com isso, temos mais um exemplo de categoria: categorias pequenas como objetos e funtores como morfismos.

Assim como categorias relacionam objetos com alguma estrutura em comum, funtores podem ser vistos como tradutores destas estruturas, e o exemplo abaixo mostra como um funtor pode manipular tal informação.

Exemplo 2.11 (Funtor esquecimento). *Considere a correspondência $\mathcal{F} : \text{Vec}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Set}$, que associa todo espaço vetorial ao seu conjunto de vetores, e toda transformação linear à sua função correspondente. A verificação de que tal associação é um funtor é imediata. Porém, notemos que, através de \mathcal{F} , a estrutura de espaço vetorial se perde, ou é esquecida, o que motiva denominarmos \mathcal{F} como um funtor esquecimento. Outros funtores deste tipo podem ser vistos em [Mac88, pg. 14] ou [Rie16, pgs. 13-14].*

Vale a pena destacar o seguinte aspecto não intuitivo dos funtores: dado um funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$, a imagem de \mathcal{F} não é necessariamente uma categoria. Ou seja, as coleções de imagens de todos os objetos e morfismos de \mathcal{C} não necessariamente formam uma subcategoria de \mathcal{A} . Como exemplo, considere as categorias \mathcal{C} e \mathcal{A} representadas pelos diagramas abaixo



em que cada vértice representa um objeto, cada loop representa o correspondente morfismo identidade, o Hom de dois objetos é a (única) flecha entre eles, se existir, ou o conjunto vazio caso contrário, e a composição de morfismos é a concatenação de flechas (Note que, com essa composição, qualquer caminho orientado entre dois vértices é igual a flecha entre os mesmos vértices). Agora, definimos a correspondência $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ da seguinte maneira:

$$\mathcal{F}(A) = X, \quad \mathcal{F}(B) = \mathcal{F}(C) = Y, \quad \mathcal{F}(D) = Z$$

$$\mathcal{F}(f) = f', \quad \mathcal{F}(g) = g'$$

além disso, $\mathcal{F}(\text{Id}_J) = \text{Id}_{\mathcal{F}(J)}$, para todo $J \in \text{Obj}(\mathcal{C})$. É simples verificar que tal correspondência é um funtor. Se as imagens dos objetos e dos morfismos formassem uma categoria, então $\mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f) = h$ deveria estar em correspondência com algum morfismo do conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, D)$ o que claramente não ocorre — ver Definição 2.1 (iii).

Exemplo 2.12 (Funtor partes de um conjunto). *Considere o funtor covariante $\mathcal{P} : \text{Conj} \rightarrow \text{Conj}$ definido da seguinte forma:*

- (i) *A todo objeto $X \in \text{Obj}(\text{Conj})$, associamos seu conjunto de partes $\mathcal{P}(X) \in \text{Obj}(\text{Conj})$.*

(ii) A todo morfismo $f \in \text{Hom}_{\text{Conj}}(A, B)$, associamos o morfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(A) & \longrightarrow & \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & f(X) \end{array} .$$

Pela definição acima, o morfismo identidade de um objeto $X \in \text{Obj}(\text{Conj})$ é levado ao morfismo $\mathcal{P}(\text{Id}_X) : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$, que associa toda parte de X a ela mesma. Agora, para todo par de morfismos $f \in \text{Hom}_{\text{Conj}}(X, Y)$ e $g \in \text{Hom}_{\text{Conj}}(Y, Z)$, e um subconjunto $A \subset X$, temos

$$\mathcal{P}(g \circ f)(A) = (g \circ f)(A) = g(f(A)) = \mathcal{P}(g)(\mathcal{P}(f)(A)) = (\mathcal{P}(g) \circ \mathcal{P}(f))(A).$$

Ou seja, $\mathcal{P}(\text{Id}_X) = \text{Id}_{\mathcal{P}(X)}$ e $\mathcal{P}(g \circ f) = \mathcal{P}(g) \circ \mathcal{P}(f)$, e portanto, \mathcal{P} é um funtor.

Seguindo o raciocínio tradicional de várias áreas da matemática, um funtor $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é um **isomorfismo de categorias** quando existir um funtor $\mathcal{G} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} = \text{Id}_{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = \text{Id}_{\mathcal{B}}$. Em outras palavras, assim como toda propriedade categorial que um objeto possua é compartilhada com objetos isomorfos a ele na mesma categoria, categorias isomorfas compartilham as mesmas relações entre seus objetos, ou seja, possuem estruturas categoriais *semelhantes*.

Contudo, a noção de isomorfismo é muito rígida, pois, por exemplo, exige um objeto em \mathcal{A} para cada objeto em \mathcal{B} . Felizmente, contamos com uma definição mais flexível, que permite trabalhar com categorias de forma “equivalente” e não necessariamente isomorfas. Este conceito é chamado de *equivalência de categorias*, e o funtor definido na próxima seção será um exemplo dele.

Definição 2.13 (Funtor fiel, pleno e denso). *Seja $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ um funtor. Para cada par de objetos $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{A})$, considere a função*

$$\begin{array}{ccc} \Phi_{XY} : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y)) \\ f & \longmapsto & \mathcal{F}(f) \end{array} .$$

Diremos que o funtor \mathcal{F} é

- (i) **Fiel** quando a função Φ_{XY} for injetiva, para todos $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{A})$.
- (ii) **Pleno** quando a função Φ_{XY} for sobrejetiva, para todos $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{A})$.
- (iii) **Denso** quando todo objeto Y de \mathcal{B} for isomorfo em \mathcal{B} a algum objeto $\mathcal{F}(X)$, com $X \in \text{Obj}(\mathcal{A})$.

Observação 2.14. *Em um análogo a funções, a composição de funtores fiéis (respectivamente plenos) continuará sendo fiel (respectivamente pleno), e um funtor fiel não necessariamente deverá ser pleno, ou vice versa.*

Todo isomorfismo de categorias claramente é fiel, pleno e denso, e consequentemente, o funtor identidade do Exemplo 2.10 satisfaz essas três propriedades. O funtor esquecimento do Exemplo 2.11 é fiel e pleno, porém não denso, já que nem todo conjunto admite uma estrutura de espaço vetorial. Por fim, vamos verificar quais destas condições o funtor do Exemplo 2.12 satisfaz. Consideremos a função Φ_{XY} da definição acima, para $X, Y \in \text{Obj}(\text{Conj})$ quaisquer.

