O PRINCÍPIO DE DIRICHLET

Djairo Guedes de Figueiredo

Reflexões Iniciais. Parodiando o historiador Arnold Toynbee, podemos dizer que nenhum ramo da Matemática possui uma teoria auto-explicativa. Análise Funcional e Topologia Geral estão entre os exemplos mais claros da validade dessa asserção. São duas áreas muito bem arrumadas, comportando e, na verdade, possuindo apresentações elegantes e rigorosas, dentro da melhor tradição do método dedutivo. Ao estudá-las, o prazer e a admiração são seguidos pela indagação de como os matemáticos "inventaram" tantos teoremas e "descobriram" tantos conceitos e definições, que se articulam de modo tão harmonioso, construindo teorias de tal beleza. A resposta virá pela compreensão de que, como os Elementos de Euclides, essas apresentações representam o trabalho de síntese de muitos, muitos matemáticos ao longo de várias décadas, mais de um século com certeza. Não houve um inventor ou um criador de nenhuma dessas áreas. Muitos contribuem para a construção do edifício da Matemática. São do matemático alemão Hermann Hankel as palavras: "Nas outras ciências cada geração destroi o que a precedente construiu. Em Matemática, tão somente, cada geração acrescenta um novo andar à velha estrutura". E é surpreendente ver que, com um conserto, um reforço aqui e ali, as fundações resistem solidamente! O trabalho dos matemáticos de uma época pode ser entendido como uma laboriosa, livre e criativa atividade para a construção das pequenas, mas essenciais, peças que vão compor aquele andar. Depois é a questão, igualmente relevante, de selecionar, arrumar e juntar as várias peças, construindo se necessário o que falta. Essa atividade aparentemente desordenada é, via de regra, difícil de ser apreendida pelas gerações futuras que venham a circular por aquele andar já concluido. Entretanto é extremamente importante conhecer o que por ali se passou. Isso só será possível dentro de uma perspectiva histórica do desenvolvimento das várias áreas, dentro de um estudo genealógico de problemas importan tes. O presente trabalho é uma tentativa de exemplificar essa questão. Escolhemos o Princípio de Dirichlet porque ele possui uma longa e interessante história ligada aos problemas básicos da Teoria do Potencial, que tem suas origens nas aplicações à Mecânica, Eletricidade e Condução do Calor. É assim um exemplo, bastante instrutivo, de um problema que teve sua origem em outras áreas do conhecimento e que logo gerou uma série de questões matemáticas. Para resolvê-las fez-se necessário criar muita matemática nova. Sem dúvida o desejo de esclarecer essas questões foi uma força motora no trabalho de rigorização da Análise na 2ª metade do século XIX, até a teoria da integração de Lebesgue no começo deste século. Os trabalhos de Hilbert sobre o Princípio de Dirichlet e os de Fredholm sobre as equações integrais (visando à resolução do problema de Dirichlet) são determinantes no desenvolvimento que teve a Análise Funcional neste século.

O presente trabalho está dividido em duas partes.

Parte A. De Dirichlet a Hilbert, compreendendo

1. O Problema de Dirichlet
2. Dirichlet
3. O método de Dirichlet
4. Análise crítica do Princípio de Dirichlet
5. O exemplo de Hadamard
6. O exemplo de Weierstrass
7. O Princípio após as objeções de Weierstrass

Parte B. O Princípio no Século XX, compreendendo

8. Um resultado da topologia
9. A topologia fraca
10. Semicontinuidade inferior
11. Reformulação do problema de Dirichlet
12. O espaço de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$ e seu subespaço $W_0^{1,2}(\Omega)$
13. O problema de Dirichlet generalizado e o Princípio de Dirichlet
14. A regularidade da solução generalizada
15. Outros resultados.

Parte A: De Dirichlet a Hilbert

1. O problema de Dirichlet. Eis um problema popular em Equações Diferenciais Parciais:

(1) $$\Delta u = 0 \text{ em } \Omega, \quad u = h \text{ em } \partial\Omega.$$

Expliquemos a notação: Ω é um subconjunto aberto e conexo de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, que é concisamente chamado de *domínio*. $\partial\Omega$ é sua fronteira. Δ é o Laplaciano, um operador diferencial de segunda ordem definido por

$$\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

A função real h definida em $\partial\Omega$ é um dado do problema. Para efeitos de nossa história vamos supor que h seja contínua. O problema (1) consiste, então, em procurar uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ que seja harmônica (isto é, satisfaça à equação $\Delta u = 0$) e que seja igual a h na fronteira $\partial\Omega$. $\bar{\Omega}$ designa a aderência de Ω, isto é, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

O problema (1) é conhecido como o *Problema de Dirichlet.* É curioso observar que Dirichlet não o resolveu! Pelo contrário, há indicações de que ele tenha oferecido, em suas aulas na Universidade de Berlim, uma solução errada. Entretanto, por uma questão de deferência, preferimos dizer que sua solução foi incompleta! Mais do que deferência é um ponto de justiça. O método imaginado por Dirichlet para a resolução do problema (1) é realmente admirável. Talvez se trate de um dos primeiros exemplos de transformação de um problema de Equações Diferenciais Parciais em uma questão do Cálculo das Variações.

