ARTIGOS

EVOLUÇÃO DOS CONCEITOS DE FUNÇÃO E DE INTEGRAL

Geraldo Ávila

1. Introdução

Muita gente tem a impressão de que a Matemática é estática; de que os conceitos, uma vez formulados, se cristalizam como coisas completes e acabadas, que permanecem então imutáveis; de que os resultados, uma vez obtidos, se somam uns aos outros na acumulação de um corpo de conhecimento que não tem outra dinâmica interna que a do crescimento por adição de unidades novas.

A realidade, entretanto, é bem outra. Tanto ao matemático engajado numa área de pesquisas e que está a par dos problemas e das descobertas mais recentes em seu campo de trabalho, quanto ao estudioso que analisa a evolução histórica da Matemática, a eles é dado observar a vigorosa dinâmica do progresso, os erros e acertos nos processos de descoberta, a interdependência dos resultados que vão surgindo, tornando impossível mesmo divisar fronteiras definidas de separação entre as várias disciplinas matemáticas. No mais das vezes os conceitos se formam e evoluem de maneira lenta e gradual, num processo que se subordina às necessidades do corpo científico em suas várias etapas de desenvolvimento.

Os conceitos de função e de integral exemplificam muito bem o que vimos dizendo. E um acompanhamento de seu desenvolvimento por cêrca de século e meio, como nos propomos fazer aqui, expõe, com muita clareza, a dinâmica e a vitalidade da evolução da Análise Matemática nesse período.

2. O Teorema Fundamental

A noção de integral de uma função como área foi introduzida no século XVII. O Teorema Fundamental do Cálculo, que relaciona a integral com a derivada, foi um resultado decisivo para que os métodos infinitesimais que então surgiam pudessem se organizar em disciplina autônoma — o Cálculo Diferential e Integral.

Numa de suas versões o Teorema Fundamental afirma que

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

é uma primitiva de f, isto é, $F'(x) = f(x)$. Outra versão equivalente desse teorema afirma que se G é uma primitiva qualquer da função f, então

$$G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)dt;$$

ou ainda, como $f(x) = G'(x)$,

$$G(b) - G(a) = \int_a^b G'(t)dt. \tag{1}$$

Evidentemente, tudo isso é válido no pressuposto de que $f(x)$ e $G'(x)$ sejam funções contínuas no intervalo $[a, b]$. Mas, no século XVII, quando o Cálculo ainda se encontrava em estágio embrionário, não havia uma preocupação explícita com a noção de continuidade, mesmo porque o conceito de função era também muito restrito. Por função se entendia uma correspondência entre variáveis, sempre dada por fórmulas ou expressões analíticas, como

$$y = 3x^2 - 7x + 1, \qquad y = x\sqrt{x^2 + 1}, \quad \text{etc.}$$

E a noção de continuidade só começaria a aparecer no século XVIII.

3. O Cálculo no Século XVIII

Leonhard Euler (1707-1783) é a grande figura da Matemática e da Física Teórica em sua época. Em meados do século ele publicou livros que estabeleceram padrões definitivos no Cálculo e exerceram profunda influência por seguramente um século. No segundo volume de uma dessas obras — "Introduction in Analysin Infinitorum", de 1848 — ele distingue entre funções contínuas e descontínuas. Por contínua ele entende uma função dada por uma única expressão analítica, como

$$y = \operatorname{sen} x, \qquad y = x^2 + 1 \quad \text{ou} \quad y = \log x.$$

E descontínua é a função dada por várias expressões analíticas, porém cujo gráfico é uma curva única, sem interrupções. Um exemplo é a função definida por

$$y = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \leq 1 \end{cases}$$

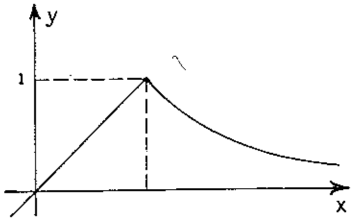

Fig. 1

cujo gráfico está ilustrado na Fig. 1. Segundo Euler, esta função tem uma descontinuidade em $x = 1$. Como se vê, isto não corresponde ao que hoje entendemos por descontinuidade.

Todas as idéias do Cálculo, envolvendo função, integral, derivada, continuidade, séries, convergência, etc., foram se desenvolvendo gradativamente, à medida que o Cálculo e outras disciplinas da Análise ganhavam corpo. Bastante intenso durante todo o século XVIII, esse desenvolvimento se traduziu na descoberta e sistematização de novos métodos e técnicas, alargando consideravelmente as fronteiras desses vários domínios científicos. Mas, nesse mesmo período, nada de significativo ocorreu na área de fundamentos, uma tarefa que estava reservada ao século XIX.

Aquele conceito de integral do século XVII, embora ainda vago e carente de uma fundamentação satisfatória, serviu muito bem a todo o desenvolvimento de que falamos acima, passando por uma primeira revisão somente em 1821 por obra de Augustin Louis Cauchy (1789-1857). Mas, para que possamos bem entender toda a evolução do conceito, devemos primeiro introduzir um dos problemas que se revelou o mais fértil em todo o desenvolvimento da Análise no século XIX e que consiste em expressar uma dada função em série de senos e co-senos.

4. A Corda Vibrante

O problema surgiu em meados do século XVIII, em conexão com o estudo das vibrações transversais de uma corda flexível e esticada, como uma corda de violino. Supondo que a corda coincida com o eixo dos x em sua posição de repouso, seja $u = u(x, t)$ o desvio de seu ponto de abcissa x no instante t (Fig. 2). Então a função $u(x, t)$ satisfaz a equação diferencial parcial

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, \qquad (2)$$

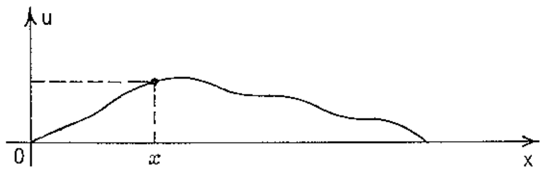

Fig. 2

onde $c = \sqrt{T/\rho}$, T é a tensão na corda e ρ é a densidade linear de massa (veja [5], pág. 130 ou [15], pág. 4).

O primeiro estudo significativo sobre o fenômeno das vibrações de uma corda é devido a Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) que publicou, em 1747, um trabalho brilhante sobre o assunto. Ele obteve, em particular, a solução geral da equação (2) na forma

$$u = f(x + ct) + g(x - ct),$$

onde f e g são funções arbitrárias (veja [15], pág. 8). Imediatamente a seguir, Euler também se interessou pelo problema, publicando sua própria versão. Seguiu-se, então, entre os dois eminentes matemáticos, uma polêmica sobre o tipo de funções que podiam ser admitidas para o perfil inicial da corda (veja [10], cap. 1, sobretudo págs. 4 e 5). D'Alembert insistia em que tais funções só podiam ser aquelas dadas por uma única expressão analítica, como os polinômios, as funções trigonométricas, a função exponencial, a função logarítmica, etc. Isto decorria da maneira de ver a derivada e a integral como operadores que transformavam as funções (expressões analíticas) umas nas outras segundo um formalismo algébrico bem determinado. Como consequência, era preciso restringir as funções para que os operadores pudessem sempre ser aplicados (veja [10], pág. 5).

Para Euler não havia por que ser tão restritivo. Ele insistia em admitir funções mais gerais, cujos gráficos podiam até possuir pontos angulosos (como no exemplo da Fig. 1). Este ponto de vista representava uma visão mais geométrica e, segundo ele, mais apro priada ao problema físico. Ainda segundo Euler, a inclusão dessas funções mais gerais trazia a vantagem de abrir novos horizontes à Análise (veja [10], pág. 6).

Antes de fazermos maiores comentários sobre essa polêmica, devemos introduzir em cena um outro personagem, que trazia também uma nova maneira de ver a solução do problema da corda vibrante.