Para a injetividade, se dois morfismos $f, g \in \text{Hom}_{\text{Conj}}(X, Y)$ são tais que $\mathcal{P}(f) = \mathcal{P}(g)$, então, para todo $Z \in \mathcal{P}(X)$, temos $f(Z) = g(Z)$ e, em especial, $f(\{z\}) = g(\{z\})$ para todo $z \in X$. Logo, temos $f = g$, e concluímos que Φ_{XY} é injetora.

Para a sobrejetividade, se $g \in \text{Hom}_{\text{Conj}}(\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(Y))$, então basta considerar $f \in \text{Hom}_{\text{Conj}}(X, Y)$ tal que $f(x) = g(\{x\})$, para todo $x \in X$ e temos $\mathcal{P}(f) = g$. Com isso, concluímos também que Φ_{XY} é sobrejetora.

Por fim, notemos que o conjunto vazio $\emptyset \in \text{Obj}(\text{Conj})$ não é isomorfo a nenhum conjunto das partes de outro conjunto, nem ao seu próprio uma vez que $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Portanto, o funtor do Exemplo 2.12 é fiel e pleno, mas não denso.

A definição convencional de equivalência de categorias, como pode ser vista em [Mac88, pg. 93], utiliza uma ferramenta mais abstrata que o escopo deste artigo permite discutir, chamada *transformação natural*. Evitamos tal definição, utilizando uma definição equivalente a original, e indicamos a referência anterior para a demonstração da equivalência entre ambas.

Definição 2.15 (Equivaleência de Categorias). *Dizemos que um funtor $\mathcal{F} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ é uma **equivaleência de categorias** quando é fiel, pleno e denso. Neste caso, diremos que \mathcal{A} e \mathcal{B} são categorias equivalentes.*

3. A EQUIVALÊNCIA ENTRE ESPAÇOS VETORIAIS E MATRIZES

Esta seção será dedicada à demonstração do Teorema 3.3, o qual tem por objetivo interpretar categorialmente os seguintes resultados fundamentais de espaços vetoriais:

Teorema 3.1.

- (i) [CL20, Corolário 3.3.6, pg. 93] *Todo \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão n é isomorfo a \mathbb{K}^n .*
- (ii) [CL20, Exemplo 3.4.1, pg. 94] *Para toda transformação linear $T : V \longrightarrow W$ entre espaços vetoriais de dimensão finita, existe uma matriz A tal que $[T(v)] = A[v]$, sendo $[v] \in \mathbb{K}^{\dim V}$ e $[T(v)] \in \mathbb{K}^{\dim W}$ os vetores coluna em relação às bases de V e W , respectivamente.*

De agora em diante, denotaremos por \mathbb{K}^n o \mathbb{K} -espaço vetorial $M_{n \times 1}(\mathbb{K})$ das matrizes $n \times 1$ com entradas no corpo \mathbb{K} .

Os resultados do Teorema 3.1 fazem parte do escopo de qualquer disciplina de Álgebra Linear em nível de graduação, tendo [Lim20] ou [CL20] como referências. Neste contexto, a interpretação categorial desejada trata de mostrar que as categorias $\text{Vec}_{\mathbb{K}}$ e $\text{Matr}_{\mathbb{K}}$ (Exemplos 2.4 e 2.6, respectivamente) são equivalentes. Para tanto, consideremos a correspondência $\mathcal{F} : \text{Matr}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \text{Vec}_{\mathbb{K}}$, definida da seguinte forma:

- A todo inteiro não negativo $n \in \text{Obj}(\text{Matr}_{\mathbb{K}})$, associamos o \mathbb{K} -espaço vetorial

$$\mathcal{F}(n) = \mathbb{K}^n,$$

onde \mathbb{K}^0 denota o espaço vetorial nulo.

- A todo morfismo $A \in \text{Hom}_{\text{Matr}_{\mathbb{K}}}(m, n)$, associamos a transformação linear

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(A) : \mathbb{K}^m &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ v &\longmapsto \mathcal{F}(A)(v) := Av \end{aligned}$$

sendo que $\mathcal{F}(A)$ é a transformação linear nula quando $mn = 0$.

Lema 3.2. $\mathcal{F} : \text{Matr}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \text{Vec}_{\mathbb{K}}$ é um funtor.

Demonstração. Vejamos que as propriedades (ii.a) e (ii.b) da Definição 2.8 são satisfeitas.

Para (ii.a), notemos que, para todo número natural $n \in \text{Obj}(\text{Matr}_{\mathbb{K}})$, os morfismos identidades $\text{Id}_n \in \text{Hom}_{\text{Matr}_{\mathbb{K}}}(n, n)$ e $\text{Id}_{\mathbb{K}^n} \in \text{Hom}_{\text{Vec}_{\mathbb{K}}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ são a matriz identidade de ordem n e a transformação linear identidade em \mathbb{K}^n , respectivamente. Portanto, $\mathcal{F}(\text{Id}_n) = \text{Id}_{\mathbb{K}^n} = \text{Id}_{\mathcal{F}(n)}$, para todo número inteiro não negativo n .

Para (ii.b), consideremos duas matrizes $A \in \text{Hom}_{\text{Matr}_{\mathbb{K}}}(m, p)$, $B \in \text{Hom}_{\text{Matr}_{\mathbb{K}}}(p, n)$ arbitrárias. Do Exemplo 2.6, temos que a composição em $\text{Matr}_{\mathbb{K}}$ é definida pelo produto matricial, isto é $B \circ A = BA \in \text{Hom}_{\text{Matr}_{\mathbb{K}}}(m, n)$, logo $\mathcal{F}(B \circ A) : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^n$. Por outro lado, a composição das transformações lineares $\mathcal{F}(A) : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^p$ e $\mathcal{F}(B) : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$, é dada por

$$(\mathcal{F}(B) \circ \mathcal{F}(A))(v) = \mathcal{F}(B)(\mathcal{F}(A)(v)) = \mathcal{F}(B)(Av) = B(Av) = (BA)v = \mathcal{F}(BA)(v),$$

para todo $v \in \mathbb{K}^m$. Isto implica que $\mathcal{F}(B \circ A) = \mathcal{F}(B) \circ \mathcal{F}(A)$. \square

O funtor $\mathcal{F} : \text{Matr}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \text{Vec}_{\mathbb{K}}$ vai nos permitir atingir o objetivo desta seção com o teorema a seguir, e para sua demonstração consideraremos a base canônica $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de \mathbb{K}^n , $n > 0$, sendo e_i o vetor de \mathbb{K}^n com i -ésima coordenada igual a 1, e as demais coordenadas iguais a 0.

Teorema 3.3. O funtor $\mathcal{F} : \text{Matr}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \text{Vec}_{\mathbb{K}}$ é uma equivalência de categorias.

