

A CARACTERÍSTICA DE EULER—POINCARÉ

Elon Lages Lima

1. Introdução

Euler foi o primeiro a chamar a atenção para o número $\chi(P) = V - A + F$, onde V é o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces de um poliedro $P \subset \mathbb{R}^3$. Ele acreditou ter demonstrado que $\chi(P) = 2$ para todo poliedro $P \subset \mathbb{R}^3$, provavelmente admitindo como poliedros apenas aqueles que são homeomorfos à esfera S^2 , para os quais a igualdade acima é certamente verdadeira.

O número $V - A + F$ é, de fato, um achado de muita sorte. Depois de um longo período de trabalhos perdidos por vários matemáticos na direção de pistas falsas, coube finalmente a Poincaré descobrir o verdadeiro significado do número que Euler encontrou e, a partir daí, $\chi(P)$ se revelou ubíquo e fértil, como parte central de notáveis igualdades e como ponto de partida para importantes generalizações, revelando-se um verdadeiro traço de união entre ramos distintos da Matemática.

No que se segue, ilustraremos as afirmações acima com exemplos de situações diversas em que a característica de Euler-Poincaré $\chi(P)$ aparece como resultado de certas contagens ou avaliações, em Topologia, Equações Diferenciais, Geometria Diferencial e Análise.

2. O Teorema de Euler segundo Poincaré

Poincaré [1893] generalizou o Teorema de Euler provando, para poliedros de qualquer dimensão, que a característica $\chi(P)$ é igual à soma alternada dos números de Betti de P . Este resultado, não somente estende o teorema para todas as dimensões, como estabe

lece seu verdadeiro significado (topológico) e o esclarece, aprofunda e completa, mesmo em dimensão 2.

Nesta seção, demonstraremos o Teorema de Poincaré.

Em primeiro lugar, o que é um poliedro de dimensão n ?

Um poliedro é formado por simplexos. Um simplexo de dimensão zero é um ponto, de dimensão um é um segmento de reta, de dimensão dois é um triângulo, de dimensão três é um tetraedro.

Mais geralmente, um simplexo s de dimensão n no espaço euclidiano \mathbb{R}^m ($m \geq n$) é determinado por $n+1$ vértices $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$, tais que os vetores $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0$ sejam linearmente independentes. O simplexo $s = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ é, por definição, o conjunto de todas as combinações lineares "convexas"

$x = \sum_{i=0}^n t_i a_i$, com $t_i \geq 0$ e $\sum t_i = 1$. Equivalentemente, s é o menor subconjunto convexo de \mathbb{R}^m que contém os vértices a_0, a_1, \dots, a_n .

Uma face de um simplexo $s = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ é qualquer simplexo $t = [a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_k}]$ que tenha por vértices alguns dos vértices de s . As faces de dimensão 0 de s são os vértices $[a_0], \dots, [a_n]$; as faces de dimensão 1 são os segmentos $[a_i, a_j]$, etc.

Um poliedro P no espaço \mathbb{R}^m é uma coleção finita de simplexos em \mathbb{R}^m tais que:

- 19) Se s é um simplexo de P então toda face de s também o é;
- 20) Se s', s'' são simplexos de P então a interseção $s' \cap s''$ é uma face comum a s' e s'' (ou é vazia).

Indicaremos com $|P|$ a reunião dos simplexos de P .

$|P|$ é um subconjunto compacto de \mathbb{R}^m . Observe-se que o conhecimento de $|P|$ não determina P , isto é, não permite que se saiba quais são os simplexos que constituem o poliedro.

Dado o poliedro P de dimensão n , para cada $i = 0, 1, \dots, n$ seja α_i o número de simplexos de dimensão i em P . O número

$$\chi(P) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \dots + (-1)^n \alpha_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha_i$$

chama-se a característica de Euler-Poincaré de P .

Por exemplo, se P é o conjunto das faces de um simplexo n -di

mensional s , então $\alpha_i = \binom{n+1}{i+1}$ para $i = 0, 1, \dots, n$, logo $\chi(P) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n+1}{i+1} = 1$, como se vê desenvolvendo $(1+(-1))^{n+1}$

pelo binômio de Newton. Daí resulta que se Q é o poliedro formado pelas faces de dimensão $\leq n$ de um simplexo de dimensão $n+1$ então $\chi(Q) = 1+(-1)^n$. Note que Q é homeomorfo à esfera S^n . Portanto, podemos dizer que a característica de Euler-Poincaré da esfera S^n é zero se n é ímpar e é igual a 2 se n é par.