2. Dirichlet. Peter Gustav Lejeune Dirichlet nasceu em Düren, hoje uma cidade na Alemanha Ocidental, em 1805 e faleceu no ano de 1859 em Göttingen, para onde se transferira em 1855, a fim de ocupar a cátedra, vaga com a morte de Gauss naquele mesmo ano. O período mais profícuo de sua carreira matemática ocorreu em Berlim (1828-1855). Dirichlet é conhecido por suas importantes contribuições em vários ramos da Matemática. Em Teoria dos Números, é particularmente belo seu teorema sobre a existência de um número infinito de primos na progressão aritmética $a, a+b, a+2b, a+3b, \ldots,$ onde $a \div b$ e $b \div a$ não são inteiros. A ele se deve o conceito moderno de função. São também relevantes suas contribuições à teoria das séries, em particular, seu critério para a convergência das séries de Fourier, cf. referência [2]. E finalmente, o que mais nos concerne aqui, é o seu tratamento do problema (1), que explicaremos no próximo parágrafo. Alertamos o leitor para o fato de que há lacunas no que lá diremos. Mas, esse é nosso plano: apresentar as idéias de Dirichlet, fazer as críticas com os olhos de um observador atual, mostrar como tudo pode ser consertado e tornar-se matematicamente aceitável.

3. O método de Dirichlet. (i) Seja A a classe das funções $u \in C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, que são iguais a h em $\partial\Omega$ e tais que o funcional dado por

$$\Phi(u) = \int |\nabla u|^2 dx, \qquad (*)$$

esteja bem definido (i.e., $\Phi(u) < \infty$ para todo $u \in$ A). Aqui ∇ designa o gradiente de u, isto é, a função vetorial $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$. O funcional Φ é conhecido como a *integral de Dirichlet*. A expressão "funcional" é utilizada para designar uma função real cujo campo de definição é um conjunto de funções.

(ii) Seja $u_0 \in$ A a função onde Φ assume seu ínfimo, i.e.

$$\min_{u \in A} \Phi(u) = \Phi(u_0).$$

(iii) Dado $v \in$ A com $v = 0$ em $\partial\Omega$, definamos a função real de variável real

$$\phi(t) = \int |\nabla(u_0 + tv)|^2 dx.$$

Como u_0 é um mínimo de Φ, segue-se que $\phi'(0) = 0$. Usando esse fato e a regra da cadeia para calcular a derivada de ϕ obtemos

$$\int \nabla u_0 \cdot \nabla v dx = 0. \tag{2}$$

(iv) Finalmente, usando o teorema do divergente, obtemos

(*) Neste trabalho, quando não for indicado explicitamente, a integral é sobre todo Ω.

$$(3) \qquad \int (\Delta u_0) v dx = 0$$

expressão que é válida para todo $v \in A$ com $v = 0$ em $\partial\Omega$. Daí se conclui que $\Delta u_0 = 0$ em Ω.

Nota. Este método foi utilizado por Bernhard Riemann (1826-1866) em seus importantes artigos sobre funções holomorfas, superfícies de Riemann e integrais abelianas. A ele se deve a nomenclatura "Princípio de Dirichlet" para denominar esse método.

4. Análise crítica do princípio de Dirichlet. Três dos passos da seção anterior apresentam lacunas sérias. Em verdade, tratam-se de questões bastante delicadas, que só foram devidamente solucionadas quase meio século após Dirichlet. Analisemos cuidadosamente cada uma das etapas do método.

Passo (i). Dada uma função h contínua em $\partial\Omega$, será verdade que existe pelo menos uma função $u \in C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, com $u = h$ em $\partial\Omega$ e tal que $\Phi(u) < \infty$? Em outras palavras, será o conjunto A não vazio? A resposta a essa pergunta é: existem funções h, contínuas em $\partial\Omega$, para as quais o conjunto A é vazio! Esse fato invalida o resto do raciocínio utilizado por Dirichlet, para o caso de tais funções. O primeiro exemplo de uma tal função foi dado por *F.* Prym em 1871, cf. [8]. Entretanto, parece que seu trabalho passou despercebido e a maior parte dos autores modernos atribui a Jacques-Salomon Hadamard (1865-1963) a descoberta de uma tal função, em 1906. Na seção 5 apresentaremos esse interessante exemplo.

Passo (ii). A existência de u_0 é uma questão muito delicada. O fato de Φ ser limitado inferiormente não basta, nem de longe, para assegurar que o seu ínfimo seja assumido. É pouco provável que Dirichlet ou Riemann tenham se detido na análise dessa questão. Em verdade, como diz Dieudonné [8], no estudo de *todos* os problemas do Cálculo das Variações desde o começo do Século XVIII, essa existência era tida como um fato e admitida sem demonstração. [Como todos esses problemas representam fenômenos físicos, cremos que a questão da existência nem mesmo surgisse, uma vez que seria a própria existência do fenômeno que garantiria a existência de solução para o problema matemático! Essa atitude, que parece ser prevalente naquela época, tem, entretanto, uma falha conceitual. Como garantir que o modelo matemático represente bem o fenômeno físico? Aliás, um dos modos de verificar a validade do modelo é mostrar que o problema matemático possui solução com as propriedades que se esperam. Assim, teríamos, de fato, a comprovação de que os modelos são adequados. No caso presente, a solução do problema (1) representa a distribuição da temperatura de equilíbrio, $u(x)$, em um corpo Ω, cuja fronteira $\partial\Omega$ é mantida à temperatura $h(x)$, constante no tempo. A afirmação feita em (ii) pode ser interpretada como a condição física de que a energia térmica contida no corpo é um mínimo]. Sob o ponto de vista matemático, é inaceitável admitir-se, sem demonstração, que Φ assuma seu ínfimo. Karl Weierstrass (1815-1897) esteve entre os primeiros que levantaram dúvidas sobre a validade do método de Dirichlet no que se refere ao passo (ii). Ele produziu exemplos de funcionais limitados inferiormente e que não assumem o seu ínfimo. Veja a seção 6. Hoje em dia é difícil compreender que alguém possa ter pensado que o passo (ii) não requeresse comprovação. Com toda nossa cultura atual de Análise e Topologia, sabemos que a questão tem a ver com algum tipo de continuidade de Φ e de compacidade da classe A. Mais adiante voltaremos a esse ponto. Entretanto, há que se atentar para o fato de que a rigorização da Análise é obra dos matemáticos da segunda metade do século XIX, sendo o próprio Weierstrass um de seus mais importantes contribuidores. (Lembre que a formalização do conceito de números real, base imprescindível para uma estruturação rigorosa da Análise, só foi completada na década de 1870 por Cantor e Dedekind.) Um dos ingredientes importantes, aqui utilizado, é a teoria da integração desenvolvida por Lebesgue em 1902. Essa teoria permite a consideração de espaços de funções que são completos em normas definidas por integrais, como por exemplo, o importante espaço $L^2(\Omega)$ que aparecerá mais adiante.