Demonstração. Seguindo a Definição 2.13, mostraremos que o funtor é fiel, pleno e denso. A densidade de \mathcal{F} segue do Teorema 3.1 (i), pois qualquer espaço vetorial V de dimensão n é isomorfo à $\mathbb{K}^n = \mathcal{F}(n)$ na categoria $\text{Vec}_{\mathbb{K}}$. Para mostrar que o funtor é fiel e pleno, para $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ quaisquer, consideremos a função

$$\Phi_{mn} : \begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\text{Matr}_{\mathbb{K}}}(m, n) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\text{Vec}_{\mathbb{K}}}(\mathcal{F}(m), \mathcal{F}(n)) \\ A & \longmapsto & \mathcal{F}(A) \end{array}.$$

Mostremos que Φ_{mn} é injetora e sobrejetora. Note que, quando $mn = 0$, tais propriedades seguem da Observação 2.7 e do fato que $\text{Hom}_{\text{Vec}_{\mathbb{K}}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) = 0$. Agora consideremos $mn \neq 0$.

Para mostrar a injetividade, sejam $A, B \in \text{Hom}_{\text{Matr}_{\mathbb{K}}}(m, n)$ duas matrizes tais que $\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(B) : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^n$, ou seja, $Av = Bv$ para todo $v \in \mathbb{K}^m$. Em especial, $Ae_i = Be_i$, para todo elemento da base canônica de \mathbb{K}^m . Desta igualdade, temos que as i -ésimas colunas das matrizes A e B são iguais, e portanto, $A = B$.

A sobrejetividade segue do Teorema 3.1 (ii), pois para toda transformação linear $T \in \text{Hom}_{\text{Vec}_{\mathbb{K}}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, existe uma matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ tal que $[T(v)] = A[v]$, para todo $v \in \mathbb{K}^n$, e como em relação a base canônica tem-se que $[v] = v$ e $[T(v)] = T(v)$, então $T(v) = A[v] = \mathcal{F}(A)(v)$, do qual podemos concluir que $T = \mathcal{F}(A)$. \square

Concluída a equivalência, vejamos que o funtor \mathcal{F} não é um isomorfismo. De fato, suponha que $\mathcal{F} : \text{Matr}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Vec}_{\mathbb{K}}$ seja um isomorfismo. Para todo $n \in \text{Obj}(\text{Matr}_{\mathbb{K}})$, temos associado um espaço vetorial $\mathcal{F}(n) \in \text{Obj}(\text{Vec}_{\mathbb{K}})$. Podemos escolher um \mathbb{K} -espaço vetorial V de mesma dimensão que $\mathcal{F}(n)$, mas diferente deste. Sendo \mathcal{F} isomorfismo, deve existir $m \in \text{Obj}(\text{Matr}_{\mathbb{K}})$ tal que $\mathcal{F}(m) = V$. Segue que $\mathcal{F}(m) \neq \mathcal{F}(n)$ enquanto $n = m$, implicando que \mathcal{F} não está bem definido.

Para finalizar esta seção, dado que os objetos de $\text{Matr}_{\mathbb{K}}$ são os números inteiros não negativos, é natural questionar como o funtor traduz as propriedades aritméticas usuais de $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. A tabela abaixo traz algumas dessas traduções.

Relação de Ordem $n \leq m$	\longleftrightarrow	Existência de uma aplicação injetora $\iota : \mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{K}^m$
Relação de Ordem $n \geq m$	\longleftrightarrow	Existência de uma aplicação sobrejetora $\pi : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow \mathbb{K}^m$
Adição $n + m$	\longleftrightarrow	Soma direta de espaços vetoriais $\mathbb{K}^n \oplus \mathbb{K}^m$
Subtração $n - m$	\longleftrightarrow	Quociente de espaços vetoriais $\mathbb{K}^n / \iota(\mathbb{K}^m)$
Multiplicação $n \cdot m$	\longleftrightarrow	Soma direta de n cópias de \mathbb{K}^m
Divisibilidade $n \div m$	\longleftrightarrow	Número de cópias de \mathbb{K}^m mergulhadas em \mathbb{K}^n

Dados $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, vejamos algumas dessas traduções em detalhes.

Para a relação de ordem usual, considere as respectivas bases canônicas de $\mathcal{F}(n) = \mathbb{K}^n$ e $\mathcal{F}(m) = \mathbb{K}^m$. Note que existe uma aplicação linear injetora $\iota : \mathcal{F}(n) \hookrightarrow \mathcal{F}(m)$ tal que $\iota(e_i) = e_i$ se, e somente se, $n \leq m$. De maneira similar, existe uma aplicação linear sobrejetora $\pi : \mathcal{F}(n) \twoheadrightarrow \mathcal{F}(m)$ com $\pi(e_i) = e_i$ se, e somente se, $n \geq m$.

A adição e a multiplicação seguem do fato que

$$\mathcal{F}(n + m) = \mathbb{K}^{n+m} = \mathbb{K}^n \oplus \mathbb{K}^m = \mathcal{F}(n) \oplus \mathcal{F}(m).$$

Na subtração, se $m \leq n$, existe uma transformação linear injetora $\iota : \mathbb{K}^m \hookrightarrow \mathbb{K}^n$, e de [CL20, Proposição 2.6.6, pg. 72], existe um subespaço vetorial W de \mathbb{K}^n tal que $\iota(\mathbb{K}^m) \oplus W = \mathbb{K}^n$. Portanto, $\dim W = n - m$ e existe uma transformação linear sobrejetora $\pi : \mathbb{K}^n \twoheadrightarrow W$ cujo núcleo é $\iota(\mathbb{K}^m)$. Pelo 1º Teorema do Isomorfismo [GL18, Teorema V.5.6, pg. 164], temos $\mathbb{K}^n / \iota(\mathbb{K}^m) \cong W$. Assim

$$\mathcal{F}(n - m) \cong W \cong \mathbb{K}^n / \iota(\mathbb{K}^m).$$

Em especial, do 1º Teorema do Isomorfismo, dados dois \mathbb{K} -espaços vetoriais V e W , e uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ entre estes, temos que T induz o isomorfismo

$$V / \ker T \cong T(V),$$

enquanto que, pela tradução acima, temos que $\dim V / \ker T = \dim V - \dim \ker T$. Ou seja, obtemos a igualdade

$$\dim V = \dim \ker T + \dim T(V),$$

que nada mais é que o Teorema do Núcleo e Imagem [Lim20, Teorema 6.6, p. 65]. Encorajamos que o leitor reflita sobre quais outros resultados da Álgebra Linear podem ser traduzidos utilizando esta equivalência.