Segundo Poincaré, se $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ são os números de Betti do poliedro P , vale a igualdade

$$\chi(P) = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - \dots + (-1)^n \beta_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \beta_i.$$

Passamos agora a definir os números de Betti de P e provar o Teorema de Poincaré. (Mais precisamente, as definições que se seguem correspondem a considerar os números de Betti com coeficientes em \mathbb{Z}_2 .)

Para cada $i = 0, 1, \dots, n$, uma *cadeia de dimensão i* no poliedro P é um conjunto $c = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$, cujos elementos são simplexos de dimensão i pertencentes ao poliedro P . Esta definição inclui a cadeia vazia, que indicaremos por 0 , e, para cada simplexo $s \in P$ de dimensão i , a cadeia $\{s\}$, que indicaremos simplesmente por s .

Seja $C_i = C_i(P)$ o conjunto das cadeias de dimensão i do poliedro P . Dadas $c', c'' \in C_i$, definiremos a soma $c' + c''$ pondo

$$c' + c'' = (c' \cup c'') - (c' \cap c'').$$

Esta operação faz de C_i um grupo abeliano, cujo elemento neutro é a cadeia vazia 0 e onde cada cadeia é seu próprio inverso, ou seja, $c+c=0$ para toda $c \in C_i$. Assim, C_i é um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{Z}_2 . Em relação a esta soma, uma cadeia $c = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ se escreve como

$$c = s_1 + s_2 + \dots + s_k$$

e os simplexos $s \in P$ de dimensão i constituem uma base (natural) do espaço vetorial C_i . Em particular, $\dim C_i = \alpha_i$.

Para cada $i = 0, 1, \dots, n$, definiremos o *homomorfismo bordo* como a transformação linear

$$\partial_i: C_i \rightarrow C_{i-1}$$

tal que, para cada simplexo $s \in C_i$, $\partial_i s =$ conjunto das faces de dimensão $i-1$ do simplexo s . (Por conveniência, estamos considerando $C_{-1} = \{0\}$, logo $\partial_0 = 0$.) Vale a relação fundamental

$$\partial_{i-1} \circ \partial_i = 0.$$

Isto se prova mostrando que, para todo simplexo $s \in C_i$, tem-se $\partial_{i-1}(\partial_i s) = 0$ e esta última igualdade resulta do fato de que cada face de dimensão $i-2$ de s está contida exatamente em 2 faces de dimensão $i-1$.

Sejam $Z_i \subset C_i$ o núcleo de ∂_i e $B_i \subset C_i$ a imagem de ∂_{i+1} . Os elementos $c \in Z_i$ chamam-se os *ciclos* de dimensão i do poliedro P ; eles são as cadeias tais que $\partial_i c = 0$. Os elementos $c \in B_i$ são os *bordos de dimensão i* , tais que $c = \partial c'$ para alguma $c' \in C_{i+1}$. A relação fundamental $\partial_{i-1} \partial_i = 0$ significa que $B_i \subset Z_i$, ou seja, que todo bordo é um ciclo. Sejam $z_i = \dim Z_i$ e $b_i = \dim B_i$. O conhecido teorema de Álgebra Linear, segundo o qual a dimensão do domínio de uma transformação linear é igual à dimensão do núcleo mais a dimensão da imagem, assegura que $\alpha_i = z_i + b_{i-1}$. (Note que $b_n = 0$ e $b_{-1} = 0$ também.)

O espaço vetorial quociente $H_i(P) = Z_i/B_i$ chama-se o *i -ésimo grupo de homologia* do poliedro P com coeficientes em \mathbb{Z}_2 . Sua dimensão $\beta_i = z_i - b_i$ é chamada o *i -ésimo número de Betti (mod. 2)* do poliedro P .

Dadas todas estas definições, podemos demonstrar facilmente o Teorema de Poincaré. Com efeito, sendo $b_n = b_{-1} = 0$, temos

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha_i = \sum_{i=0}^n (-1)^i (z_i + b_{i-1}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (z_i - b_i) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \beta_i.$$

Alexander [1915] demonstrou que se os poliedros P e Q são tais que $|P|$ é homeomorfo a $|Q|$ então os números de Betti de P e Q são iguais em cada dimensão, daí resultando que $\chi(P)$ é um invariante topológico do poliedro P . Esta última afirmação foi feita explicitamente por Poincaré, o qual nunca se preocupou em de

monstrar a invariância dos números de Betti. Tal invariância não é de forma alguma óbvia a partir das definições que demos, mas Poincaré tinha uma concepção intrínseca desses números e provavelmente considerava as definições acima dadas como um recurso de exposição para melhor comunicar suas idéias.