Passo (iii). Neste reside a idéia principal por trás do método. A meta de se encontrar a solução do problema diferencial se transforma na questão de obter um mínimo para um funcional associado, que é um problema do Cálculo das Variações. Os problemas do Cálculo das Variações envolvendo funções de uma variável real haviam sido obje to de estudos intensos desde os tempos de Euler, passando por Lagrange e outros. Neste caso, a questão inicial era obter a solução de um problema variacional (o mínimo de um certo funcional, como no caso do problema da braquistócrona), o qual era levado para a resolução de uma equação diferencial associada, a chamada equação de Euler-Lagrange. Com Dirichlet, o procedimento se deu no sentido contrário.

Passo (iv). Novamente estamos em presença de uma questão nada simples. A função u_0 obtida (quando possível!) é apena de classe C^1. Há todo um esforço adicional necessário para mostrar que u_0 é, em verdade, de classe C^2 e, consequentemente, a integração por partes realizada neste passo é justificável, cf. a seção 14. Na teoria moderna das equações diferenciais parciais, esse passo é conhecido como a teoria da regularização.

5. O exemplo de Hadamard. Considere o caso em que Ω é o disco unitário em R^2. O funcional Φ pode ser escrito em coordenadas polares (r, θ) como:

$$\Phi(u) = \int [u_r^2 + r^{-2} u_\theta^2] r dr d\theta. \tag{4}$$

O problema (1) neste caso pode ser resolvido explicitamente usando--se o método de Fourier (separação de variáveis, aproveitando a simetria do domínio; a resolução das equações diferenciais ordinárias obtidas; uso das séries de Fourier), cf. [2]. A solução de (1) é então, dada por

$$u(r, \theta) = \begin{cases} \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta), & r < 1 \\ h(\theta), & r = 1, \end{cases} \tag{5}$$

onde a_n, b_n são os coeficientes de Fourier da função $h(\theta)$, isto é,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \cos n\theta d\theta, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \operatorname{sen} n\theta d\theta.$$

[Observe que, como estamos supondo apenas a continuidade de h em $\partial\Omega$, não é necessariamente verdade que $h(\theta)$ seja igual à sua série de Fourier. Assim, a definição de $u(r, \theta)$ em (5) requer, de fato, representações diferentes para $r < 1$ e $r = 1$. Não obstante, $u(r, \theta)$ é contínua em $\bar{\Omega}$.] Agora observe que Φ será finita para alguma função na classe A se e só se o for para a solução u do problema (1) dada em (5). Por outro lado,

$$(6) \qquad \Phi(u) = \lim_{t \uparrow 1} \Phi_t(u), \qquad \Phi_t(u) = \int_{\Omega_t} |\nabla u|^2 dx,$$

onde Ω_t, $0 < t < 1$, é o disco de raio t centrado na origem. Usando (5) obtemos

$$\Phi_t(u) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2+b_n^2)t^{2n}.$$

Daí se segue que para cada $k \geq 1$, temos

$$\pi \sum_{n=1}^{n} n(a_n^2+b_n^2)t^{2n} \leq \Phi_t(u) \leq \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2 + b_n^2).$$

Fazendo t tender a 1, vemos que a integral de Dirichlet $\Phi(u)$, quando u é a solução do problema (1), converge se e só se a série

$$(7) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2 + b_n^2)$$

convergir. O exemplo de Hadamard se constroi, então, baseado nessa conclusão. A função

$$h(\theta) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \operatorname{sen}(j!\theta)$$

é contínua, pois a série que a define converge uniformemente. Para essa função, $a_n = 0$ para todo n, $b_n = \frac{1}{j^2}$ quando $n = j!$, e $b_n=0$ para os demais n. Assim, a série em (7) é, neste caso:

$$\sum_{j=1}^{\infty} j!j^{-4},$$

a qual obviamente diverge.

6. O exemplo de Weierstrass. Minimizar o funcional

$$\Phi(u) = \int_{-1}^{1} x^2 u'(x)^2 dx$$

na classe A das funções C^1 em $[-1, 1]$, satisfazendo às condições $u(-1) = -1$, $u(1) = 1$. É fácil ver que existem funções u em A para as quais $\Phi(u)$ é tão próximo de zero quando se queira. Entretanto, se existisse u_0 em A tal que $\Phi(u_0) = 0$, deveríamos ter $u_0'(x) = 0$, ou seja $u_0(x) =$ constante, o que é impossível de ser compatibilizado com as condições nas extremidades do intervalo $[-1,1]$.