A eq. (2) tem solução

$$u = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell} \cdot \cos \frac{n\pi c t}{\ell}, \tag{3}$$

onde n é um inteiro qualquer (basta considerar n positivo, já que n negativo implica apenas uma troca de sinal na função). O gráfico dessa solução, para cada t fixo, é uma senóide de período $\lambda_n = 2\ell/n$ (comprimento de onda). Em particular, quando $t = 0$, obtemos, como perfil inicial da corda, o gráfico de $y = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell}$. Por outro lado, para cada x fixo, o período de u como função de t é $T_n = 2\ell/nc$ e a frequência correspondente (número de "ciclos" por unidade de tempo no ponto x) é $\nu_n = nc/2\ell$.

Em 1753 Daniel Bernoulli (1700-1782) interpretou o movimento da corda vibrante como superposição de vibrações harmônicas do tipo (3). Adotando um ponto de vista bastante físico, ele observou que a corda pode vibrar de uma infinidade de maneiras diferentes, e qualquer vibração seria uma superposição apropriada dessa infinidade de vibrações do tipo (3), cada uma com uma frequência particular ν_n, que é um múltiplo inteiro n da frequência fundamental $\nu_1 = c/2\ell$. Dessa maneira, Bernoulli admite, como soluções de (2), séries infinitas da forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi c t}{\ell}. \tag{4}$$

Mais do que isso, ele afirma que essa série representa a expressão mais geral do movimento da corda (com extremos fixos, satisfazendo a condição inicial $u_t(x, 0) = 0$). Isso equivalia a afirmar que, dado o perfil inicial $f(x) = u(x, 0)$, seria possível determinar os coeficientes a_n de maneira que, fazendo $t = 0$ em (4),

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell}. \tag{5}$$

Tal afirmação provou-se muito estranha na época. Como seria possível — diria Euler — que uma função arbitrária f pudesse se expressar em termos de funções tão particulares como $\operatorname{sen}(n\pi x/\ell)$? O desenvolvimento (5), segundo Euler, exigia que f fosse, no mínimo, uma função ímpar e periódica de período 2ℓ, já que a série da direita é uma função com essas propriedades (veja [10], págs. 9 e 10).

A razão principal dessas dúvidas todas, e a dificuldade que encontravam os matemáticos da época em resolvê-las, residia na própria imprecisão dos conceitos e procedimentos que eles usavam, sem que isso lhes fosse evidente. Não só o conceito corrente de função era ainda restrito e impreciso, como não existia uma fundamentação adequada das noções de limite, derivada e integral, ou uma teoria de convergência de séries. Portanto, não havia como esclarecer as questões postas por Bernoulli, responder às objeções de Euler; ou mostrar que as restrições exigidas por D'Alembert eram desnecessárias.

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), que disputa com Euler a primazia de maior matemático do século XVIII, também escreveu sobre a corda vibrante e obteve a solução da eq. (2) na forma de uma série mais geral que aquela obtida por Bernoulli. Ele esteve, pois, muito perto dessa questão referente ao desenvolvimento de uma dada função em série trigonométrica (veja [10], págs. 15 e 16). Mas o problema permaneceu dormente por seguramente meio século, até que entrasse em cena outro eminente matemático, que foi Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830).

5. Fourier e a propagação do calor

Fourier foi uma personalidade notável pela sua capacidade de se realizar como um cientista do mais alto quilate, ao mesmo tempo em que exercia obsorventes funções administrativas (veja [10], pág. 25). Em particular, foi secretário do Instituto do Egito, cargo em que descobriu e encaminhou o jovem Champollion, que se tornaria famoso pela decifração dos hieróglifos.

Como cientista, Fourier se notabilizou pelos estudos que fez sobre propagação do calor, sempre motivado por uma variedade de problemas concretos, que se situam nos domínios da Geofísica, Oceanografia e Meteorologia. Seus trabalhos começaram a vir a público em 1807, culminando, em 1822, com o aparecimento de seu famoso livro, *La théorie analytique de la chaleur* (publicado em inglês, com anotações, pela Dover [6]. Uma seleção de passagens desse livro, com comentários, encontra-se em [2], págs. 130 e seguintes).

A propagação do calor numa barra uni-dimensional é governada pela equação

$$u_t = ku_{xx},$$

onde $u(x, t)$ é a temperatura no ponto de abscissa x no instante t e k é um parâmetro físico, chamado condutividade térmica, que caracteriza o material da barra. Vamos considerar uma barra situada no segmento $-\ell \leq x \leq \ell$. Sua temperatura $u(x, t)$ fica completamente determinada pelo conhecimento da temperatura inicial,

$$u(x, 0) = f(x), \tag{6}$$

e pelas temperaturas das extremidades, $u(-\ell, t)$ e $u(\ell, t)$. O leitor encontrará detalhes desse problema em livros, como [5] e [15]. O importante a observar aqui é que, quando impomos a condição (6) à solução obtida por separação de variáveis, obtemos

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell}\right\}, \tag{7}$$

onde a_0, a_n e b_n são coeficientes a determinar.

Dada a função f, é sempre possível achar esses coeficientes de modo a satisfazer a relação (7)?

Como vimos, essa questão surgira, embora ainda numa situação bem restrita, com Daniel Bernoulli em 1753. Mas foi com Fourier que ela se tornou realmente presente no mundo matemático. Ele a propôs pela primeira vez em seu trabalho de 1807, submetido ao Instituto de França. (A propósito, esse trabalho é o tema central de um livro de Grattan-Guinness [9]. Veja também [10], págs. 19 e 20.) Lagrange, um dos examinadores desse trabalho, fez-lhe fortes objeções, não aceitando, de maneira alguma, a possibilidade do desenvolvimento (7). Embora Fourier tenha pretendido haver provado essa possibilidade, seus argumentos não foram convincentes, pela utilização de procedimentos formais cuja justificação rigorosa era de todo impossível na época.

6. Cauchy e a definição da integral

Além de Fourier, outro importante matemático da época, que se ocupou do desenvolvimento (7), foi Cauchy, mas sua demonstração da possibilidade desse desenvolvimento também deixava muito a desejar. Cauchy, entre outras coisas, deu a definição de integral que conhecemos hoje em termos de somas parecidas com as chamadas "somas de Riemann". Considerando funções definidas num intervalo a, b, ele faz uma partição desse intervalo,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$

e considera a soma associada

$$S = \sum_{n=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}).$$

A integral de f entre os extremos a e b é, por definição, o limite dessas somas S quando o máximo comprimento dos sub-intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ tende a zero (veja [10], pág. 61; ou [2], págs. 8 a 11).

Cabe observar aqui que essa definição de Cauchy representa um momento importante no desenvolvimento da Análise. A integral havia sido introduzida no século XVII em termos da idéia geométrica de área, numa época em que a tradição grega era ainda muito forte e o rigor matemático residia na Geometria. Mas esse conceito de área também carecia de uma fundamentação satisfatória. Agora, no início do século XIX, a definição da integral por Cauchy não fazia qualquer apelo à noção de área; ao contrário, ela se baseava somente na idéia de números, bem no espírito de um movimento que culminaria, no final do século, com os trabalhos de Weierstrass, Dedekind (1831-1916) e Cantor, naquilo que seria chamado a *aritmetização da Análise*. A própria noção de área seria definida rigorosamente em termos da integral, portanto fundamentada nos números.

Cauchy definiu a integral e procedeu a demonstrar várias de suas propriedades, como a de que toda função contínua num intervalo $[a, b]$ é integrável. Embora ele já estivesse de posse do con ceito moderno de continuidade e se empenhasse no rigor do raciocínio, muitas de suas demonstrações ficaram incompletas, pois quando ele cuidou dessas coisas, de 1820 a 1830, ainda não se conhecia a distinção entre continuidade e continuidade uniforme, ou entre convergência e convergência uniforme. Sabemos hoje que na demonstração da integrabilidade de uma função contínua num intervalo fechado é essencial a continuidade uniforme ([14], pág. 252), mas no tempo de Cauchy isso era uma sutileza que dificilmente podia ser percebida.