Uma *triangulação* de um espaço topológico X é um homeomorfismo $h: |P| \rightarrow X$, onde P é um poliedro. Diz-se então que o espaço X é *triangulável*. Se $k: |Q| \rightarrow X$ é outra triangulação, então $k^{-1}h: |P| \rightarrow |Q|$ é um homeomorfismo, logo P e Q têm os mesmos números de Betti e portanto a mesma característica de Euler-Poincaré, os quais são, por definição, os números de Betti e a característica de Euler-Poincaré do espaço triangulável X .

3. Campos de vetores em superfícies

Teorema de Poincaré-Hopf. *Se um campo contínuo de vetores tangentes a uma superfície compacta M tem apenas um número finito de singularidades então a soma dos índices dessas singularidades é igual à característica de Euler-Poincaré de M .*

O resultado acima, ao qual nos referimos como o "Teorema de Poincaré-Hopf", foi demonstrado por Poincaré [1885] em dimensão 2 e por Hopf [1927] nas demais dimensões. Ele é a primeira ocorrência da característica de Euler-Poincaré fora da geometria dos poliedros. (Historicamente, a primeira aplicação do Teorema de Euler foi a classificação dos poliedros regulares.) Vamos explicá-lo.

Uma *superfície m -dimensional* M no espaço euclidiano \mathbb{R}^n é um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ tal que cada ponto $p \in M$ possui uma vizinhança $V \subset M$, imagem de um homeomorfismo $\phi: V_0 \rightarrow V$, onde $V_0 \subset \mathbb{R}^m$ é um aberto. Diremos então que ϕ é uma *parametrização* de V , exigiremos que $\phi: V_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja uma aplicação C^∞ (isto é, possua derivadas parciais contínuas de todas as ordens) e que, pondo $\phi(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_n(x))$, $x = (x_1, \dots, x_m) \in V_0$, a matriz jacobiana $(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(x))$, com n linhas e m colunas, tenha posto m em cada ponto $x \in V_0$.

Exemplos de superfícies são a esfera

$$S^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1}; x_1^2 + \dots + x_{m+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{m+1}, \text{ e o toro}$$

$$T^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3.$$

O espaço vetorial tangente à superfície m -dimensional $M \subset \mathbb{R}^n$ no ponto p é o conjunto $T_p M$, formado pelos vetores velocidade $\lambda'(0)$ dos caminhos diferenciáveis do tipo $\lambda: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ tais que $\lambda(0) = p$. $T_p M$ é o subespaço vetorial de \mathbb{R}^n que tem como base os vetores $\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_m}(x_0)$, onde $x_0 \in V_0$, $\phi(x_0) = p$.

Um campo de vetores tangentes à superfície $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação $v: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $v(p) \in T_p M$ para todo $p \in M$. Uma singularidade do campo v é um ponto $p \in M$ onde $v(p) = 0$. A singularidade p diz-se isolada quando possui uma vizinhança na qual não há outra singularidade do campo v .

Seja p uma singularidade isolada do campo contínuo de vetores tangentes $v: M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Tomemos uma parametrização $\phi: V_0 \rightarrow V$ de uma vizinhança V de p , na qual não há outra singularidade de v . Seja $x_0 \in V_0$ tal que $\phi(x_0) = p$. Para cada $x \in V_0$, seja

$$v(\phi(x)) = \sum_{i=1}^m f_i(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)$$

a expressão de $v(\phi(x))$ em termos da base $\{\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)\}$ do espaço vetorial tangente $T_{\phi(x)} M$.

As funções $f_1, \dots, f_m: V_0 \rightarrow \mathbb{R}$ definem uma aplicação $F = (f_1, \dots, f_m): V_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$. No ponto $x_0 \in V_0$, temos $F(x_0) = 0 \in \mathbb{R}^m$. Nos demais pontos $x \in V_0$, $F(x) \neq 0$. Assim, x_0 é a única raiz da equação $F(x) = 0$ em V_0 .

Nestas condições, sabe-se atribuir a F um número inteiro (positivo, negativo ou nulo) $i(F)$, chamado o Índice de Kronecker de F em V_0 , o qual mede a multiplicidade da raiz x da equação $F(x) = 0$. (Veja o livro do autor [1981], págs. 519 a 525.) Se $m=2$ e $F = (f, g)$ é de classe C^1 , então $i(F) = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{fdg - gdf}{f^2 + g^2}$, onde C é qualquer círculo de centro x_0 , cujo interior esteja contido em V_0 . Para $m > 2$, $i(F)$ é dado por uma integral de superfície (loc. cit., pag. 519).