7. O princípio após as objeções de Weierstrass. Até o final do século XIX, o Princípio de Dirichlet permaneceu como um belo, mas inviável, programa de trabalho para a resolução de problemas do Cálculo das Variações. Carl Neumann chegou a dizer que o Princípio "tão belo e que poderia ser tão útil no futuro, afundou e sumiu para sempre de nossa vista", cf. [1, pág. 66]. Em 1899, David Hilbert apresentou à Sociedade Alemã de Matemática um trabalho de apenas 5 páginas no qual ele justifica rigorosamente os vários passos do Princípio de Dirichlet. Esse trabalho é um marco espetacular na teoria das Equações Diferenciais Parciais. Hilbert conseguiu o que muitos matemáticos eminentes da segunda metade do século XIX tentaram e não conseguiram: ressuscitar o Princípio de Dirichlet; aliás em alusão ao prognóstico fúnebre de Neumann, Hilbert costumava dizer que seu trabalho era a ressurreição do Princípio [1, pág. 67]. A possibilidade de usar o método variacional para resolver problemas na teoria das equações diferenciais, como demonstrado por Hilbert, proporcionou aos matemáticos do século XX uma ferramenta poderosa no ataque a esses problemas. A teoria das equações lineares elípticas de ordem superior, como desenvolvida por H. Weyl, L. Gårding, K.O. Friedrichs, L. Nirenberg, P.D. Lax, F.E. Browder e outros, seguiu as idéias básicas do Princípio de Dirichlet.

Nota. O problema de Dirichlet, para o qual o Princípio fora criado por Dirichlet, não permaneceu inexplorado durante o período que pre cedeu o trabalho de Hilbert. Aliás, as pesquisas, a ele ligadas, realizadas nesse período por matemáticos como Carl Neumann, Hermann Amandus Schwarz, Henri Poincaré são passos importantes para o desenvolvimento futuro da Análise Funcional e das Equações Diferenciais Parciais. Inspirado pelos trabalhos de Neumann, Ivar Fredholm desenvolveu sua teoria das equações integrais e obteve em 1900 uma outra resolução do problema de Dirichlet. Essa teoria é um dos mais importantes marcos no processo evolutivo da Análise Funcional.

Parte B: O princípio no século XX

8. Um resultado da topologia: "*Seja* $f:X \to R$ *uma função real semicontínua inferiormente definida em um espaço topológico compacto. Então:* (i) f *é limitada inferiormente,* (ii) *existe* $x_0 \in X$ *tal que*

$$f(x_0) = \operatorname*{Inf}_X f \text{."}$$

Esse é um teorema bem conhecido de Topologia Geral. Veja por exemplo a referência [3]. Para conveniência do leitor ofereceremos sua demonstração a seguir, e dedicaremos a Seção 10 ao conceito de semicontinuidade inferior.

Definição. Uma função real $f:X \to R$ definida em um espaço topológico é *semicontínua inferiormente* se a imagem inversa, pela f, de qualquer semi-reta aberta $(a, +\infty)$ é um aberto de X.

Demonstração do teorema acima. (i) Como

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(-n, \infty)$$

segue-se, do fato de X ser compacto, que existe n, inteiro positivo, tal que

$$X = \bigcup_{n=1}^{n_0} f^{-1}(-n, \infty),$$

o que mostra que $f(x) > -n_0$, para todo $x \in X$. (ii) Seja ℓ o ínfimo de f em X. Suponhamos, por contradição, que ℓ não seja assumido. Então

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(\ell + \frac{1}{n}, \infty).$$

Usando a compacidade de X obtemos um n_0 tal que

$$X = \bigcup_{n=1}^{n_0} f^{-1}(\ell + \frac{1}{n}, \infty),$$

o que implica que $f(x) > \ell + n_0^{-1}$ para todo $x \in X$. Isso contradiz o fato de ℓ ser o ínfimo de f em X. $\square$

Nota. Com a presente secção iniciamos a segunda parte de nosso trabalho. Vamos apresentar inicialmente uma certa porção de matemática moderna: alguns resultados de Topologia Geral e de Análise Funcional. A seguir vamos ver como isso se liga ao Princípio de Dirichlet. Evidentemente não poderemos ser auto-suficientes. O leitor interessado deverá procurar textos sobre essas áreas. Para Topologia Geral recomendamos as referências [3] e [7]. Para Análise Funcional, as referências [6] e [9].

9. A topologia fraca. A bola unitária fechada, $\overline{B_1(0)}$, de um espaço de Banach E é um espaço topológico (em verdade, um espaço métrico) com a topologia da norma. Entretanto, com essa topologia, pode-se demonstrar que $\overline{B_1(0)}$ é compacto se e só se E for de dimensão finita. Como veremos mais adiante, será importante tentar aplicar o teorema da seção 8 quando $X = \overline{B_1(0)}$. Esbarramos, porém, com a dificuldade inicial de que, no caso interessante para nós, E é um espaço de funções, e sempre de dimensão infinita. Daí a necessidade de considerar em $\overline{B_1(0)}$ outras topologias que o tornem um espaço compacto. Mas, que topologia? Vejamos. Por que é que a bola $\overline{B_1(0)}$ de um espaço de Banach de dimensão infinita não é compacta? A razão é que a topologia da norma tem abertos em demasia! Podemos entender isso seguindo duas linhas diferentes de raciocínio, de acordo com o conceito de compacidade que se utilize: (i) Heine-Borel: "X é compacto se toda cobertura de X por abertos possui uma subcobertura finita". (Esse foi o conceito usado na demonstração do teorema da seção 8). No caso em pauta, teríamos tantos abertos à nossa disposi ção que seria fácil construir coberturas infinitas de $\overline{B_1(0)}$ por abertos que utilizariam de modo essencial todos esses abertos. Exemplo: $X = \ell^2$. As bolas abertas $B_{\sqrt{2}}(\pm e_j)$, onde $e_j = (0,\ldots,0,1,0,\ldots)$, cobrem $\overline{B_1(0)}$. Entretanto, nenhum número finito delas basta. (ii) *Bolzano Weierstrass*: "X é compacto se todo subconjunto infinito possui uma sequência convergente". Quanto mais abertos houver na topologia mais difícil será para que uma dada sequência convirja. No nosso caso, a não compacidade de $\overline{B_1(0)}$ é vista, por exemplo, em $X = \ell^2$, tomando o conjunto infinito (e_j), $j = 1,2,\ldots$. Como $\|e_j - e_k\| = \sqrt{2}$ para $j \neq k$, não é possível retirarmos desse conjunto uma sequência convergente.