7. Origem do conceito moderno de função

O mesmo Cauchy acreditava que a soma de uma série de funções contínuas era sempre uma função contínua. Niels H. Abel (1802-1829), em 1826, mostrou que isso era falso, utilizando como contra exemplo a série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \tag{8}$$

(veja [11], pág. 21). De fato, todos os termos dessa série são funções contínuas para x qualquer, mas sua soma (veja [5], pág. 25) é a função dada por

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{2} \quad \text{se} \quad -\pi < x < x; \\ f(-\pi) &= f(\pi) = 0; \\ f(x) &= f(x+2\pi) \quad \text{para todo } x. \end{aligned} \tag{9}$$

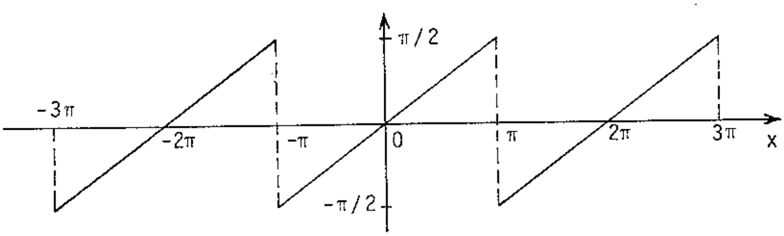

Fig. 3

Ora, esta função, cujo gráfico está ilustrado na Fig. 3, apresenta descontinuidades nos pontos $x = (2k+1)\pi$, k inteiro.

Como já dissemos, no início do Cálculo as funções eram encaradas como expressões analíticas. Dentre estas, as mais simples são os polinômios, que têm nas séries de potências sua generalização natural. Talvez seja por isso mesmo que já em meados do século XVII os matemáticos descobriram meios de representar funções mais complicadas por séries de potências. Exemplo disso são as séries

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots,$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

e

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{4} + \dots,$$

esta última obtida por Isaac Newton (1642-1727) por volta de 1665, integrando a série precedente termo a termo (veja [12], pág. 354). A segunda dessas séries, por sua vez, é obtida da primeira por substituição de x por $-x$. Séries desse tipo eram vistas como extensões naturais dos polinômios e os matemáticos nem sempre percebiam a diferença essencial entre uma coisa e outra. Tanto assim que operavam sobre as séries como se elas fossem simples polinômios, sem o menor escrúpulo. Somavam séries, multiplicavam, integravam e derivavam termo a termo. Tudo dava certo porque estavam lidando com séries de potências e, como Weierstrass mostraria na segunda metade do século XIX, tais séries representam funções analíticas e admitem todas essas operações.

Ora, o mesmo não é verdade para as séries de funções, em geral. Por exemplo, se pudessemos derivar a série (8) termo a termo, pelo menos nos pontos $x \neq (2k+1)\pi$, obteríamos o resultado

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos nx. \qquad (10)$$

Mas isto é absurdo, pois tal série não converge em nenhum ponto x, como procedemos a demonstrar (veja [7], pág. 32). Se a série convergisse teríamos

$$\lim_{n\to\infty} \cos nx = 0. \qquad (11)$$

Em consequência, teríamos também

$$\lim_{n\to\infty} \cos 2nx = 0 \tag{12}$$

(basta substituir n por $2n$ em (11)). Mas

$$\text{sen}^2 nx = 1 - \cos^2 nx$$

e

$$\text{sen}^2 nx = \frac{1}{2}(1 - \cos 2nx).$$

Isso implica, em vista de (11) e (12), que

$$\lim_{n\to\infty} \text{sen}^2 nx = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \text{sen}^2 nx = \frac{1}{2},$$

evidentemente uma contradição.

Essas peculiaridades do comportamento das séries de funções que não são séries de potências foram um fator importante no sentido de fazer surgir um modo mais geral e preciso de conceber funções. À medida que aumentava a quantidade e a variedade de funções à disposição do matemático, ficava cada vez mais evidente que a maneira antiga de encarar funções era não somente muito restrita e insuficiente, mas carente de significado preciso. Consideremos, por exemplo, a função definida em (8) e (9). Se aceitamos que a série (8) é uma legítima expressão analítica, então a função que ele define é até contínua à maneira de Euler; mas, se a consideramos dada por (9), trata-se de uma função pior que descontínua, pela mesma concepção euleriana... Outro exemplo — este dado por Cauchy (veja [10], pág. 51) — é a função

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{x}{t^2+x^2}\,dt.$$

Seria uma função contínua, já que é dada por uma única fórmula ou expressão analítica. No entanto, com a mudança de variável $t = x|s|$, é fácil ver que

$$f(x) = \frac{2|x|}{\pi}\int_0^\infty \frac{ds}{s^2+1} = |x|,$$

isto é,

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0, \\ -x \text{ se } x \leq 0; \end{cases}$$

e agora, sendo dada por duas expressões analíticas, f é uma função descontínua à maneira de Euler!

O fato é que, na década de 1820 a 1830, o conceito moderno de função, como correspondência entre variáveis, não resultando necessariamente de uma fórmula ou expressão analítica, já havia amadurecido na mente de muitos matemáticos e Peter Lejeune Dirichlet (1805-1857) foi um deles.

8. A contribuição de Dirichlet

Vamos retomar o problema do desenvolvimento (7), considerando $\ell = \pi$, já que o caso de uma função definida num intervalo qualquer se reduz facilmente a essa situação. Então a série (7) assume a forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx). \tag{13}$$

No pressuposto de que possamos integrar esta série termo a termo, ou as séries dela obtidas multiplicando seus termos por $\cos kx$ e $\operatorname{sen} kx$, obtemos os coeficientes

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \quad n = 0,1,2, \ldots$$

e

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{sen} nt\,dt, \quad n = 1,2,3 \ \ldots \tag{14}$$

(veja, p. ex., [15], págs. 16 a 18). Esses são os chamados *coeficientes de Fourier* da função f. Com esses coeficientes a série (13) é chamada a *série de Fourier* da função f.

É claro que esse procedimento é puramente formal e nada prova, pois nem sempre podemos integrar uma série termo a termo, um fato que só ficou bem conhecido depois de 1870, como veremos mais tarde.

Dirichlet foi o primeiro a dar uma demonstração rigorosa do desenvolvimento de uma função em série de Fourier. Na sua juventude ele esteve em Paris, onde teve conhecimento do problema em seus contatos com o próprio Fourier. Sua demonstração resultou num memorável trabalho de 1829 [4], que se tornou um marco importante no desenvolvimento da Análise no século XIX.

Para dar uma idéia dessa demonstração, vamos substituir (14) na soma parcial $s_N(x)$ da série (13). Obtemos

$$s_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \text{sen } nx)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} (\cos nx \cos nt + \text{sen } nx \text{ sen } nt)\right] dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos n(x-t)\right] dt.$$

Como

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos nx = \frac{\text{sen}(N + \frac{1}{2})x}{2 \text{ sen } \frac{x}{2}}$$

(veja [5], págs. 54-55), resulta que

$$s_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\text{sen}(N + \frac{1}{2})(x-t)}{2 \text{ sen } \frac{x-t}{2}} dt.$$

Para calcular o limite desta integral com $N \to \infty$, Dirichlet primeiro a decompõe em duas outras, de $-\pi$ a x e de x a π. Na primeira ele faz a mudança de variável $t = x-2u$ e na segunda a mudança $t = x+2u$, obtendo

$$s_N(x) = \int_0^{(\pi+x)/2} \frac{\text{sen}(2N+1)u}{\text{sen } u} f(x-2u)du + \int_0^{(\pi-x)/2} \frac{\text{sen}(2N+1)u}{\text{sen } u} f(x+2u)du. \tag{15}$$

Em seguida, Dirichlet procede a demonstrar que, quando $N \to \infty$, a primeira dessas integrais converge para $f(x-)/2$ e a segunda para $f(x+)/2$, de sorte que

$$\lim_{N\to\infty} s_N(x) = \frac{1}{2} [f(x-) + f(x+)].$$

Evidentemente, se f for contínua no ponto x, então $f(x-) = f(x+) = f(x)$ e

$$\lim_{N\to\infty} s_N(x) = f(x).$$

O ingrediente principal da demonstração de Dirichlet reside na seguinte observação: à medida que u varia nos intervalos de integração que aparecem em (15), a função $\text{sen}(2N+1)u$ oscila entre valores positivos e negativos, tanto mais depressa quanto maior for N. Em consequencia, cada uma dessas integrais pode ser escrita como soma de parcelas alternadamente positivas e negativas, que tendem a se cancelar mutuamente. Sobram apenas as contribuições provenientes de uma vizinhança arbitrariamente pequena de $u = 0$, donde resultam $f(x-)$ e $f(x+)$.