REFERÊNCIAS

- [Bor94] Borceux, F., *Handbook of Categorical Algebra 1. Basic Category Theory*, Cambridge University Press, 1994.
- [CL20] Coelho F. U., Lourenço M. L., *Um Curso de Álgebra Linear*, Edusp, 2ª edição, 2020.
- [EM45] Eilenberg S., Mac Lane S., *General Theory of Natural Equivalences*, Transactions of the American Mathematical Society, Volume 58, nº 2, 1945, 231–94.
- [GL18] Garcia A., Lequain Y., *Elementos de Álgebra*, IMPA, 6ª edição, 2018.
- [LM05] Landry E., Marquis J.P., *Categories in Context: Historical, Foundational, and Philosophical*, Philosophia Mathematica, Volume 13, 1ª Edição, Fevereiro de 2005, 1–43.
- [Lim20] Lima E. L., *Álgebra Linear*, IMPA, 10ª edição, 2020.
- [Mac88] Mac Lane S., *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, 2ª edição, 1988.
- [Rie16] Riehl E., *Category Theory in Context*, Dover Publications, 1ª edição, 2016.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
MANAUS - AM, BRAZIL
69080-900

Email address: gabm@ufam.edu.br, gabm03@gmail.com,
igor.nascimento@ufam.edu.br

**EDO'S LINEARES COMPLEXAS COM COEFICIENTES
CONSTANTES: TEORIA GERAL COM UM MÍNIMO DE
PRÉ-REQUISITOS**

MARCOS FERREIRA DE MELO

RESUMO. Neste artigo, apresentamos a teoria geral de existência e unicidade para Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) lineares com coeficientes complexos constantes, usando apenas um resultado básico sobre derivadas. Ressaltamos a obtenção da solução geral dessas EDO's, sem o uso de técnicas de integração, de séries de potências e do teorema clássico de existência e unicidade.

1. INTRODUÇÃO

Diversos problemas, dos mais variados ramos do conhecimento, têm sido modelados e resolvidos por meio de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) lineares com coeficientes constantes. No sistema massa-mola (veja a figura 1), por exemplo, combinando a lei de Hooke $F(x) = -kx$ com a segunda lei de Newton $F(x) = m \frac{d^2x}{dt^2}$, conclui-se que a equação do movimento para um corpo de massa m , atrelado à mola, na ausência de atrito, é dada por

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0,$$

em que k é a constante da mola.

No caso dos circuitos elétricos RLC (veja a figura 2), as leis de Ohm e de Kirchhoff garantem que

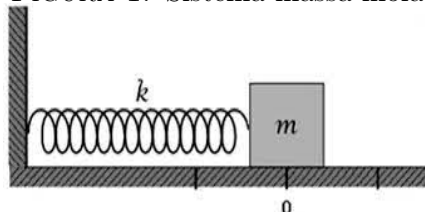
$$(2) \quad L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = \varepsilon$$

sendo L a indutância, R a resistência, C a capacitância, $Q = Q(t)$ a carga e $\varepsilon = \varepsilon(t)$ a tensão distribuída ao circuito por uma fonte em cada instante t . Na ausência de

Data de aceitação: 13 de Setembro de 2025.

Palavras chave. Equações diferenciais ordinárias; Coeficientes complexos constantes; Existência e unicidade.

FIGURA 1. Sistema massa-mola



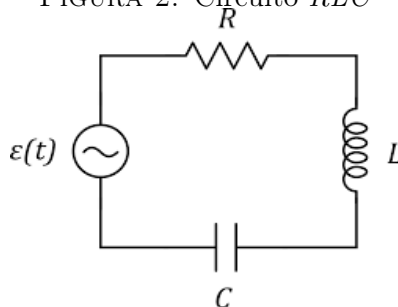
Fonte: <https://docente.ifrn.edu.br/edsonjose/disciplinas/fisica>. Acesso em: 9 de outubro de 2023.

capacitância, tem-se um circuito RL . Nesse caso, a Equação Diferencial Ordinária (EDO) (2) fica reduzida a

$$(3) \quad L \frac{dI}{dt} + RI = \varepsilon,$$

em que $I = \frac{dQ}{dt}$ é a corrente do circuito. De modo semelhante, podem ser destacados os circuitos RC e LC , com as respectivas EDO's

$$(4) \quad R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = \varepsilon \quad \text{e} \quad L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C}Q = \varepsilon.$$

FIGURA 2. Circuito RLC 

Fonte: <https://lemo.paginas.ufsc.br/files/2019/09/roteiro-exp-7.pdf> Acesso em: 09/10/2023.

Diante disso, e de outros tantos exemplos (uma lista bem maior pode ser encontrada em [4]), fica evidente o interesse pela obtenção de soluções para EDO's da forma

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} + a_0y = \varphi(x),$$

ou do tipo

$$(6) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0y = \varphi(x),$$

ou, mais geralmente, da forma

$$(7) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = \varphi(x),$$

em que $n \geq 1$ é um inteiro, a_0, a_1, \dots, a_{n-1} são constantes reais e $\varphi = \varphi(x)$ é uma função real dada.

No presente trabalho, usando apenas o fato de que uma função derivável num aberto conexo é constante se, e somente se, tem derivada nula, mostramos como obter a solução geral da EDO no plano complexo

$$(8) \quad \frac{d^n w}{dz^n} + \alpha_{n-1} \frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + \dots + \alpha_1 \frac{dw}{dz} + \alpha_0 w = \varphi(z),$$

em que $n \geq 1$ é um inteiro, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ são constantes complexas e $\varphi = \varphi(z)$ é uma função de uma variável complexa. Com isso, apresentamos como resolver as EDO's (7) e (8) sem fazer uso de técnicas de integração (como em [2] e [3]), de séries de potências (como em [1]) ou do teorema clássico de existência e unicidade (como em [5]).

2. EDO'S LINEARES COMPLEXAS COM COEFICIENTES CONSTANTES

Uma equação diferencial linear complexa com coeficientes constantes e ordem n é uma EDO do tipo (8).

Resolver a EDO (8) num domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$ é determinar uma função holomorfa¹ $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$f^{(n)}(z) + \alpha_{n-1} f^{(n-1)}(z) + \dots + \alpha_1 f'(z) + \alpha_0 f(z) = \varphi(z),$$

para todo $z \in \Omega$. No caso de ser possível destacar duas soluções f_1 e f_2 para a EDO (8), verifica-se facilmente que a função $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$ é uma solução da equação

$$(9) \quad \frac{d^n w}{dz^n} + \alpha_{n-1} \frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + \dots + \alpha_1 \frac{dw}{dz} + \alpha_0 w = 0,$$

que é a denominada EDO homogênea associada. Isto significa que se $f_p(z)$ é uma solução particular de (8) e \mathcal{H}_n é o conjunto de todas as soluções de (9), então $\mathcal{H}_n + f_p = \{f_h + f_p; f_h \in \mathcal{H}_n\}$ é o conjunto solução de (8).