Consequentemente, a topologia a considerar deve ter menos abertos que a topologia da norma. Para tal utilizamos a *topologia fraca* em E, assim definida. Seja E^* o espaço de Banach dos funcionais lineares contínuos em E. A coleção de todos os conjuntos $V(A, \varepsilon)$ definidos a seguir constituem uma base de vizinhanças do 0 para a topologia fraca de E:

$$V(A, \varepsilon) = \left\{x \in E;\ |x^*(x)| < \varepsilon,\quad x^* \in A\right\},$$

para todo subconjunto finito A de E^* e todo $\varepsilon > 0$. Nem todo espaço de Banach munido com a topologia fraca é tal que $\overline{B_1(0)}$ seja compacta nessa topologia. Em verdade, os espaços de Banach, para os quais essa propriedade é válida, constituem a classe dos *espaços reflexivos*. (Esse é o teorema de Eberlein-Smulian cf. [9]). Essa classe inclue os espaços de Hilbert, os espaços $L^p(\Omega)$, $1<p<\infty$, os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, $m \geq 1$, $1 < p < \infty$. A ela não pertencem os espaços $C^m(\bar{\Omega})$, $m \geq 0$. Esta última observação é crucial! É por isso, que vamos mudar a classe das funções admissíveis utilizadas no Princípio de Dirichlet. Como tencionamos aplicar o teorema da seção 8, e um certo tipo de compacidade será necessário, vamos trabalhar com o espaço de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$. Mais precisamente, trabalharemos com um subespaço dele, $W_0^{1,2}(\Omega)$, que é formado de funções que se "anulam" na fronteira. Neste ponto pode parecer ao leitor que tal escolha não tem uma razão sólida; entretanto, rogamos a sua paciência até a Seção 13, quando tudo estará claro. Espe ra-se! A palavra anulam está entre haspas pois as funções consideradas são do L^2; um elemento do L^2 é uma classe de equivalência de funções; duas funções u e u estão na mesma classe se $u_1 = u_2$ fora de um conjunto de medida zero. Portanto se Γ é um conjunto de medida zero, $u = 0$ em Γ não individualiza nenhuma classe de equivalência. Voltaremos mais adiante a essa questão quando introduzirmos a noção de "traço".

10. Semicontinuidade inferior. Na seção 8 já definimos o conceito de semicontinuidade inferior. Uma função real $f: X \to R$ definida em um espaço topológico X é *sequencialmente semicontínua inferiormente* se, para toda sequência convergete em X, $x_n \to x$, tivermos que

$$f(x) \leq \lim\inf f(x_n).$$

O conceito de semicontinuidade sequencial é bem mais cômodo e mais fácil de ser utilizado do que aquele de semicontinuidade definida na seção 8. Entretanto é um conceito mais fraco; mas pode-se provar os seguintes fatos: (i) toda função semicontínua inferiormente é sequencialmente semicontínua inferiormente; (ii) em espaços métricos (e, mais geralmente, em espaços topológicos satisfazendo o 1º Axioma de Enumerabilidade) os dois conceitos são equivalentes.

Vamos agora estudar o conceito de semicontinuidade inferior para funções reais $f: E \to R$ definidas em um espaço de Banach munido da topologia fraca. Neste caso, os dois conceitos definidos acima recebem mais um qualificativo: "fracamente". Quando é que uma função fracamente sequencialmente semicontínua inferiormente é também fracamente semicontínua inferiormente? Daremos a resposta para o caso de funções reais $f: A \to R$ definidas em um subconjunto *limitado* A de um espaço de Banach E; portanto, o espaço topológico em pauta será A com a topologia induzida pela topologia fraca de E. Temos então:

(i) Se $f: A \to R$ for fracamente sequencialmente semicontínua inferiormente, e o dual E^* de E for separável, então f é fracamente semicontínua inferiormente. (Isso se segue do fato de A, muni do da topologia fraca, satisfazer o 1º Axioma de Enumerabilidade. Mais precisamente, segue-se do seguinte teorema: "A topologia fraca da bola unitária fechada de um espaço de Banach é metrizável se e só se E^* for separável". Ver [10, Theorem V.5.2, página 426]. Em particular, o resultado é válido se E for reflexivo e separável, pois, nesse caso, a separabilidade de E^* seguir-se-ia.

(ii) Se $f:A \to R$ for fracamente sequencialmente semicontínua inferiormente e E for um espaço de Banach reflexivo, então f é fracamente semicontínua inferiormente. A demonstração desse fato repousa no seguinte teorema: "Seja A um conjunto limitado num espaço de Banach reflexivo. Então, para todo x na aderência fraca de A existe uma sequência (x_n) de pontos de A que converge fracamente para x". Ver [4, pág. 81]. Na discussão precedente, é essencial restringirmo-nos a funções definidas em um conjunto limitado; há um exemplo de Von Neumann [10, p. 438] de um subconjunto (não limitado) A de um espaço de Hilbert, tal que 0 pertence à sua aderência fraca, mas não existe nenhuma sequência de elementos de A convergindo para 0.