A soma de parcelas alternadamente positivas e negativas, a que nos referimos, vai incorporando mais e mais têrmos à medida que N cresce. É interessante observar que foi do estudo dessas somas por Dirichlet que resultou o conhecido critério de convergência das séries alternadas $\sum(-1)^n a_n$, onde a sequência (a_n) tende decrescentemente a zero. Aliás, mais tarde Riemann iria observar que o sucesso de Dirichlet na demonstração da convergência da série de Fourier resultou de sua capacidade em distinguir entre dois tipos de séries, que hoje chamamos de *absolutamente convergentes* e de *condicionalmente convergentes*. Riemann, em seu trabalho de 1854 [17] (veja a tradução inglesa em [2], pág. 20) explica como Dirichlet provou que é sempre possível rearranjar os termos de uma série condicionalmente convergente de forma a se obter uma série convergindo para qualquer número dado de antemão. Sua explicação é tão clara e tão simples que julgamos por bem reproduzi-la em nosso livro "Cálculo 2" (em sua pág. 76), praticamente com as mesmas palavras de Riemann.

Em sua demonstração da convergência da série de Fourier, Dirichlet supõe que a função f tenha no máximo um número finito de descontinuidades (do tipo salto) no intervalo $[-\pi, \pi]$ e também um número finito de máximos e de mínimos. Isto lhe permitiu considerar as integrais que aparecem em (15) como somas de integrais em sub-intervalos onde f fosse contínua e sempre crescente ou decrescente. Tal procedimento se conformava com a teoria da integral desenvolvida por Cauchy, que havia estabelecido (embora de maneira incompleta) a integrabilidade de funções contínuas em intervalos fechados, e definido a integral no caso em que a função fosse seccionalmente contínua como soma das integrais em sub-intervalos de continuidade da função. No final de seu trabalho Dirichlet afirma (erradamente, como ficaria provado mais tarde) que sua demonstração po dia ser estendida ao caso em que f tivesse um número infinito de pontos de descontinuidade. Seria necessário, segundo Dirichlet, que em qualquer sub-intervalo $[a, b]$ de $[-\pi, \pi]$ fosse sempre possível encontrar um sub-intervalo $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ onde f fosse contínua. (Em linguagem moderna, isso equivale a dizer que o conjunto dos pontos de descontinuidade de f, embora infinito, não é denso em lugar algum.) E ele conclui seu trabalho dando exemplo de uma função que não satisfaz essa condição. Basta considerar, diz ele, a função $\phi(x)$ que é igual a uma constante c quando x é racional e igual a uma outra constante d quando x é irracional. Finalmente ele conclui dizendo que um tratamento adequado do caso mais geral exige uma exposição detalhada dos princípios fundamentais da análise infinitesimal, que ele pretendia fazer num trabalho futuro.

Esse trabalho nunca foi escrito. Na verdade, o que faltava a Dirichlet na época — "princípios fundamentais da análise infinitesimal" — era uma teoria dos números reais, que só seria desenvolvida cêrca de quarenta anos mais tarde, por Dedekind, Weierstrass e Cantor. O próximo grande avanço na teoria da integração e das séries de Fourier seria dado em 1854 por um dos mais brilhantes matemáticos do século, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).

9. A contribuição de Riemann

Riemann obteve seu doutorado em 1851, na Universidade de Göttingen, com uma tese sôbre as funções de variáveis complexas (veja [1], pág. 495). Ainda sem emprêgo, ele começou a se preparar para a chamada "Habilitação", que lhe daria o direito de ministrar aulas na Universidade como "Privatdozent". Isto não era ainda uma posição remunerada, mas carreava prestígio e era um passo importante para conseguir tal posição. Para se "habilitar" Riemann tinha de submeter uma tese e sua intenção foi a de elaborar um trabalho sobre as séries trigonométricas.

Nessa época, Dirichlet era um matemático maduro, com quase 40 anos, famoso professor em Berlim. Em 1852 ele esteve em Göttingen, quando Riemann pode discutir seus planos com quem, em sua juventude, havia dado notável contribuição ao problema. Segundo E. T. Bell (veja [1], pág. 496), Dirichlet sentiu-se cativado pelo gênio e mo dêstia de Riemann. Em carta a seu pai, Riemann escreveu: "na manhã seguinte (ao jantar do dia anterior), Dirichlet esteve comigo por duas horas. Ele deu-me as notas de que eu necessitava para minha dissertação. Se não fosse isso, eu teria de gastar muitas horas de trabalhosa pesquisa na biblioteca. Ele também leu minhas próprias anotações e mostrou-se muito amigo — uma coisa que eu nunca podia esperar, considerando a grande distância que nos separa. Espero que ele se lembre de mim mais tarde".

Antes desse encontro em Göttingen, Riemann já havia estado em Berlim, onde assistiu aulas de Dirichlet sôbre teoria dos números, integrais e equações diferenciais parciais. Para ele, Dirichlet era o maior matemático vivo depois de Gauss. É evidente que seu interesse pelas séries trigonométricas foi grandemente influenciado por Dirichlet.

O trabalho de Riemann sobre as séries trigonométricas [17] deve ter sido concluido em 1854, quando ele submeteu-se ao exame final de Habilitaçao. A primeira parte desse trabalho é um histórico do problema, de d'Alembert a Dirichlet (veja [2], pág. 16 e seguintes). Ele observa que as funções que escapam à análise de Dirichlet não ocorrem na Natureza, mas por duas razões ele considera importante tratar o caso de funções mais gerais. Primeiro porque, segundo o próprio Dirichlet "esse assunto está intimamente ligado aos princípios do cálculo infinitesimal e pode ajudar a trazer maior clareza e precisão a esses princípios". Em segundo lugar, porque "a aplicação das series de Fourier não está limitada a investigações físicas; elas estão sendo aplicadas com sucesso num domínio da Matemática Pura, a Teoria dos Números, e neste domínio parecem ser importantes aquelas funções cuja representabilidade por séries trigonométricas não foi investigada por Dirichlet".

Portanto, o ponto de partida de Riemann foi a questão deixada por Dirichlet: em que condições uma certa função é integrável? De fato, em suas investigaçoes, Dirichlet supunha que as funções fossem contínuas — por partes, é verdade — apenas para poder integrá-las. E nisso êle utilizava, evidentemente, a definição que Cauchy dera da integral. Riemann percebeu, logo de início, a insuficiência dessa teoria da integral e começou suas investigaçoes com uma pergunta: "em primeiro lugar, o que se entende por $\int_a^b f(x)dx$?" Daí êle procede a definir a integral e a caracterizar as funções integráveis. Seja f uma função definida num intervalo $I = [a, b]$ e seja $P = x_0, x_1, \ldots, x_n$ uma partição desse intervalo, tal que

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Sejam $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ pontos tais que $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ e formemos a "soma de Riemann"

$$S(f,P) = f(\xi_1)\Delta_1 + f(\xi_2)\Delta_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta_n, \tag{16}$$

onde $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$. Segundo Riemann, f é integrável se essas somas têm um certo limite quando a máxima amplitude dos intervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ tende a zero, independentemente da maneira como os ξ_i são escolhidos. Por definição, esse limite é a integral de f no intervalo $[a, b]$, designada pelo símbolo $\int_a^b f(x)dx$. Se $|P|$ designa a *norma* da partição P (máxima amplitude dos intervalos I_i), então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} S(f, P).$$

Riemann enunciou dois critérios de integrabilidade. O primeiro desses critérios, que ele nem demonstra, mas considera um fato evidente, é o seguinte:

Critério R₁. *A função f é integrável se e somente se*

$$\lim_{P\ \ 0} (\omega_1\Delta_1 + \omega_2\Delta_2 + \ldots + \omega_n\Delta_n) = 0, \tag{17}$$

onde ω_i designa a oscilação de f no intervalo I_i (veja [14], págs. 249 e 265).