Dessa forma, a resolução da EDO (8) fica reduzida à da EDO homogênea associada (9), uma vez fixada uma solução particular de (8).

3. EDOs LINEARES HOMOGÊNEAS COMPLEXAS COM COEFICIENTES CONSTANTES

Conforme discutido na seção anterior, concentramo-nos na resolução das EDO's complexas do tipo (9), destacando os seguintes fatos, com ênfase no último listado:

- sempre existem funções inteiras² $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que são soluções dessas equações diferenciais;
- essas soluções estão bem determinadas, ou seja, elas podem ser apresentadas em termos de uma solução geral;

¹Uma função de variável complexa é dita holomorfa num domínio quando é derivável em todos os pontos desse domínio.

²Uma função inteira é uma função definida e holomorfa no domínio \mathbb{C} .

- a solução geral de cada uma dessas EDO's pode ser obtida com um mínimo de pré-requisitos de cálculo diferencial.

3.1. Existência de Soluções. Mostrar que a EDO (9) sempre possui uma solução inteira é simples, visto que a função exponencial complexa $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $f(z) = e^{\lambda z}$, estando $\lambda \in \mathbb{C}$ fixado a priori, resolve a EDO se, e somente se, λ é uma raiz da equação polinomial

$$(10) \quad z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \dots + \alpha_1z + \alpha_0 = 0,$$

denominada *equação característica associada* à EDO. Em particular, se os números $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ são as raízes de (10), então a função inteira $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$(11) \quad F(z) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k z}$$

é solução da EDO (9), sejam quais forem os números complexos previamente fixados c_1, c_2, \dots, c_n .

No caso de as raízes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ serem todas distintas, questiona-se, naturalmente, se todas as soluções da EDO são da forma (11) ou, em outras palavras, se essa é a solução geral de (9). Por outro lado, quando há repetições entre as raízes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ e o somatório em (11) fica reduzido em parcelas após alguns termos serem colocados em evidência, o questionamento passa a se concentrar em como seria a solução geral para a EDO (9), levando-se em conta as multiplicidades de tais raízes.

3.2. Solução Geral e Unicidade de Soluções. Para obter a solução geral da EDO linear homogênea complexa com coeficientes constantes de ordem n , apresentada na forma geral em (9), consideramos, separadamente, os valores do inteiro $n \geq 1$, que é justamente o grau da equação polinomial (10) cujas raízes estão associadas a soluções da EDO.

3.2.1. EDOs homogêneas de primeira ordem. No caso em que $n = 1$, a EDO (9) é dada por

$$(12) \quad \frac{dw}{dz} + \alpha_0 w = 0$$

e sua equação característica associada é

$$(13) \quad z + \alpha_0 = 0,$$

cujas raiz é $\lambda_1 = -\alpha_0$. Nesse caso, se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma solução de (12), ou seja, se ocorre a identidade $f'(z) = \lambda_1 f(z)$, então a função inteira $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(z) = e^{-\lambda_1 z} f(z)$ é tal que

$$g'(z) = \frac{d}{dz} [e^{-\lambda_1 z} f(z)] = -\lambda_1 e^{-\lambda_1 z} f(z) + e^{-\lambda_1 z} f'(z) = e^{-\lambda_1 z} [-\lambda_1 f(z) + \lambda_1 f(z)] = 0,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, ou seja, g é constante. Assim, existe um número $c_1 \in \mathbb{C}$ tal que

$$(14) \quad f(z) = c_1 e^{\lambda_1 z},$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, o que nos permite concluir que (14) é a solução geral da EDO (12). Em particular, fixado $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}^2$, existe uma única solução inteira para o problema de valor inicial (PVI)

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{dw}{dz} = \lambda_1 w \\ w(z_0) = w_0, \end{cases}$$

a saber, $w(z) = w_0 e^{\lambda_1(z-z_0)}$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Com efeito, para a obtenção desta solução do PVI (15), parte-se da expressão da solução geral $w(z) = c_1 e^{\lambda_1 z}$ e, a partir do uso da condição inicial $w_0 = w(z_0) = c_1 e^{\lambda_1 z_0}$, determina-se a constante $c_1 = e^{-\lambda_1 z_0}$, resultando em

$$w(z) = e^{-\lambda_1 z_0} e^{\lambda_1 z} = e^{\lambda_1(z-z_0)}.$$

3.2.2. EDO's homogêneas de segunda ordem. No caso em que $n = 2$, a EDO (9) é dada por

$$(16) \quad \frac{d^2 w}{dz^2} + \alpha_1 \frac{dw}{dz} + \alpha_0 w = 0$$

e sua equação característica associada,

$$(17) \quad z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0,$$

tem duas raízes complexas λ_1 e λ_2 , iguais ou distintas. Considerando, inicialmente, o caso em que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, temos o seguinte resultado:

Teorema 1. *Se λ_1 e λ_2 são as raízes distintas da equação característica (17) e $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma solução inteira da EDO (16), então existem constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ de modo que*

$$(18) \quad f(z) = c_1 e^{\lambda_1 z} + c_2 e^{\lambda_2 z},$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Primeiramente, observemos que é constante³ a função inteira $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$(19) \quad g(z) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_1 z} [f'(z) - \lambda_2 f(z)].$$

Com efeito, usando as condições

$$z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0 = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)$$

e

$$f''(z) = -\alpha_1 f'(z) - \alpha_0 f(z),$$

³Veja na observação 1 a seguir uma motivação para a definição das funções g e h que aparecem nesta demonstração.

válidas para todo $z \in \mathbb{C}$, obtemos

$$\begin{aligned} g'(z) &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \{ -\lambda_1 e^{-\lambda_1 z} [f'(z) - \lambda_2 f(z)] + e^{-\lambda_1 z} [f''(z) - \lambda_2 f'(z)] \} \\ &= \frac{e^{-\lambda_1 z}}{\lambda_1 - \lambda_2} [(\lambda_1 \lambda_2 - \alpha_0) f(z) - (\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha_1) f'(z)] \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Este resultado mostra que a expressão em (19) é uma constante. A partir de agora iremos denotá-la por $c_1 \in \mathbb{C}$.