Portanto, o teorema da seção 8 implica o seguinte resultado: "*Sejam X a bola unitária fechada de um espaço de Banach reflexivo, e $f:X \to R$ uma função sequencialmente fracamente semicontínua inferiormente. Então f é limitada inferiormente e assume seu ínfimo em X.*

11. Reformulação do Problema de Dirichlet. Será mais conveniente discutirmos o problema

$$(8) \qquad -\Delta u = g \quad \text{em} \quad \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega,$$

que é também um problema de Dirichlet. Ω é um domínio limitado e $g \in C^0(\bar{\Omega})$ é uma função real dada. Uma *solução clássica de* (8) é uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ que satisfaça a equação em (8) e que seja igual a 0 em $\partial\Omega$. O problema (8) é, de certo modo, equivalente ao problema (1), cf. [5, p. 107]. Alertamos o leitor para o fato de que o problema (8), com a mera hipótese de g ser contínua, em geral *não* possui solução clássica. Um exemplo de uma tal fun ção é o seguinte: Ω é o disco unitário em R^2, e $|x|=(|x_1|^2+|x_2|^2)^{\frac{1}{2}}$ é a norma de $x=(x_1,x_2)\in R^2$:

$$g(x)=\begin{cases}0 & , x=0\\ (\log|x|)^{-2}|x|^{-2}x_1x_2, & x\neq 0.\end{cases}$$

Portanto, se se deseja que (8) possua uma solução deve-se requerer mais condições da função g. Uma condição suficiente é g ser Hölder-contínua; foi precisamente para esse propósito que Hölder introduziu esse conceito! Compare essa situação com o caso das equações diferenciais ordinárias: se $u''(x)=g(x)$, $x\in R$, e g for contínua então uma solução u dessa equação é necessariamente de classe C^2, o que se segue através de uma aplicação simples do Teorema Fundamental do Cálculo.

É possível tratar o problema (8) diretamente dentro do aparato dos espaços de funções diferenciáveis com derivadas Hölder contínuas, e obter-se a solução clássica. Entretanto, a partir da década de 1950, desenvolveu-se intensamente uma outra linha de ataque que tem a vantagem de se aplicar a muitos outros problemas lineares e não lineares. É essa a direção que preferimos neste trabalho. Neste método, formula-se um "problema generarilizado" associado a (8). A característica básica desse novo problema é que uma solução clássica de (8) é também solução dele, e quase (!) vice-versa: uma solução dele, que possuir propriedades adequadas de regularidade, é também solução de (8). Para formular o problema variacional, necessitamos de um espaço de Sobolev que introduziremos na próxima seção. Mas antes disso vamos motivar a forma que o problema generalizado terá. $C_c^1(\Omega)$ designa o espaço das funções continuamente diferenciáveis e de suporte compacto em Ω; o suporte de uma função $u:\Omega\to R$ é a aderência do conjunto $\{x\in\Omega: u(x)\neq 0\}$. Multiplicando a equação em (8) por $v\in C_c^1(\Omega)$ e integrando por partes obtemos

$$(9)\qquad \int \nabla u\cdot\nabla v=\int gv,\qquad \forall\ v\in C_c^1(\Omega)$$

Podemos, pois, formular o seguinte problema: encontrar

$u \in C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ que satisfaça (9) e que seja igual a 0 em $\partial\Omega$. Este problema é mais fraco que o problema (8): toda solução de (8) é solução desse novo problema, mas a solução desse novo problema é, em princípio, uma função de classe C^1 apenas. Como dissemos antes não vamos trabalhar com os espaços $C^m(\bar{\Omega})$ de funções diferenciáveis, pois eles não possuem a propriedade de reflexividade. Portanto teremos que reformular o problema (8) usando (9), mas considerando funções em espaços de Sobolev.

12. O espaço de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$ e seu subespaço $W_0^{1,2}(\Omega)$. Faz-se necessário estender o conceito de derivada. Dizemos que uma função $u \in L^2(\Omega)$ possui *derivadas primeiras em* $L^2(\Omega)$ se existirem funções $u_j \in L^2(\Omega)$, $j = 1,\dots,N$, tais que

$$(10) \qquad \int u_j v = -\int u D_j v, \qquad \forall\, v \in C_c^1(\Omega)$$

onde $D_j = \partial/\partial x_j$. Esses u_j são chamados as *derivadas fracas* de u. Se u for de classe C^1 em Ω, então u_j é a derivada $D_j u$ usual. Por essa razão, designamos u_j por $D_j u$, no caso geral também. *Definimos* $W^{1,2}(\Omega)$ como sendo o subespaço das funções do $L^2(\Omega)$ que possuem derivadas primeiras $D_j u$ em $L^2(\Omega)$. Definindo em $W^{1,2}(\Omega)$ a norma

$$(11) \qquad \|u\|_{W^{1,2}} = \left[\int u^2 + \int |\nabla u|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

pode-se provar que ele é um espaço de Banach. Além disso, essa norma provém do produto interno

$$(u,v)_{W^{1,2}} = \int uv + \int \nabla u \cdot \nabla v$$

o que faz de $W^{1,2}(\Omega)$ um espaço de Hilbert. Nesta seção, faremos uma série de afirmações, muitas delas nada óbvias; o leitor interessado poderá consultar [6] para ver as demonstrações. Pode-se provar os seguintes fatos:

(i) Teorema de Meyers-Serrin. O conjunto $C^1(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ é denso em $W^{1,2}(\Omega)$.