Por definição, o Índice da singularidade isolada p do campo v é o Índice de Kronecker $i(F)$. Mostra-se que este número não

depende da parametrização ϕ escolhida. Ele é indicado pela notação $i(v;p)$.

No caso $m = 2$, a interpretação intuitiva de $i(v;p)$ é o número de voltas que dá o vetor $v(q)$ quando o ponto q descreve uma pequena curva em torno da singularidade p . A figura abaixo dá alguns exemplos. Em cada caso, o vetor do campo é o vetor velocidade do caminho desenhado, imaginado com uma parametrização indicada pela seta.

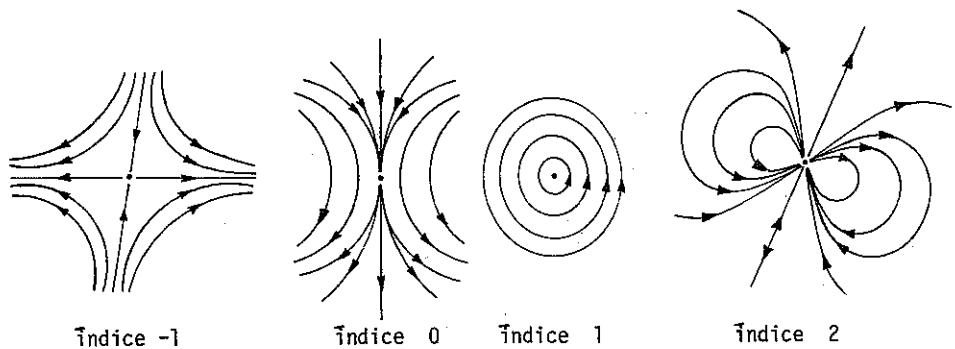


Fig. 1

O Teorema de Poincaré-Hopf diz que se v é um campo contínuo de vetores tangentes a uma superfície compacta M e as singularidades de v constituem um conjunto finito $S \subset M$ então $\sum_{p \in S} i(v;p) = \chi(M)$.

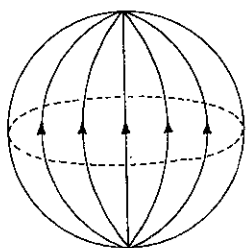
O primeiro membro da igualdade acima é a soma dos índices das singularidades do campo v . O segundo membro é a característica de Euler-Poincaré de M . Como assim?

Um teorema de Whitehead [1940] assegura que toda superfície compacta é um espaço topológico triangulável. (Este é mais um dos fatos que Poincaré aceitava sem se preocupar em provar.) Logo $\chi(M)$ faz sentido.

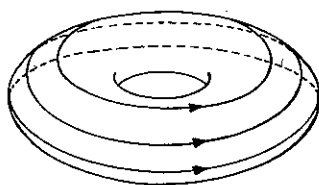
Um corolário útil do Teorema de Poincaré-Hopf é o seguinte: se $\chi(M) \neq 0$ então todo campo contínuo de vetores tangentes à superfície M deve anular-se em algum ponto. Por exemplo, se M é a

esfera S^2 então $\chi(M) = 2$, pelo Teorema de Euler, logo não existe campo contínuo de vetores tangentes não nulos na esfera de dimensão 2. Este fato se exprime jocosamente com a afirmação de que não se pode pentear uma bola cabeluda. Ou ainda: em qualquer momento da do, existe um ponto na superfície da terra onde não sopra vento.

Por outro lado, a característica de Euler-Poincaré do toro T^2 é zero, como se pode ver tomando uma triangulação ou então observando que o campo de vetores unitários tangentes aos paralelos (ou aos meridianos) de T^2 é contínuo e sem singularidades. As figuras abaixo exibem o "campo magnético", com duas singularidades de índice 1 em S^2 e o campo de vetores tangentes aos paralelos no toro (sem singularidades).



campos magnético ou "sul-norte"
(duas singularidades)