Após enunciar este critério, Riemann demonstra que ele é equivalente a outro critério, que chamaremos R_2 e que pode ser assim enunciado:

Critério R₂. *A função f é integrável se e somente se, dados arbitrariamente $\varepsilon > 0$ e $\sigma > 0$, é possível achar $\delta > 0$ tal* *que para toda partição* P *com* $|P| < \delta$ *a soma* s *dos comprimentos dos intervalos* I_i, *onde* $\omega_i \geq \sigma$, *é menor que* ε, *isto é* $s < \varepsilon$.

Para provar que $R_1 \Longrightarrow R_2$, notamos que

$$\sigma s \leq \omega_1 \Delta_1 + \omega_2 \Delta_2 + \ldots + \omega_n \Delta_n .$$

Por R_1, é possível achar $\delta > 0$ tal que, sendo $|P| < \delta$, esta última soma é menor que $\sigma\varepsilon$; logo, $s < \varepsilon$.

Provemos também que $R_2 \Longrightarrow R_1$. Para isto, dados ε e σ determinamos δ satisfazendo R_2. Seja ω a oscilação da função f em $[a, b]$. Então,

$$\omega_1 \Delta_1 + \omega_2 \Delta_2 + \ldots + \omega_n \Delta_n \leq \omega s + \sigma(b-a) \leq \omega\varepsilon + \sigma(b-a),$$

donde segue (17), tendo em vista que ε e σ são prescritos arbitrariamente.

A importancia do segundo critério de integrabilidade de Riemann reside no exemplo que ele deu de uma função integrável, porém com uma infinidade de pontos de descontinuidade; mais do que isso, uma função cujos pontos de descontinuidade formam um conjunto denso na reta, isto é, um conjunto com infinitos elementos em qualquer intervalo limitado, não deixando, todavia, de ser integrável! Com esse exemplo fica evidente que Riemann foi muito além de Cauchy em sua concepção da integral.

Para explicar o exemplo de Riemann, seja $m(x)$ o inteiro mais próximo a x se $x \neq n/2$ e (x) a função dada por

$$(x) = \begin{cases} x - m(x) & \text{se } x \neq n/2, \\ 0 & \text{se } x = n/2, \end{cases}$$

cujo gráfico está ilustrado na Fig. 4. A função de Riemann é dada pela série

$$f(x) = (x) + \frac{(2x)}{2^2} + \ldots + \frac{(nx)}{n^2} + \ldots = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(mx)}{m^2}. \qquad (18)$$

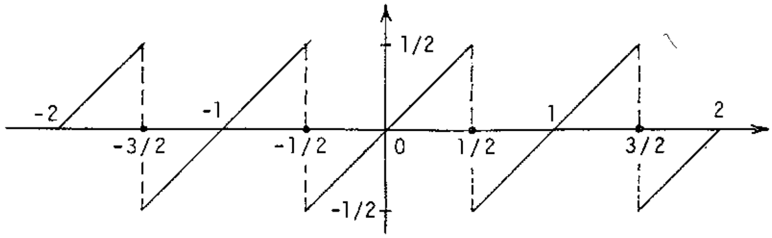

Fig. 4

Para bem entender o que Riemann conseguiu com esse exemplo, devemos analisar primeiro os gráficos de $(2x)$, $(3x)$, $(4x)$, etc. Todos esses gráficos são análogos ao gráfico de (x), porém com inclinações 2, 3, 4, etc., portanto com pontos de descontinuidade cada vez menos espaçados. Assim, (nx) tem descontinuidade nos pontos x_k^n tais que nx_k^n seja a metade de um inteiro ímpar, isto é, $x_k^n = (2k+1)/2$. Para evitar repetições na sequência x_k^n, excluímos aqueles elementos para os quais $2k+1$ e $2n$ tenham fator comum maior que 1. Logo, os pontos de descontinuidade de (nx) são dados por

$$x_k^n = \frac{2k+1}{2n}, \quad 2k+1 \text{ e } n \text{ primos entre si.} \tag{19}$$

É fácil ver que os pontos dessa sequência formam um conjunto denso: basta considerar os casos em que n é primo e notar que o espaçamento entre x_k^n e x_{k+1}^n é $1/n$. Isto permite verificar facilmente que qualquer intervalo limitado contém infinitos elementos da sequência.

Para verificarmos quando x_k^n é descontinuidade de (mx) formamos o produto mx_k^n, que pode ser escrito na forma

$$mx_k^n = \frac{2k+1}{2}\cdot\frac{m}{n}.$$

Como $2k+1$ é primo com n, esse produto será metade de um número ímpar se e somente se m/n for um inteiro ímpar, isto é,

$$m = (2j+1)n, \qquad j = 0,1,2,\ldots \tag{20}$$

Vamos agora calcular o limite em (18) com $x \to x_k^n+$. Faremos isso calculando o limite de cada termo na série (18), o que é lícito em séries que convergem uniformemente (veja [14], pág. 297). Quando m não for da forma (20) o limite será (mx_k^n) e quando $m=(2j+1)n$ teremos (observe que agora $(mx_k^n) = 0$)

$$\lim_{m \to x_k^n +} \frac{(mx)}{m^2} = \frac{(mx_k^n)}{m^2} - \frac{1/2}{m^2} = - \frac{1}{2(2j+1)^2 n^2}.$$

Em consequência,

$$\lim_{x \to x_k^n +} f(x) = f(x_k^n) - \frac{1}{2n^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2}.$$

Como a soma desta última série é $\pi^2/8$, obtemos, finalmente,

$$\lim_{x \to x_k^n +} f(x) = f(x_k^n) - \frac{\pi^2}{16n^2}.$$

De modo inteiramente análogo calculamos o limite à esquerda, obtendo

$$\lim_{x \to x_k^n -} f(x) = f(x_k^n) + \frac{\pi^2}{16n^2},$$

de sorte que o salto da função f no ponto x_k^n é $\pi^2/8n$:

$$f(x_k^n -) - f(x_k^n +) = \frac{\pi^2}{8n^2}. \tag{21}$$

Fica assim estabelecido que o conjunto dos pontos de descontinuidade da função f é enumerável e denso, pois ela é contínua em todos os demais pontos (Riemann não viu necessidade de demonstrar esta última propriedade; ela é consequência da convergência uniforme da série (18) e da continuidade dos termos desta série (veja [14], pág. 298)).

Para demonstrar a integrabilidade da função f em qualquer intervalo limitado, podemos novamente invocar a convergência uniforme da série que a define (veja [14], pág. 300), mas Riemann não dispunha desse recurso e utilizou seu critério R_2. Observemos que, em vista de (19) e (21), em qualquer intervalo limitado só existe um número finito de pontos x_k^n onde o salto da função f é superior a σ. Isto permite verificar as hipóteses do critério R_2, logo

f é integrável. O leitor pode fazer essa verificação utilizando-se da segunda parte da demonstração do Teorema 19 na pág. 272 de [14].

10. Consequências do trabalho de Riemann

Embora escrito em 1854, o trabalho de Riemann sobre séries trigonométricas só foi publicado em 1867 por Dedekind. E ele teve enorme influência no desenvolvimento posterior da Análise Matemática, pelas muitas questões que levantou. De um lado, seu exemplo (18) exibe uma função bastante geral e irregular, pelas suas descontinuidades e pelo fato de ser ainda integrável. Seu critério estimulou a introdução das idéias de conteúdo e medida de conjuntos, com vistas a uma formulaçao mais adequada do próprio critério (veja [14], pág. 267 e seguintes, especialmente o Teorema 20 da pág. 273).