(ii) Teorema de imersão de Sobolev. A inclusão $W^{1,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ é compacta; isto é, uma sequência limitada (u_n) em $W^{1,2}(\Omega)$ possui uma subsequência convergente em $L^2(\Omega)$. Supomos aqui que Ω seja de classe C^1, apesar do resultado ser verdadeiro em condições mais gerais.

(iii) O traço de uma função. Suponha Ω de classe C^1. A cada $u \in W^{1,2}(\Omega)$ corresponde uma função $\tilde{u} \in L^2(\partial\Omega)$, chamado o traço de u em $\partial\Omega$ tal que

$$\|\tilde{u}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$$

onde C é uma constante independente de u. A nomenclatura "traço" se justifica, porque no caso de $u \in C^1(\bar{\Omega})$, $\tilde{u}$ é de fato a restrição de u a $\partial\Omega$.

Definimos agora $W_0^{1,2}(\Omega)$ como sendo o subespaço de $W^{1,2}(\Omega)$ formado pelo completamento de $C_c^1(\Omega)$ na forma de $W^{1,2}$. Segue-se imediatamente, do Teorema dos traços, que o traço de $W_0^{1,2}(\Omega)$ em $\partial\Omega$ é zero em quase toda parte. Usando o Teorema Fundamental do Cálculo pode-se provar que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$(12) \qquad \int u^2 \leq C\int |\nabla u|^2, \qquad \forall\ u \in C_c^1(\Omega),$$

e consequentemente, por continuidade, para todo $u \in W^{1,2}(\Omega)$. A expressão (12) é conhecida como a *desigualdade de Poincaré*. Ela mostra que, em $W_0^{1,2}(\Omega)$, a norma (11) e a norma

$$(13) \qquad \|u\| = \left(\int |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

são equivalentes. Consideraremos em $W_0^{1,2}(\Omega)$ sempre a norma (13).

13. O problema de Dirichlet generalizado e o princípio de Dirichet. Após as observações das seções 11 e 12, é natural agora considerar o problema: achar $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que

$$(14) \qquad \int \nabla u \cdot \nabla v = \int gv \qquad \forall\ v \in C_c^1(\Omega),$$

o qual é chamado o problema de Dirichlet generalizado. Nesta formulação generalizada, requer-se apenas que a função g seja de $L^2(\Omega)$.

A seguir, considere o funcional $\Phi: W^{1,2}(\Omega) \to R$ dado por

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int|\nabla u|^2 - \int gu, \tag{15}$$

que evidentemente está bem definido sobre todo o espaço $W_0^{1,2}(\Omega)$. Se u_0 for um mínimo (ou, mais geralmente, um ponto crítico) de Φ então u_0 é solução do problema de Dirichlet generalizado. De fato, (14) é a equação de Euler-Lagrange do funcional (15). Portanto, a pesquisa da solução de (14) se reduz à questão de obter o ponto crítico do funcional (15). [Observe que (14) possui no máximo uma solução. De fato se u_1 e u_2 fossem duas soluções de (14), então u_1-u_2 seria tal que o produto interno $(u_1-u_2, v)_{W^{1,2}} = 0$ para todo $v \in C_c^\infty(\Omega)$ e por continuidade para todo $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Tomando então $v = u_1-u_2$, obteríamos $||u_1-u_2|| = 0$ ou seja $u_1 = u_2$].

A questão de existência de um mínimo para Φ é estabelecida utilizando-se o teorema da seção 8. Usando, sucessivamente, a desigualdades de Cauchy-Schwarz para funções do L^2 e a desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{2}||u||^2 - ||g||_{L^2}||u||_{L^2} \geq \frac{1}{2}||u||^2 - C^{\frac{1}{2}}||g||_{L^2}||u||.$$

Portanto, existe $R > 0$ tal que

$$\Phi(u) > 0 \qquad \forall\ ||u|| \geq R. \tag{16}$$

É imediato ver que o funcional é fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente. De fato, a norma de qualquer espaço de Banach tem essa propriedade, e pelo teorema de imersão de Sobolev a aplicação $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \to \int gu$ é fracamente sequencialmente contínua. Como $W_0^{1,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, segue-se que podemos aplicar o teorema do final da seção 8 para concluir que existe $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $||u_0|| \leq R$ tal que

$$\Phi(u_0) = \text{Min}\left\{\Phi(u) : ||u|| \leq R\right\}.$$

Como $\Phi(0) = 0$ segue-se que $\Phi(u_0) \leq 0$ e consequentemente

$\|u_0\| < R$, em vista de (16). Vê-se também que u_0 é o mínimo de Φ em todo $W_0^{1,2}(\Omega)$. De acordo com o que observamos anteriormente, u_0 é a solução do problema de Dirichlet generalizado.

14. A regularidade da solução generalizada. Suponhamos agora que a função g seja Hölder contínua: $g \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$. Mostraremos que a solução u_0 obtida na seção anterior possui derivadas segundas contínuas. Uma vez demonstrado esse fato, poderemos integrar por partes em (9) e obter

$$-\int \Delta u_0 \cdot v = \int gv \qquad \forall\ v \in C_c^1(\Omega),$$

o que provará que $-\Delta u_0 = g$. Para completar a asserção de que u_0 é a solução clássica do problema (8) restaria somente demonstrar que $u_0 \in C^0(\bar{\Omega})$, uma vez que já sabemos que $u_0 = 0$ no sentido do $L^2(\partial\Omega)$; para esse passo recomendamos o livro de Fritz John, "Partial Differential Equations".

Necessitaremos de dois resultados da Teoria do Potencial, para cujas demonstrações recomendamos a referência [5]. Incentivamos o leitor a ir lá e estudar as demonstrações que não são difíceis!