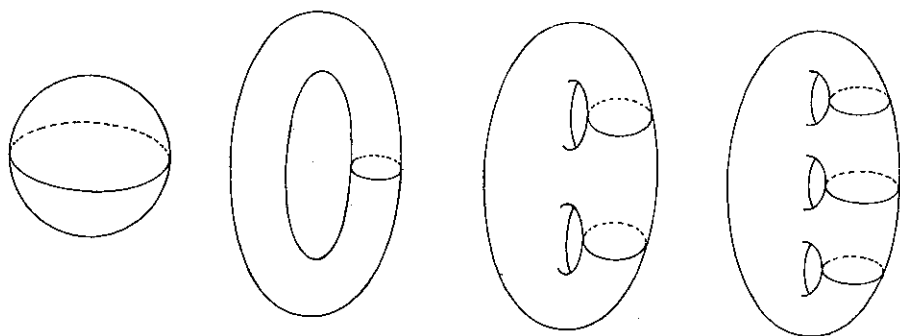
campo sem singularidades no toro

Fig. 2

Pode-se provar que em toda superfície compacta M com $\chi(M) = 0$ existe um campo contínuo de vetores tangentes não-nulos. Por exemplo, se $n = 2k-1$ é um número ímpar, a esfera unitária S^n é o conjunto de todos os pontos $p = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k)$ tais que $\sum (x_i^2 + y_i^2) = 1$. Um vetor $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ é tangente a S^n no ponto p se, e somente se, o produto interno $\langle v, p \rangle$ é zero. Logo, quando $n = 2k-1$ é ímpar, podemos definir um campo contínuo de vetores tangentes não nulos em S^n pondo $v(p) = (y_1, -x_1, y_2, -x_2, \dots, y_k, -x_k)$.

O Teorema de Dualidade de Poincaré diz que, numa superfície compacta, os números de Betti (mod. 2) equidistantes dos extremos são iguais (veja Seifert-Threlfall [1951], pág. 316). Ou seja, se $\dim M = m$ então $\beta_i = \beta_{m-i}$ para $i = 0, 1, \dots, m$. Em particular, se m é ímpar então $\chi(M) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \beta_i = 0$. Isto sugere que toda superfície compacta de dimensão ímpar admite um campo contínuo de vetores tangentes sem singularidade, o que é verdade e generaliza o exemplo dado acima para S^{2k-1} .

Para superfícies compactas M^2 contidas no espaço euclidiano no \mathbb{R}^3 existe um teorema de classificação (Seifert-Threlfall [1951], pág. 183) segundo o qual uma qualquer dessas superfícies é homeomorfa a um dos modelos abaixo esboçados.



superfícies de gêneros 0, 1, 2 e 3

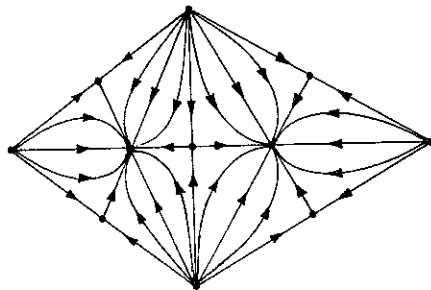
Fig. 3

A lista de modelos é infinita. Acima foram desenhados os quatro primeiros: esfera, toro, bitoro e tritoro, que têm gêneros 0, 1, 2, 3 respectivamente. (O gênero da superfície é o número de buracos.) Se uma superfície M^2 tem gênero g , então sua característica de Euler-Poincaré é igual a $2-2g$. Assim a esfera tem característica 2, o toro tem característica 0 e as demais superfícies compactas em \mathbb{R}^3 têm característica negativa. Em particular, o toro é a única superfície compacta em \mathbb{R}^3 que admite um campo contínuo de vetores tangentes não nulos.

Uma palavra sobre a demonstração do Teorema de Poincaré-Hopf. Ela é usualmente feita em duas etapas. Na primeira, mostra-se que a soma dos índices das singularidades é a mesma, seja qual for o campo contínuo de vetores tangentes a M tomado. Na segunda, exhibe-se um campo particular para o qual esta soma seja igual a $\chi(M)$.

A primeira etapa pode ser executada considerando-se o campo v como uma seção no espaço fibrado tangente de M e mostrando-se que $\sum_{p \in S} i(v; p)$ é o número algébrico de interseções de v com o campo identicamente nulo θ . Como duas seções são sempre homotópicas e o número de interseção é invariante por homotopia, o resultado segue-se (veja Lima [1961], pág. 120). Outra maneira consiste em entender o campo a uma vizinhança tubular de M e concluir que a soma dos índices das singularidades é igual ao grau da "aplicação normal" de Gauss, definida no bordo dessa vizinhança tubular (veja Milnor [1965], pág. 38). A aplicação normal de Gauss será considerada na seção seguinte.

Para a segunda etapa, podemos tomar o campo gradiente de uma "função de Morse", como veremos na seção 5, adiante. Mais geométrico ainda é considerar uma triangulação de M e, por meio dela, definir um campo de vetores (conhecido como "campo de Hopf") que tem uma singularidade no centro de cada simplexo, sendo o índice dessa singularidade igual a $(-1)^r$, onde r é a dimensão do simplexo. Então, se α_r é o número de simplexos de dimensão r , a soma dos índices das singularidades desse campo é igual a $\sum_{r=0}^m (-1)^r \alpha_r$, ou seja, a $\chi(M)$. A figura abaixo mostra, no caso em que $\dim M = 2$, co



campo de Hopf numa superfície

Fig. 4

mo definir o campo de Hopf em cada triângulo de M . Na realidade, estão desenhados dois simplexos adjacentes, para ficar claro que nos vértices o campo tem uma singularidade do tipo "fonte", nos centros dos triângulos tem "poços" e nos centros das arestas tem "selas". Para mais detalhes veja Lima [1961], pág. 127.