Por fim, mostremos que também é constante a função inteira $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por (20)

$$h(z) = e^{-\lambda_2 z} [f(z) - c_1 e^{\lambda_1 z}].$$

De fato, usando a identidade $c_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_1 z} [f'(z) - \lambda_2 f(z)]$, vemos que

$$\begin{aligned} h'(z) &= -\lambda_2 e^{-\lambda_2 z} [f(z) - c_1 e^{\lambda_1 z}] + e^{-\lambda_2 z} [f'(z) - c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 z}] \\ &= e^{-\lambda_2 z} [f'(z) - \lambda_2 f(z)] - c_1 (\lambda_1 - \lambda_2) e^{(\lambda_1 - \lambda_2) z} \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Isto mostra que a expressão em (20) é uma constante que, quando denotada por $c_2 \in \mathbb{C}$, resulta na identidade (18), para todo $z \in \mathbb{C}$. \square

Observação 1. *Visto que se deseja provar a existência de constantes c_1 e c_2 tais que seja válida a identidade $f(z) = c_1 e^{\lambda_1 z} + c_2 e^{\lambda_2 z}$ que, por sua vez, implica em $f'(z) = c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 z} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 z}$, nota-se que $f'(z) - \lambda_2 f(z) = c_1 (\lambda_1 - \lambda_2) e^{\lambda_1 z}$, ou seja, deve-se ter*

$$c_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_1 z} [f'(z) - \lambda_2 f(z)].$$

Isto motiva a introdução da função g na demonstração acima.

Tendo sido determinada a constante c_1 na identidade pretendida $f(z) = c_1 e^{\lambda_1 z} + c_2 e^{\lambda_2 z}$, a condição

$$c_2 = e^{-\lambda_2 z} [f(z) - c_1 e^{\lambda_1 z}]$$

motiva a definição da função h na referida demonstração.

Nas demonstrações a seguir, usam-se motivações análogas para a obtenção das respectivas constantes.

Considerando agora o caso em que a equação (17) admite uma raiz dupla, o resultado correspondente ao anterior é o seguinte:

Teorema 2. *Se λ é raiz dupla da equação característica (17) e $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma solução inteira da EDO (16), então existem constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ de modo que*

$$(21) \quad f(z) = (c_1 z + c_2) e^{\lambda z},$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Primeiramente, observemos que é constante a função inteira $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$(22) \quad g(z) = e^{-\lambda z} [f'(z) - \lambda f(z)].$$

Com efeito, usando as condições

$$z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0 = (z - \lambda)^2$$

e

$$f''(z) = -\alpha_1 f'(z) - \alpha_0 f(z),$$

válidas para todo $z \in \mathbb{C}$, obtemos

$$\begin{aligned} g'(z) &= -\lambda e^{-\lambda z} [f'(z) - \lambda f(z)] + e^{-\lambda z} [f''(z) - \lambda f'(z)] \\ &= e^{-\lambda z} [(\lambda^2 - \alpha_0)f(z) - (2\lambda - \alpha_1)f'(z)] \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Este resultado mostra que a expressão em (22) é uma constante. A partir de agora iremos denotá-la por $c_1 \in \mathbb{C}$.

Por fim, mostremos que também é constante a função inteira $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$(23) \quad h(z) = e^{-\lambda z} [f(z) - c_1 z e^{\lambda z}].$$

De fato, usando a identidade $c_1 = e^{-\lambda z} [f'(z) - \lambda f(z)]$, vemos que

$$\begin{aligned} h'(z) &= -\lambda e^{-\lambda z} [f(z) - c_1 z e^{\lambda z}] + e^{-\lambda z} [f'(z) - c_1 e^{\lambda z} - c_1 \lambda z e^{\lambda z}] \\ &= e^{-\lambda z} [f'(z) - \lambda f(z)] - c_1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Isto mostra que a expressão em (23) é uma constante que, quando denotada por $c_2 \in \mathbb{C}$, resulta na identidade (21), para todo $z \in \mathbb{C}$. \square

Fazendo uso dos dois teoremas acima, concluímos o seguinte resultado.

Corolário 1. Fixados $(z_0, w_0), (z'_0, w'_0) \in \mathbb{C}^2$, existe uma única solução inteira para o PVI

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{d^2 w}{dz^2} + \alpha_1 \frac{dw}{dz} + \alpha_0 w = 0 \\ w(z_0) = w_0 \\ \frac{dw}{dz}(z'_0) = w'_0. \end{cases}$$

3.2.3. EDO's homogêneas de terceira ordem. No caso em que $n = 3$, a EDO (9) é dada por

$$(25) \quad \frac{d^3 w}{dz^3} + \alpha_2 \frac{d^2 w}{dz^2} + \alpha_1 \frac{dw}{dz} + \alpha_0 w = 0$$

e sua equação característica associada,

$$(26) \quad z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0,$$

tem três raízes complexas λ_1 , λ_2 e λ_3 , que podem ser todas distintas, todas iguais ou tais que há duas distintas. Considerando, inicialmente, o caso em que $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$, temos o seguinte resultado:

Teorema 3. *Se λ_1 , λ_2 e λ_3 são as raízes distintas da equação característica (26) e $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma solução inteira da EDO (25), então existem constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ de modo que*

$$(27) \quad f(z) = c_1 e^{\lambda_1 z} + c_2 e^{\lambda_2 z} + c_3 e^{\lambda_3 z},$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Usando as identidades

$$z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0 = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)(z - \lambda_3)$$

e

$$f'''(z) + \alpha_2 f''(z) + \alpha_1 f'(z) + \alpha_0 f(z) = 0,$$

observamos que

$$\left(\frac{d}{dz} - \lambda_1 \right) [f''(z) - (\lambda_2 - \lambda_3)f'(z) + \lambda_2 \lambda_3 f(z)] = 0,$$

ou seja, $f''(z) - (\lambda_2 - \lambda_3)f'(z) + \lambda_2 \lambda_3 f(z)$ resolve a EDO de primeira ordem $\frac{dw}{dz} = \lambda_1 w$ e, conseqüentemente, existe uma constante $\tilde{c}_1 \in \mathbb{C}$ tal que

$$(28) \quad f''(z) - (\lambda_2 - \lambda_3)f'(z) + \lambda_2 \lambda_3 f(z) = \tilde{c}_1 e^{\lambda_1 z},$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Visto que a equação (28) é uma EDO linear não homogênea de segunda ordem, segue-se que $f(z) = f_h(z) + f_p(z)$, em que $f_h(z)$ é uma solução da EDO homogênea associada, cuja equação característica é $(z - \lambda_2)(z - \lambda_3) = 0$, e $f_p(z)$ é uma solução particular de (28). Isso significa que existem constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ de modo que $f_p(z) = c_1 e^{\lambda_1 z}$ e $f_h(z) = c_2 e^{\lambda_2 z} + c_3 e^{\lambda_3 z}$, ou seja, vale a identidade (27). \square