(i) A solução fundamental da equação $\Delta u = 0$ (também chamada de potencial newtoniano) é a função

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2-N)\sigma_N}\,|x|^{2-N}, & \text{para } N \geq 3 \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi}\log|x|, & \text{para } N = 2, \end{cases}$$

onde σ_N é a área da fronteira da bola unitária de R^N. Prova-se que se $g \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ então $u = g * G \in C^2(\Omega)$ e $\Delta u = g$ em Ω. A função u é definida por

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x-y)g(y)dy.$$

(ii) Lema de Weyl. Se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ e

$$\int \nabla u \cdot \nabla v = 0, \qquad \forall\ v \in C_c^1(\Omega)$$

então $u \in C^{\infty}(\Omega)$ e $\Delta u = 0$ em Ω.

Provemos agora que $u_0 \in C^2(\Omega)$. Basta mostrar que $u_0 \in C^2(\Omega')$ para abertos Ω', tais que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Seja $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ com $\phi = 1$ em Ω'. Então $-\phi g \in C_c^\alpha(\Omega)$, e do fato (i) acima obtemos que

$$\omega = (-\phi g)*G \in C^2(\Omega) \qquad \text{e} \qquad \Delta\omega = -g \quad \text{em} \quad \Omega'.$$

Consequentemente, usando integração por partes, temos

$$\int \nabla(u_0-\omega)\cdot\nabla v = 0 \qquad \forall\ v \in C_c^1(\Omega')$$

de onde se segue, usando o lema de Weyl, que $u_0 - \omega \in C^\infty(\Omega')$. Como $\omega \in C^2(\Omega)$, obtemos finalmente que $u_0 \in C^2(\Omega')$, como queríamos provar.

15. Outros resultados. O grande mérito do método variacional utilizado neste trabalho para resolver o problema de Dirichlet (8) é que ele serve para tratar muitos outros problemas lineares e não lineares. Por exemplo, seja $f:R \to R$ uma função contínua *limitada* e considere o problema de Dirichlet não linear

$$(17) \qquad -\Delta u = f(u) \quad \text{em} \quad \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

O problema generalizado associado é: determinar $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que

$$(18) \qquad \int \nabla u\cdot\nabla v = \int f(u)v \qquad \forall\ v \in C_c^1(\Omega).$$

O segundo membro de (18) faz perfeito sentido porque $f(u) \in L^2(\Omega)$, quando $u \in L^2(\Omega)$; mais que isso, ela pertence a $L^\infty(\Omega)$. Agora escrevamos o funcional $\Phi:W_0^{1,2}(\Omega) \to R$, cuja equação de Euler-Lagrange é (18). Seja

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds, \qquad t \in R.$$

Então

$$(19) \qquad \Phi(u) = \frac{1}{2}\int|\nabla u|^2 - \int F(u).$$

Observe que a segunda integral em (19) faz sentido porque

(20) $$|F(t)| \leq C|t|, \qquad \forall\, t \in R,$$

e, consequentemente, $F(u) \in L^2(\Omega)$, quando $u \in L^2(\Omega)$. Agora, usando (20) e a desigualdade de Poincaré obtemos

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - C_1\|u\|$$

onde C_1 é uma constante que depende somente de C em (20) e do volume de Ω. Logo existe $R > 0$ tal que

(21) $$\Phi(u) > \Phi(0), \qquad \forall\, \|u\| \geq R.$$

A idéia agora é aplicar o teorema da seção 8 ao funcional Φ restrito à bola $\overline{B_R(0)}$ de $W_0^{1,2}(\Omega)$. Para isso, resta apenas mostrar que Φ seja fracamente sequencialmente semicontínua inferiormente, e para isso basta provar que, se u_n converge fracamente para u em $W_0^{1,2}(\Omega)$, então

$$\int F(u_n) \to \int F(u).$$

Isso, porém, se segue do teorema da imersão de Sobolev, que implica que $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$, e do fato que $F(u_n) \to F(u)$ em $L^2(\Omega)$, como consequência da estimativa (20). Em virtude de (21), u_0 é tal que $\|u_0\| < R$ e daí se segue que ele é solução de (18).

Reflexões finais. Tudo isso é apenas um começo! Os métodos e idéias introduzidas neste trabalho se aplicam a muitos outros problemas lineares e não lineares. O operador Δ pode ser substituído por operadores elípticos mais gerais. O termo não linear f da equação (17) pode ser uma função não limitada em R. O funcional Φ pode não ser limitado inferiormente, mas a solução de (17) é ainda um ponto crítico do funcional Φ. Portanto, há interesse em pesquisar pontos críticos de Φ que não sejam pontos de mínimo, mas sim pontos de sela. Isso é um dos fascinantes problemas da Análise Funcional não Linear. Muito se tem feito, mas há ainda muita coisa por fazer.

Referência Bibliográfica

[1] C. Reid, *Hilbert*, Springer Verlag (1970).

[2] D.G. Figueiredo, *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Projeto Euclides, IMPA-CNPq (1977).

[3] E.L. Lima, *Elementos de Topologia Geral*, Ao Livro Técnico S.A. (1970).

[4] F.E. Browder, *Nonlinear Operators and Nonlinear Equations of Evolution in Banach Spaces*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. XVII, Part 2, American Mathematical Society (1976).

[5] G.B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton University Press (1976).

[6] H. Brézis, *Analyse Fonctionelle, Théorie et applications*", Masson (1983).

[7] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc. (1966).

[8] J. Dieudonné, *History of Functional Analysis*, North Holland Publishing Company (1981).

[9] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer Verlag, 4ª edição (1974).

[10] N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear Operators, Part I: General Theory*, Interscience Publishers, Inc. (1958).

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília
70.910 Brasília, D.F.