Pode-se também demonstrar o Teorema de Poincaré-Hopf como consequência da fórmula dos pontos fixos de Lefschetz. Veja Guillemin-Pollack [1974] pág. 132.

§4. A curvatura integral

Seja M uma superfície compacta de dimensão m , contida no espaço euclidiano \mathbb{R}^{m+1} . Para cada ponto $p \in M$, existem dois vetores unitários em \mathbb{R}^{m+1} perpendiculares ao espaço vetorial tangente $T_p M$. É possível (isto é um teorema) escolher para cada $p \in M$ um desses vetores, digamos $\gamma(p)$, de modo que seja contínua (e portanto C^∞) a aplicação $\gamma: M \rightarrow S^m$ assim definida; γ chama-se a *aplicação normal de Gauss*.

Note que, para cada $p \in M$, o espaço vetorial tangente $T_p M$ é o conjunto dos vetores de \mathbb{R}^{m+1} perpendiculares a $\gamma(p)$. Mas este conjunto é também o espaço vetorial $T_{\gamma(p)} S^m$, tangente à esfera unitária S^m no ponto $\gamma(p)$. Logo $T_p M = T_{\gamma(p)} S^m$.

A observação acima permite definir uma transformação linear $\gamma'(p): T_p M \rightarrow T_p M$, do seguinte modo. Todo vetor $v \in T_p M$ é vetor velocidade $v = \lambda'(0)$ de um caminho $\lambda: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, com $\lambda(0) = p$. Então $\gamma \circ \lambda: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S^m$ é um caminho com $(\gamma \circ \lambda)(0) = \gamma(p)$. Seu vetor velocidade $(\gamma \circ \lambda)'(0)$ é, por definição, $\gamma'(p) \cdot v \in T_{\gamma(p)} S^m = T_p M$.

O determinante da transformação linear $\gamma'(p)$ chama-se a *curvatura de Gauss-Kronecker*, $K(p)$, da superfície M no ponto p .

Isto equivale a dizer que $K(p)$ é o determinante jacobiano de γ no ponto p , logo admite a seguinte interpretação: para cada $r > 0$ seja $A(r)$ a área (ou volume) da região de M formada pelos pontos cuja distância a p é $\leq r$. Seja $A'(r)$ a área (ou volume) em S^m da imagem dessa região pela aplicação γ . Então

$|K(p)| = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{A'(r)}{A(r)}$. Quanto ao sinal de $K(p)$, temos $K(p) \geq 0$ se γ preserva orientação perto de p e $K(p) \leq 0$ no caso contrário.

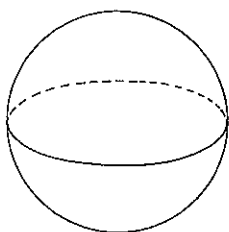
Seja c_m o volume da esfera unitária $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$.

O Teorema da Curvatura Inteira (Hopf [1925]) diz que se M é uma superfície compacta de dimensão m em \mathbb{R}^{m+1} e m é par, então

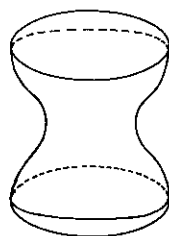
$$\frac{1}{c_m} \int_M K dM = \frac{1}{2} \chi(M).$$

A igualdade acima é extraordinária: o primeiro membro é um invariante diferencial-geométrico de M (integral da função curvatura $K: M \rightarrow \mathbb{R}$ ao longo da superfície M) enquanto que o segundo membro é um invariante topológico de M . Isto permite relacionar propriedades geométricas com propriedades topológicas mediante afirmações do seguinte tipo: Se em todos os pontos p de uma superfície compacta $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ a curvatura $K(p)$ é positiva então M é homeomorfa a uma esfera. Com efeito, neste caso $\int K > 0$, donde $\chi(M) > 0$, logo M é uma esfera.