Considerando agora o caso em que a equação (26) admite uma raiz com multiplicidade dois, estabelecemos o seguinte:

Teorema 4. *Se λ_1 , λ_2 e λ_3 são as raízes distintas da equação característica (26), com $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$, e $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma solução inteira da EDO (25), então existem constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ de modo que*

$$(29) \quad f(z) = c_1 e^{\lambda_1 z} + (c_2 z + c_3) e^{\lambda_2 z},$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Usando as identidades

$$z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0 = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)^2$$

e

$$f'''(z) + \alpha_2 f''(z) + \alpha_1 f'(z) + \alpha_0 f(z) = 0,$$

observamos que

$$\left(\frac{d}{dz} - \lambda_1\right) [f''(z) - 2\lambda_2 f'(z) + \lambda_2^2 f(z)] = 0,$$

ou seja, $f''(z) - 2\lambda_2 f'(z) + \lambda_2^2 f(z)$ resolve a EDO de primeira ordem $\frac{dw}{dz} = \lambda_1 w$ e, conseqüentemente, existe uma constante $\tilde{c}_1 \in \mathbb{C}$ tal que

$$(30) \quad f''(z) - 2\lambda_2 f'(z) + \lambda_2^2 f(z) = \tilde{c}_1 e^{\lambda_1 z},$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Visto que a equação (30) é uma EDO linear não homogênea de segunda ordem, segue-se que $f(z) = f_h(z) + f_p(z)$, em que $f_h(z)$ é uma solução da EDO homogênea associada, cuja equação característica é $(z - \lambda_2)^2 = 0$, e $f_p(z)$ é uma solução particular de (30). Isto significa que existem constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ de modo que $f_p(z) = c_1 e^{\lambda_1 z}$ e $f_h(z) = (c_2 z + c_3) e^{\lambda_2 z}$, ou seja, vale a identidade (29). \square

Considerando, finalmente, o caso em que a equação (26) admite uma raiz com multiplicidade três, temos o seguinte resultado:

Teorema 5. *Se λ é raiz tripla da equação característica (26) e $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma solução inteira da EDO (25), então existem constantes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ de modo que*

$$(31) \quad f(z) = (c_1 z^2 + c_2 z + c_3) e^{\lambda z},$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Inicialmente, observemos que é constante a função inteira $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$(32) \quad g(z) = \frac{1}{2} e^{-\lambda z} [f''(z) - 2\lambda f'(z) + \lambda^2 f(z)].$$

Com efeito, usando as condições $z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0 = (z - \lambda)^3$ e $f'''(z) = -\alpha_2 f''(z) - \alpha_1 f'(z) - \alpha_0 f(z)$, válidas para todo $z \in \mathbb{C}$, obtemos

$$\begin{aligned} g'(z) &= -\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda z} [f''(z) - 2\lambda f'(z) + \lambda^2 f(z)] + \frac{1}{2} e^{-\lambda z} [f'''(z) - 2\lambda f''(z) + \lambda^2 f'(z)] \\ &= \frac{1}{2} e^{-\lambda z} [-(\lambda^3 + \alpha_0) f(z) + (3\lambda^2 - \alpha_1) f'(z) + (-3\lambda - \alpha_2) f''(z)] \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Este resultado mostra que a expressão em (32) é uma constante. Se denotarmos tal constante por $c_1 \in \mathbb{C}$, veremos que a função f é solução da EDO linear não homogênea de segunda ordem $\frac{d^2 w}{dz^2} - 2\lambda \frac{dw}{dz} + \lambda^2 w = 2c_1 e^{\lambda z}$. Visto que $f_p(z) = c_1 z^2 e^{\lambda z}$ é uma solução particular dessa EDO, segue-se que $f(z) - f_p(z)$ é solução da EDO homogênea associada e, conseqüentemente, existem constantes $c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ de modo que $f(z) - f_p(z) = (c_2 z + c_3) e^{\lambda z}$. Isto conclui a demonstração. \square

Fazendo uso dos três últimos teoremas acima, concluímos o seguinte resultado.

Corolário 2. Fixados $(z_0, w_0), (z'_0, w'_0), (z''_0, w''_0) \in \mathbb{C}^2$, existe uma única solução inteira para o PVI

$$(33) \quad \begin{cases} \frac{d^3 w}{dz^3} + \alpha_2 \frac{d^2 w}{dz^2} + \alpha_1 \frac{dw}{dz} + \alpha_0 w = 0 \\ w(z_0) = w_0 \\ \frac{dw}{dz}(z'_0) = w'_0 \\ \frac{d^2 w}{dz^2}(z''_0) = w''_0. \end{cases}$$

3.2.4. EDO's homogêneas de ordem quatro ou superior. No caso em que $n \geq 4$, a solução geral da EDO (9) é obtida de forma análoga ao que fizemos com $n \leq 3$, através do uso de indução matemática, por exemplo. Dessa forma, podemos afirmar que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são as raízes da equação característica (10), então a solução geral de (9) é:

- $f(z) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k z}$, sendo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dois a dois distintos;
- $f(z) = (c_1 z + c_2) e^{\lambda_1 z} + \sum_{k=3}^n c_k e^{\lambda_k z}$, sendo $\lambda_1 = \lambda_2$ a única raiz dupla de (10);
- $f(z) = (c_1 z^2 + c_2 z + c_3) e^{\lambda_1 z} + \sum_{k=4}^n c_k e^{\lambda_k z}$, sendo $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ a única raiz tripla de (10);
- $f(z) = \sum_{k=1}^j p_k(z) e^{\lambda_k z}$, sendo $\lambda_1, \dots, \lambda_j$ as raízes distintas de (10), com λ_k de multiplicidade m_k e $p_k(z) \in \mathbb{C}[z]$ um polinômio de grau $m_k - 1$, para cada $k \in \{1, \dots, j\}$, e $m_1 + \dots + m_j = n$.

4. EDO'S LINEARES HOMOGÊNEAS REAIS COM COEFICIENTES CONSTANTES

Consideremos, agora, a EDO da forma

$$(34) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + \alpha_0 y = 0,$$

em que $n \geq 1$ é um inteiro e a_0, a_2, \dots, a_n são constantes reais. Quando as raízes da equação característica associada,

$$(35) \quad x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

são todas reais, a solução geral de (34) é análoga à das EDO's complexas (9). No entanto, quando a equação (35) possui raízes complexas, temos duas opções a considerar:

- Para cada par de raízes complexas $a \pm bi$, usamos a exponencial complexa

$$e^{(a \pm ib)x} = e^{ax} (\cos bx \pm i \sin bx)$$

para obter um par de soluções reais

$$e^{ax} \cos bx = \frac{e^{ax}}{2} (e^{ibx} + e^{-ibx}) \quad \text{e} \quad e^{ax} \sin bx = \frac{e^{ax}}{2i} (e^{ibx} - e^{-ibx})$$

que geram a solução geral da EDO;

- Ao invés de usar a exponencial complexa, verificamos que as funções reais $e^{ax} \cos bx$ e $e^{ax} \sin bx$ geram a solução geral da EDO.