De outro lado, Riemann foi o primeiro a dar exemplos de séries trigonométricas que não são séries de Fourier (veja [7], págs. 22 e 30). Com isto ficava claro que nem sempre era possível integrar uma série termo a termo; senão, como vimos na Seç. 8, toda série trigonométrica seria de Fourier. Essa descoberta de Riemann fez surgir o importante problema referente à unicidade da série trigonométrica de uma dada função. De fato, se nem toda série trigonométrica é de Fourier, era de se suspeitar que uma certa função pudesse ter mais de uma série trigonométrica.

O conceito de convergência uniforme de uma série parece ter-se originado com Abel em 1826, quando ele deu o exemplo (8) para mostrar que uma série de funções contínuas pode não ser contínua. Ele mostrou que para certas séries a continuidade da soma era consequência da continuidade dos vários termos. Essas séries que ele considerava eram uniformemente convergentes, mas isto não foi devidamente reconhecido na época. Philipp Seidel (1821-1896) e George Stokes (1819-1903) foram outros dois matemáticos que, em 1850 e 1848, respectivamente, lidaram com idéias próximas de convergência uniforme, porém também sem o devido reconhecimento desse conceito (veja [11], pág. 22).

Karl Weierstrass (1815-1897) foi quem reconheceu, desde 1841, a grande importância da convergência uniforme. Weierstrass foi pro fessor de 2º grau até 1856, quando se tornou professor na Universidade de Berlim (veja sua biografia em [1]). Como Weierstrass pouco publicava, muitos de seus resultados demoraram a ter divulgação. Foi o que aconteceu com o conceito de convergência uniforme e suas consequências, que só tiveram conhecimento amplo depois que Heinrich Heine (1821-1881) publicou um trabalho sobre as séries trigonométricas em 1870, no qual êle enfatiza a importância da convergência uniforme para a integração termo a termo e formula o problema da unicidade da série trigonométrica. Heine era professor da Universidade de Halle e, ao que tudo indica, teria se familiarizado com as idéias de Weierstrass através de Georg Cantor (1845-1918), que iniciou sua carreira de professor em Halle em 1869, após terminar, em 1867, seu doutorado em Berlim, onde se encontrava Weierstrass.

Como Heine observou, a série trigonométrica de uma função contínua, com um número finito de máximos e mínimos, converge uniformemente, logo é de Fourier e é única. Portanto, só faria sentido investigar o problema da unicidade no caso em que a função f sob estudo apresentasse certas irregularidades de comportamento. Em consequência, Heine faz hipóteses de que a série trigonométrica de f só convirja uniformemente em certos sub-intervalo de $[-\pi,\pi]$ e tenha apenas um número finito de pontos de descontinuidade. Logo a seguir Cantor também se interessa por esse problema de unicidade, escrevendo uma série de cinco artigos, entre 1870 e 1872, nos quais ele traz sua contribuição a essas investigações. Procurando remover a hipótese de que os pontos de descontinuidade de f formem um conjunto finito, êle considera conjuntos infinitos de pontos da reta cada vez mais gerais. Foi assim que Cantor foi levado a desenvolver a Teoria dos Conjuntos e dos números transfinitos (veja [11], pág. 24 e [3]).

11. A integral de Lebesgue

Não podemos, nos exiguos limites de um artigo como este, dar um apanhado completo da evolução da integral depois de Riemann, por isso remetemos o leitor aos excelentes livros de Hawkins [11] e Pesin [16]. O fato é que o trabalho de Riemann estimulou muito o desenvolvimento da teoria das funções reais e foram muitas as tentativas de generalizar o conceito de integral. Vamos nos limitar aqui a breves comentários, com observações finais sobre a integral de Lebesgue.

No início do século XIX a idéia de função era ainda tão restrita que se pensava que toda função contínua fosse derivável. Aliás, esse pensamento esteve na mente de muitos matemáticos durante os primeiros setenta anos do século, até que, depois de 1870, o exemplo de Weierstrass (veja [19], pág. 6) e vários outros mostraram que existem funções contínuas sem derivadas em ponto algum.

Essa visão restrita do conceito de função está presente na maneira também muito restrita de conceber a integral segundo Cauchy. De fato, ao definir a integral, Cauchy tinha em vista as funções contínuas ou seccionalmente contínuas. Riemann vai muito além, concebendo como integráveis funções possuindo descontuidades num conjunto denso, como a função (18). Com ela podemos construir a função

$$F(x) = \int_0^x \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(mt)}{m^2}\, dt,$$

que é, evidentemente, contínua para todo x, porém não derivável nos pontos $x = x_k^n$, embora derivável nos demais pontos x, com

$$F'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(mx)}{m^2}.$$

Em particular, exemplos de funções como essa função (18) de Riemann invalidam o próprio Teorema Fundamental do Cálculo: dada uma função (integrável) f, nem sempre é verdade que

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x).$$

Mais tarde, com a integral de Lebesgue, isto seria verdadeiro para todo x fora de um conjunto de medida nula*. E o conjunto de pon

---

* Diz-se que um conjunto de pontos da reta é de medida nula se, dado $\varepsilon > 0$, pode-se cobrir o conjunto como uma família finita ou enumerável de intervalos cuja soma total dos respectivos comprimentos seja inferior a ε.

tos x_k^n, sendo enumerável, é de medida nula. Para se provar isto, basta cobrir o primeiro ponto com um segmento de comprimento menor que $\varepsilon/2$, o segundo com um segmento de comprimento menor que $\varepsilon/2^2$; e assim por diante. A soma desses comprimentos é inferior a

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{\varepsilon}{2^3} + \ldots = \varepsilon.$$

O aparecimento de funções cada vez mais gerais ia ocorrendo naturalmente e ao mesmo tempo exigindo o desenvolvimento de conceitos e processos mais adequados ao seu tratamento, como os conceitos de convergência uniforme, medida de conjuntos e generalização do conceito da integral. Em 1884 Gaston Darboux (1842-1917) estabeleceu rigorosamente a integrabilidade da soma de uma série uniformemente convergente de funções integráveis e a possibilidade da integraçao termo a termo (veja [11], pág. 27). Como contra-exemplo, ele exibiu a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, onde

$$u_n(x) = -2n\, xe^{-n^2x^2} + 2n(n+1)xe^{-(n+1)^2x^2},$$

cuja soma, como é fácil ver, é $-2xe^{-x^2}$. Ela não converge uniformemente em intervalos do tipo $[0, x]$ e não pode ser integrada termo a termo. De fato, é fácil ver que

$$\int_0^x (-2te^{-t^2})dt = e^{-x^2} - 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x u_n(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-n^2x^2} - e^{-(n+1)^2x^2}\right] = e^{-x^2}.$$

Mas será que, além de suficiente, a convergência uniforme seria condição necessária para a integrabilidade termo a termo? A resposta é negativa, como podemos constatar por contra-exemplos. Assim, é fácil verificar (e o leitor deve fazê-lo!) que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(n+1)x}{1+(n+1)^2x^2} - \frac{nx}{1 + nx}\right] = \frac{-x}{1 + nx}$$

pode ser integrada termo a termo no intervalo $0 \leq x \leq 1$, embora a convergência não seja uniforme nesse intervalo.

O famoso *Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue* (veja [18], p. 38) dá uma condição suficiente para a integrabilidade termo a termo que é mais fraca que a convergência uniforme da série. Foi pela importância prática de resultados como esse que a integral de Lebesgue se revelou da maior importância como um recurso a mais no crescente arsenal da Análise Matemática.

Henri Lebesgue (1875-1941) obteve seu doutorado em 1902 com uma tese sobre a nova teoria da integral. Posteriormente ele escreveu um livro expondo suas idéias, o qual foi reeditado em 1926 (ref. [13]). Há várias maneiras de considerar a integral de Lebesgue de uma dada função f. A que vamos utilizar aqui é talvez a que melhor se preste a indicar como esse novo conceito abarca um conjunto mais amplo que o conjunto das funções integráveis a Riemann. Comecemos por observar que a definição de integral segundo Riemann procede de divisões do domínio da função, a partir das quais são formadas as somas de Riemann (16). A integrabilidade da função, como se vê por qualquer dos critérios R_1 e R_2, depende do modo como ela varia em cada intervalo Δ_i.