O comportamento da função curvatura $K: M \rightarrow \mathbb{R}$ depende da maneira como a superfície M^m está mergulhada no espaço euclidiano \mathbb{R}^{m+1} . A figura abaixo mostra duas superfícies em \mathbb{R}^3 homeomorfas à esfera S^2 , ou seja, dois mergulhos de S^2 em \mathbb{R}^3 . No primeiro caso, temos $K(p) = 1$ para todo p . No segundo caso $K(p) > 0$ nos pontos p da calota superior ou da inferior, enquanto que $K(p) < 0$ nos pontos intermediários. As duas funções curvatura são portanto bem diferentes mas, pelo Teorema da Curvatura Inteira, $\frac{1}{4\pi} \int K dM = 1$ em ambos os casos, pois ambas as superfícies têm $\chi(M) = 2$.



esfera de raio 1
curvatura 1 em todos
os pontos



superfície homeomorfa
à esfera, com pontos
onde $K > 0$ e $K < 0$.

Fig. 5

Se $M^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ é uma superfície compacta de dimensão ímpar m , a integral $\frac{1}{\sigma_m} \int_K dM$ continua sendo um número inteiro mas agora ele não depende somente do tipo topológico de M . Conforme a maneira de mergulhar M em \mathbb{R}^{m+1} esse número assume uma infinidade de valores (Milnor [1955]).

A demonstração do Teorema da Curvatura Íntegra está intimamente ligada com a do Teorema de Poincaré-Hopf. Ela pode ser vista em Lima [1961], pág. 148 ou, sob outra forma, em Milnor [1965], pág. 38.

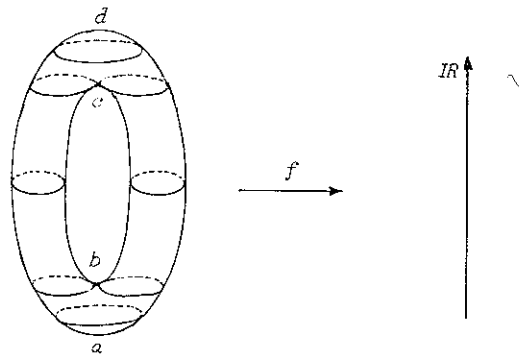
Existe uma versão mais geral do Teorema da Curvatura Íntegra para superfícies compactas de dimensão par situadas num espaço euclidiano de dimensão arbitrária. Nesse caso, o integrando tem uma forma bem mais complicada. O resultado é a "fórmula de Gauss-Bonnet", fruto dos trabalhos de Gauss, Bonnet, Weil, Allendoerfer e, em forma definitiva, Chern [1944].

§5. Pontos críticos de uma função real

Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de classe C^∞ numa superfície compacta M . Diz-se que $p \in M$ é um *ponto crítico* da função f quando para alguma (e portanto para qualquer) parametrização $\phi: V_0 \rightarrow V \subset M$, com $\phi(x_0) = p$, a função $f \circ \phi: V_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tem todas as derivadas parciais iguais a zero no ponto $x_0 \in V_0$.

O ponto crítico p diz-se *não-degenerado* quando a *matriz hessiana* $(\frac{\partial^2 (f \circ \phi)}{\partial x_i \partial x_j})(x_0)$ tem determinante diferente de zero. (Esta propriedade não depende da parametrização ϕ tomada.) Pelo Teorema de Schwarz, a matriz hessiana é simétrica, logo seus valores próprios são reais. O número de valores próprios negativos da matriz hessiana chama-se o *índice de Morse* do ponto crítico p . Os pontos críticos de índice zero são aqueles onde f assume um mínimo relativo. Os de índice m ($= \dim M$) são os pontos onde f tem máximo relativo. Os demais são chamados "pontos de sela".

Por exemplo, seja $T^2 \subset \mathbb{R}^3$ um toro de revolução, verticalmente situado. A função altura $f: T^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y, z) = z$, admite 4 pontos críticos: um mínimo, um máximo e dois pontos de sela.



pontos críticos da função altura no toro

Fig. 6

Marston Morse [1925] estabeleceu uma série de desigualdades (que levam seu nome) relacionando o número de pontos críticos de uma função $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ com os números de Betti de M . A última das desigualdades de Morse é, de fato, uma igualdade onde aparece a característica de Euler-Poincaré de M .

Mais precisamente, sejam M uma superfície compacta e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse em M , isto é, uma função cujos pontos críticos são todos não-degenerados. Para cada $i = 0, 1, \dots, m$ ($= \dim M$), sejam M_i o número de pontos críticos de f com índice i e β_i o número de Betti de dimensão i de M . As desigualdades de Morse são as seguintes:

$$\beta_i - \beta_{i-1} + \dots \pm \beta_0 \leq M_i - M_{i-1} + \dots \pm M_0 \quad (0 \leq i < m)$$

$$\beta_m - \beta_{m-1} + \dots \pm \beta_0 = M_m - M_{m-1} + \dots \pm M_0.$$

A última igualdade, evidentemente, significa que $\sum_{i=0}^m (-1)^i M_i = \chi(M)$.