Destacamos o seguinte resultado:

Teorema 6. Se $\lambda = a + bi$ e $\bar{\lambda} = a - bi$, com $b \neq 0$, são as raízes da equação característica

$$(36) \quad x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é solução da EDO

$$(37) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_0y = 0,$$

então existem constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ de modo que

$$(38) \quad f(x) = e^{ax} (c_1 \cos bx + c_2 \sin bx),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Inicialmente, usando as identidades

$$x^2 + a_1x + a_0 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$$

e

$$f''(x) = -a_1f'(x) - a_0f(x),$$

válidas para todo $x \in \mathbb{R}$, observemos que é constante a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(39) \quad g(x) = \frac{1}{b}e^{-ax} [f(x)(a \sin bx + b \cos bx) - f'(x) \sin bx].$$

Com efeito, temos que

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{a}{b}e^{-ax} [f(x)(a \sin bx + b \cos bx) - f'(x) \sin bx] \\ &\quad + \frac{1}{b}e^{-ax} [f'(x)(a \sin bx + b \cos bx) + f(x)(ab \cos bx - b^2 \sin bx)] \\ &\quad - \frac{1}{b}e^{-ax} [f''(x) \sin bx + bf'(x) \cos bx] \\ &= \frac{1}{b}e^{-ax} \sin bx [(a_0 - a^2 - b^2)f(x) + (2a + a_1)f'(x)] \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Este resultado mostra que a expressão em (39) é uma constante. A partir de agora iremos denotá-la por $c_1 \in \mathbb{R}$.

Por fim, mostremos que é constante a função $h : (0, \pi/|b|) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(40) \quad h(x) = \frac{e^{-ax} f(x) - c_1 \cos bx}{\sin bx}.$$

Com efeito, usando a identidade $bc_1e^{ax} = f(x)(a \sin bx + b \cos bx) - f'(x) \sin bx$, temos que

$$h'(x) = \frac{e^{-ax} [-f(x)(a \sin bx + b \cos bx) + f'(x) \sin bx + e^{ax}bc_1]}{\sin^2 bx} = 0,$$

para todo $x \in (0, \pi/|b|)$. Isso mostra que a expressão em (40) é uma constante que, quando denotada por $c_2 \in \mathbb{R}$, resulta na identidade (38) no intervalo $(0, \pi/|b|)$.

Visto que as constantes $c_1 = f(0)$ e $c_2 = \frac{1}{b} [f'(0) - af(0)]$ estão determinadas e, pela periodicidade das funções seno e cosseno, o argumento acima garante que a identidade (38) vale em $\mathbb{R} - \{k\pi/b; k \in \mathbb{Z}\}$, concluímos, por continuidade, que a identidade (38) vale para todo $x \in \mathbb{R}$. \square

Observação 2. *A demonstração acima mostra que é possível chegar à solução geral da EDO (37) sem fazer uso de números complexos, embora a resolução no contexto das EDO's complexas seja bem mais simples. Dessa forma, fica evidente a resolução da EDO (34), mesmo na presença de raízes complexas da equação característica (35), com as suas possíveis multiplicidades, fazendo uso ou não das EDO's complexas.*

Observação 3. *No contexto da Álgebra Linear, concluímos que, fixados um inteiro $n \geq 1$ e números $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1} \in \mathbb{K}$, com $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, o conjunto $\mathcal{H}_n(\mathbb{K}) = \{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}; f^{(n)} + \varepsilon_{n-1}f^{(n-1)} + \dots + \varepsilon_1f' + \varepsilon_0f = 0\}$ é um \mathbb{K} -espaço vetorial n -dimensional, visto que as soluções gerais obtidas sempre apontam para um conjunto de geradores de $\mathcal{H}_n(\mathbb{K})$ com exatamente n elementos, obviamente linearmente independentes.*

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho, mostramos como resolver uma EDO linear homogênea com coeficientes reais ou complexos constantes sem fazer uso de técnicas de integração (como em [2] ou [3]), de séries de potências (como em [1]) ou do teorema clássico de existência e unicidade (como em [5]). Demonstramos como obter a solução geral de uma EDO linear com coeficientes constantes, utilizando apenas o fato de que uma função derivável num aberto conexo é constante se, e somente se, sua derivada é nula.

A abordagem sugerida traz contribuições que podem enriquecer a metodologia de ensino de professores que atuam nos cursos básicos de Cálculo, Equações Diferenciais e Variável Complexa. Antes de estudar integração de Riemann e séries de potências, os professores de Cálculo poderão apresentar a seus alunos a teoria geral de EDO's lineares com coeficientes constantes. Antes de apresentar o famoso teorema de Picard sobre existência e unicidade, os docentes de Equações Diferenciais poderão resolver completamente as referidas EDO's. Por fim, logo após introduzir o conceito de diferenciabilidade de funções de uma variável complexa, os professores de Variável Complexa poderão estudar essa teoria geral de EDO's no plano complexo. Nosso trabalho, portanto, apresentou uma forma de desenvolver a teoria geral de EDO's lineares com coeficientes constantes com um mínimo de pré-requisitos.

AGRADECIMENTOS

O autor agradece ao professor Antonio Caminha Muniz Neto, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, pelas diversas sugestões dadas durante a elaboração deste artigo.

REFERÊNCIAS

- [1] Apostol, Tom M. *Cálculo I*. REVERTÉ, 1979. 792 p. ISBN 8429150153.
- [2] Guidorizzi, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo - Vol. 2*. LTC, 2001. 496 p. ISBN 852161280X.
- [3] Neto, Antonio Caminha Muniz. *Fundamentos de Cálculo*. SBM, 2022. 577 p. ISBN 9788583371717.
- [4] Simmons, J. *Differential Equations with Applications and Historical Notes*. Chapman and Hall/CRC, 2017. 764 p. ISBN 9781498702591.
- [5] Sotomayor, Jorge. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. IMPA, 1979. 331 p. ISBN 85-244-0159-1.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
AVENIDA HUMBERTO MONTE, S/N, BLOCO 914
FORTALEZA, CE
60455-760
Email address: mcosmelo@mat.ufc.br