A integral de Lebesgue procede exatamente em direção oposta: dividimos o *contradomínio* da função, não o seu domínio. Digamos que f seja definida em $[a, b]$, e que $f([a, b]) \subset [c, d]$. Fazemos então uma partição $Q = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ deste último intervalo, tal que

$$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d.$$

Sejam $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ pontos tais que $y_{i-1} \leq \eta_i \leq y_i$ e consideremos a soma

$$S(f, Q) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \cdot m(O_i), \tag{22}$$

onde $O_i = f^{-1}\{[y_{i-1}, y_i)\}$ e $m(O_i)$ é um número que mede o "tamanho" do conjunto O_i e que é chamado a *medida* de O_i. Por exemplo, se O_i for apenas um intervalo, $m(O_i)$ é o comprimento desse intervalo; quando O_i é uma reunião finita (Fig. 5) ou enumerável de intervalos disjuntos, $m(O_i)$ é a soma finita ou infinita dos comprimentos desses intervalos. Mas há situações mais complexas, como exemplifica a função de Dirichlet:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

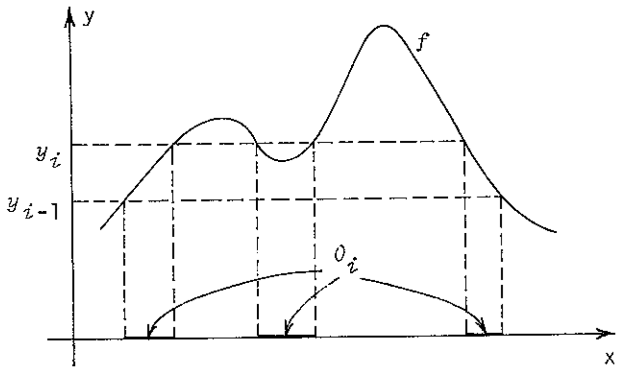

Fig. 5

Tomando como domínio dessa função um intervalo $[a, b]$, vemos que $f^{-1}\{[0, 1/2)\}$ é o conjunto dos números racionais no intervalo $[a, b]$ e $f^{-1}\{[1, 2)\}$ é o conjunto dos números irracionais no mesmo intervalo $[a, b]$. Ora, nenhum desses dois conjuntos é intervalo ou união de intervalos.

O importante a observar aqui é que a noção de *medida de conjunto* pode ser estendida a muitos conjuntos de pontos da reta — mas não a todos! — de maneira a manter certas propriedades dos comprimentos de intervalos, como a aditividade.

Quando uma função f tem a propriedade de que $f^{-1}(I)$ é um conjunto mensurável para todo intervalo I, então diz-se que f é uma *função mensurável*. É para essas funções que se define a integral de Lebesgue, como o limite das somas (22) quando a norma da partição Q tende a zero. Demonstra-se que toda função com domínio limitado que seja mensurável e limitada é integrável e Lebesgue; e que toda função integrável a Riemann é também integrável a Lebesgue e as duas integrais coincidem; mas não vice-versa. Por exemplo, a função de Dirichlet é integrável a Lebesgue, mas não a Riemann.

O leitor deve notar que a integral d. Lebesgue é mais geral que a de Riemann pela própria maneira de defini-la: ao dividirmos o contradomínio da função e considerarmos os conjuntos O_i, estamos em melhores condições de "dominar" as irregularidades da função do que no procedimento de Riemann.

12. O Teorema Fundamental do Cálculo

Já fizemos menção ao fato de que a integral de Lebesgue não foi inventada pelo simples capricho de generalizar, mas por exigências do desenvolvimento da teoria das funções. Do mesmo modo que Riemann desenvolveu sua teoria da integral, motivado pelo estudo das séries trigonométricas, de igual modo as primeiras aplicações que Lebesgue fez de seus estudos sobre integração ocorreram no domínio das séries trigonométricas. O leitor poderá se informar sobre estas e outras aplicações da integral de Lebesgue no livro de Hawkins (veja [11], cap. 6). Vamos nos contentar aqui com um comentário final sôbre o Teorema Fundamental do Cálculo, que foi o tema inicial deste artigo. Assim, propositadamente terminamos nosso trabalho com o mesmo tema com que o iniciamos.

Primeiro vamos dar um exemplo de funçao definida no intervalo $[0, 1]$, contínua, não decrescente e não constante, e cuja derivada seja zero quase sempre, vale dizer, exceto nos pontos de um conjunto de medida nula. (Esse exemplo se encontra em [8], pág. 96. A propósito, esta referência é uma excelente fonte de contra-exemplos, muito útil para quem estuda e ensina Análise.) Para construirmos esse exemplo necessitamos do chamado *conjunto de Cantor* referente ao intervalo $I = [0, 1]$, o qual é obtido da seguinte maneira: dividimos o intervalo I em três intervalos iguais, suprimimos o do meio (aberto) e ficamos com os intervalos I_{11} e I_{12}; a seguir dividimos cada um destes em tres intervalos iguais, suprimimos os do meio (abertos) e ficamos com os intervalos $I_{21}, \ldots, I_{24}$; e assim por diante (Fig. 6). O conjunto de Cantor é constituido dos pontos não suprimidos.

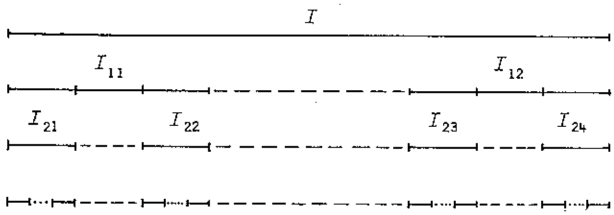

Fig. 6

Note-se que suprimimos um intervalo de comprimento $1/3$, dois de comprimento $1/3^2$, quatro de comprimento $1/3^3$, etc., de sorte que a "medida" do conjunto de pontos suprimidos é

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \ldots = 1.$$

Em consequência, o conjunto de Cantor tem medida nula, pois o intervalo I também tem medida unitária.

A *função de Cantor*, que desejamos construir, é definida assim: $f(x) = 1/2$ no primeiro intervalo suprimido; $f(x) = 1/4$ em I_{11}, $f(x) = 3/4$ em I_{12}; e assim por diante (veja os detalhes em [8], pág. 96). O gráfico dessa função está ilustrado na Fig. 7. Definimo-la nos pontos restantes do intervalo $[0, 1]$ — os pontos do conjunto de Cantor — por continuidade, já que seus limites à direita e à esquerda em qualquer desses pontos são iguais. Como ela é constante em cada um dos intervalos suprimidos, vemos que $f'(x) = 0$ quase sempre. No entanto, $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$, logo para esta função não vale o Teorema Fundamental na forma (1), isto é, não é verdade que

$$f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(x)dx.$$

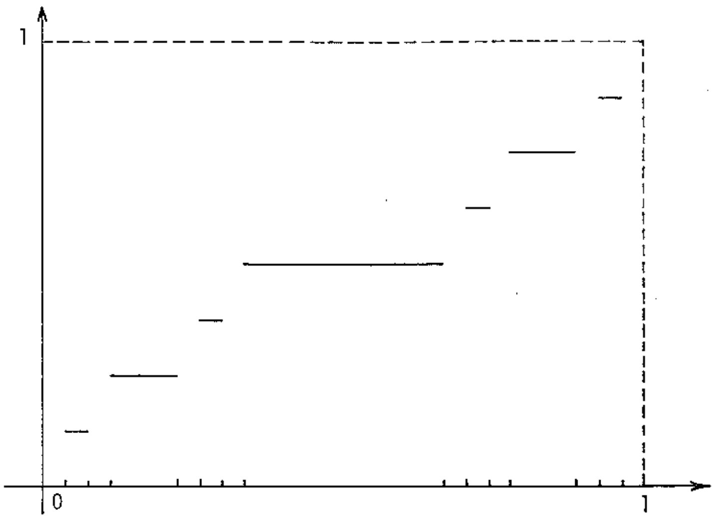

Fig. 7

Como fica então o Teorema Fundamental? Para respondermos a esta pergunta necessitamos de mais um conceito, o de *continuidade absoluta*. Diz-se que uma função f definida num intervalo $[a, b]$ é absolutamente contínua se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_i')| < \varepsilon$$

para toda coleção finita de intervalos disjuntos $[x_i, x_i']$ satisfazendo a desigualdade

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_i'| < \delta.$$

No contexto da integral de Lebesgue o Teorema Fundamental tem a forma seguinte:

Teorema Fundamental do Cálculo. *Se f é uma função integrável, então a integral indefinida*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{23}$$

é absolutamente contínua e $F'(x) = f(x)$ *quase sempre. Reciprocamente, se* F *é uma função absolutamente contínua, então ela é derivável quase sempre e*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt,$$

onde $f = F'$.