Somando-se a i -ésima desigualdade de Morse com a anterior, obtêm-se, para cada $i = 0, 1, \dots, m$, a desigualdade $M_i \geq \beta_i$, segundo a qual o número de pontos críticos de índice i de uma função de Morse $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é pelo menos igual ao i -ésimo número de Betti de M . Quanto mais complicada for a homologia de M mais pontos críticos deve ter uma função de Morse $f: M \rightarrow \mathbb{R}$.

A última "desigualdade" de Morse decorre da fórmula de Poincaré-Hopf. Com efeito, se $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse, o gradiente de f é um campo de vetores tangentes a M cujas singularidades são os pontos críticos de f . Em cada ponto crítico p , o índice da singularidade do campo $\text{grad } f$ é igual a $(-1)^i$, onde i é o índice de Morse do ponto crítico p . Reciprocamente, reconhecendo-se as desigualdades de Morse, o gradiente de uma função de Morse nos dá um exemplo de campo para o qual a soma dos índices das singularidades é igual a $\chi(M)$ (sem necessidade de triangular M).

Se $\dim M = 2$, as desigualdades de Morse são $\beta_0 \leq M_0$, $\beta_1 - \beta_0 \leq M_1 - M_0$ e $\beta_2 - \beta_1 + \beta_0 = M_2 - M_1 + M_0$. Ora, sabe-se que $\beta_0 = \beta_2 =$ número de componentes conexas de M e que, em cada componente conexa, a função $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ tem pelo menos um mínimo e um máximo. Portanto $\beta_0 \leq M$ e $\beta_2 \leq M_2$. A fórmula de Poincaré-Hopf nos dá $\beta_2 - \beta_1 + \beta_0 = M_2 - M_1 + M_0$. Daí resulta que $\beta_1 - \beta_0 + (M_2 - \beta_2) = M_1 - M_0$, donde $\beta_1 - \beta_0 \leq M_1 - M_0$. Portanto, quando $\dim M = 2$, as desigualdades de Morse são consequência da fórmula de Poincaré-Hopf. No caso geral, elas são estabelecidas por um belo argumento geométrico que analisa as modificações que sofre a topologia do conjunto $\{p \in M; f(p) \leq c\} = M^c$ quando c cresce desde o mínimo até o máximo de f . A melhor referência para a Teoria de Morse é o livro de Milnor [1963].

Referência Bibliográfica

- J. Alexander, *A proof of the invariance of certain constants in Analysis Situs*, Trans. Am. Math. Soc., vol. 16 (1915) págs. 148-154.
- S. Chern, *A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds*, Annals of Math 45 (1944) pp. 747-752.
- V. Guillemin e A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice Hall (1974).
- H. Hopf, *Über die Curvatura Integra geschlossener Hyperflächen*, Math. Annalen 95 (1925), pp. 340-367.
- H. Hopf, *Vektorfelder in Mannigfaltigkeiten*, Math. Annalen 96 (1927) pp. 225-250.

- E. Lima, *Curso de Análise*, vol. 2, Coleção Projeto Euclides, IMPA (1981).
- E. Lima, *Introdução à Topologia Diferencial*, Notas de Matemática, IMPA (1961).
- J. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, Univ. of Virginia Press (1965).
- J. Milnor, *On the immersion of n -manifolds in $(n+1)$ -space*. *Comm. Math. Helv.* vol. 30 (1955), pp. 275-284.
- J. Milnor, *Morse Theory*, Princeton University Press (1963).
- M. Morse, *Relations between the critical points of a real function of n independent variables*, *Trans. Ann. Math. Soc.* 27 (1925), pp. 345-396.
- H. Poincaré, *Sur la généralization d'un théorème d'Euler relatif aux polyèdres*, *C.R. Acad. Sci. Paris*, vol. 117 (1893), pág. 144.
- H. Poincaré, *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, *Jour. Math. Pures et Appl.* (4)1 (1885) pp. 167-244.
- H. Seifert e W. Threlfall, *Lecciones de Topologia*, Inst. Jorge Juán de Matemáticas, Madrid. (1951) (Também: *A Textbook of Topology*, Academic Press, 1980.)
- J. Whitehead, *On C^1 complexes*, *Annals of Math.* 41 (1940), pp. 809-824.

Instituto de Matemática Pura e Aplicada-CNPq
Estrada Dona Castorina 110 - Jardim Botânico
22.460 Rio de Janeiro-RJ