O leitor pode verificar facilmente que toda função absolutamente contínua é contínua, mas não reciprocamente: a função de Cantor, embora contínua, não é absolutamente contínua.

13. Conclusão

Esperamos que da leitura deste artigo o leitor tenha notado que as idéias evoluem de maneira gradual: elas não nascem prontas e acabadas, mas vão se ajustando às necessidades da própria disciplina, à medida que esta se vai desenvolvendo. Isso acontece tanto com os conceitos novos que vão sendo introduzidos como com os resultados que vão sendo descobertos e demonstrados. Muitos fatos são demasiado sutís e passam mesmo despercebidos aos espíritos mais aguçados. Vimos vários exemplos disso: Cauchy não percebeu que a existência da integral de uma função contínua dependia da continuidade uniforme, ou que a soma de uma série de funções contínuas nem sempre era uma função contínua; e Riemann não viu necessidade de provar seu primeiro critério de integrabilidade, tomando-o como resultado evidente. E esses são apenas poucos exemplos que podem ser acrescidos facilmente de muitos outros.

Isto encerra uma lição muito importante para quem ensina. O aprendizado também é um processo lento e gradual; ele não ocorre de uma só vez, mas por várias etapas sucessivas, a cada uma das quais se vai consolidando mais e mais. Não pode, pois, o professor, apresentar conceitos e resultado em forma final e acabada, mas deve atentar para esses aspectos do desenvolvimento científico e do mecanismo de aprendizado, para adequar convenientemente suas tarefas de ensino. Assim, por exemplo, não se justifica, num primeiro curso de Cálculo, uma apresentação rigorosa e precisa do conceito de continuidade, quando o aluno não se familiarizou ainda com exemplos gerais de funções. Não menos inconvenientes é a insistência prematura no conceito geral de função através de exemplo artificiais, que só podem desestimular o aluno.

A preocupação excessiva com as apresentações formais, em todos os níveis do ensino, é um grave erro, porque obscurece o que há de mais importante na Matemática, que são as *idéias*. Exemplo típico desse êrro é o esforço que se faz no 2º grau para apresentar o conceito de função como um caso particular de relação, obscurecendo o que há de realmente importante e interessante na idéia de função.

Por outro lado, a preocupação prematura com o rigor é outra falha grave do ensino, pois atropela o desenvolvimento natural do aluno. Por exemplo, por que insistir na definição rigorosa de limite, se nem Cauchy soube fazer bom uso desse conceito de que foi ele um dos primeiros inventores? O mesmo pode ser dito quanto à insistência em demonstrar prematuramente os teoremas sobre limites ou o critério de integrabilidade, cuja necessidade de demonstração escapou à argúcia do próprio Riemann. Como dissemos no prefácio do nosso "Cálculo 1", é preciso permitir "aquela maturação indispensável à análise crítica das idéias, que leva naturalmente ao formalismo e ao rigor".

Deixamos aquí essas breves considerações como um convite ao leitor para que reflita sobre as sábias lições dos grandes mestres da invenção matemática, que podem ser apreciadas na evolução histórica da disciplina, como procuramos mostrar neste artigo; e não se deixe influenciar pelos "petits Bourbakis" da travestida modernização do ensino da Matemática.

Referência Bibliográfica

[1] E.T. Bell, *Men of Mathematics*, Simon and Schuster (1937) vii+590 págs.

[2] G. Birkhoff (Editor), *A Source Book in Classical Analysis*, Harvard University Press (1973), xii+470 págs.

[3] J.W. Dauben, *The Trigonometric Background to Georg Cantor's Theory of Sets*, Archive for the History of Exact Sciences, vol. 7 (19) 181-216.

[4] P.L. Dirichlet, *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 4 (1829) 157-169; veja Lejeune Dirichlet, Werke, ed. Chelsea Publ. Co., (1969) 117-132, New York.

[5] D.G. Figueiredo, *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Projeto Euclides, Editora Edgard Blücher Ltda. (1977) xi+274 págs.

[6] J. Fourier, *The Analytical Theory of Heat*, Dover Publications Inc. (1955) xxiii+466 págs.

[7] R.O. Gandulfo, *Séries de Fourier e Convergência*, Noticiário da S.B.M., Ano XV nº 2 (Outubro de 1984).

[8] B.R. Gelbaum and J.M.H. Olmstead, *Counterexamples in Analysis*, Holden-Day, Inc. (1964) xxiv+194 págs.

[9] I. Grattan-Guinness, Joseph Fourier 1768-1830, The MIT Press (1972) x+516 págs.

[10] I. Grattan-Guinness, *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*, The MIT Press (1970) xiii+186 págs.

[11] T. Hawkins, *Lebesgue's Theory of Integration, Its Origin and Development*; Chelsea Publishing Company (1975) xv+227 págs.

[12] M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press (1972) xvii+1238 págs.

[13] H. Lebesgue, *Leçons sur l'Integration*, Chelsea Publishing Company (1973) xii+340 págs.

[14] E.L. Lima, *Curso de Análise*, vol. 1, Projeto Euclides, IMPA (1976) 344 págs.

[15] L.A. Medeiros e N.G. Andrade, *Iniciação às Equações Diferenciais Parciais*, LTC Editora (1978) 166 págs.

[16] I.N. Pesin, *Classical and Modern Integration Theories*, Academic Press (1970) xviii+195 págs.

[17] B. Riemann, *Über die Darstellbarbeit einer Function durch eine trigonometrische Rehie*, Werke, ed. Dover Publ., Inc. (1953) 227-264, New York. Em francês: *Oeuvres mathématiques de Riemann*, traduit par L. Laugel, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 9 rue de Médicis, Paris-6ᵉ (1968) 225-279.

[18] F. Riesz and Béla Sz.-Nagy, *Functional Analysis*, Frederick Ungar Publishing Co. (1955) xii+467 págs.

[19] A.N. Singh, *The Theory and Construction of Non-Differentiable Functions*, in "E.W. Hobson, *Squaring the Circle and Other Monographs*, Chelsea Publishing Company, (1969)" xvii+110 págs.

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília
70.910 Brasília, D.F.

Charles Hermite (1822-1901), que treinou toda uma geração de matemáticos bem conhecidos, como Émile Picard, Gaston Darboux, Paul Painlevé e Henri Poincaré, foi um homem de caráter generoso, que exerceu grande influência no mundo matemático de sua época, dentro e fora da França.

Em 1873, procurado pelo jovem Mittag-Leffler (1846-1927), que viera de Estocolmo para estudar Análise em Paris, Hermite havia de responder: "meu caro jovem, você dirigiu-se à pessoa errada; deve ir para Berlim, seguir as lições de Weierstrass, pois êle é o mestre de todos nós".

Magnus Gosta Mittag-Leffler de fato estudou com Weierstrass; e foi por seu intermédio que Sofia Kowalevski (1850-1891) obteve uma posição docente em Estocolmo a partir de 1884. Êle fundou o prestigioso periódico Acta Mathematica, e André Weil, um dos últimos matemáticos vivos a conhecer Mittag-Leffler pessoalmente, dá um interessante depoimento sobre êle (veja Acta Mathematica, vol. 148, 1982, pp. 9 a 13).