

ARTIGOS

A CURVATURA MÉDIA DAS SUPERFÍCIES II*

Jonas de Miranda Gomes

1. Introdução.

Há alguns anos assisti uma palestra de Manfredo P. do Carmo num dos Colóquios e lá ele colocou de modo claro e conciso o problema do desprestígio da curvatura média junto às diversas gerações de geometras desde o tempo de Gauss, mostrando também que a situação tendia a uma mudança pelo forte interesse que a curvatura média passara a despertar entre alguns matemáticos em tempos mais recentes ([dC]). Nosso objetivo aqui é mais uma vez fazer uma apologia da curvatura média. Pela falta de espaço e pelo caráter introdutório não poderemos dar uma visão completa de como a "profecia" do Manfredo se realizou. Deixaremos de fora, por exemplo, vários resultados interessantes obtidos recentemente sobre superfícies com curvatura média constante no espaço hiperbólico. Esperamos no entanto despertar a atenção do leitor (ou leitora) para a abundante literatura produzida recentemente sobre o assunto (ver por exemplo [Go], [GRR], [dCL], [LR]).

A primeira tentativa de medir o quanto uma superfície curva em um determinado ponto foi feita pelo matemático suíço Leonard Euler em 1770, que procedeu do seguinte modo.

Dado um ponto P em uma superfície M , escolha um vetor normal N a essa superfície no ponto P , e para cada vetor unitário v tangente a M em P , considere o plano P_v determinado pelo termo (P, v, N) como indicado na figura abaixo.

* Este artigo foi a base de uma palestra de divulgação dada pelo autor no 159 Colóquio Brasileiro de Matemática (Poços de Caldas, Julho/85).

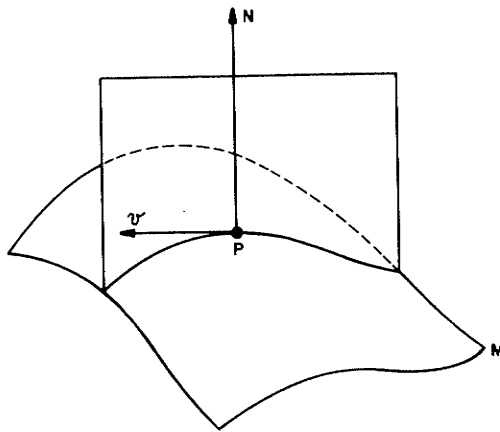


Figura 1

O plano P_v intercepta a superfície em uma curva plana chamada *seção normal* da superfície M no ponto P , na direção v . A curvatura da seção normal na direção v será indicada por k_v e é chamada de *curvatura normal* da superfície M em P na direção v . Usaremos a seguinte convenção de sinal: se a concavidade da seção normal estiver voltada para o vetor normal da superfície a curvatura normal será positiva, caso contrário ela será negativa (ou zero). A Figura 2 ilustra essa convenção.

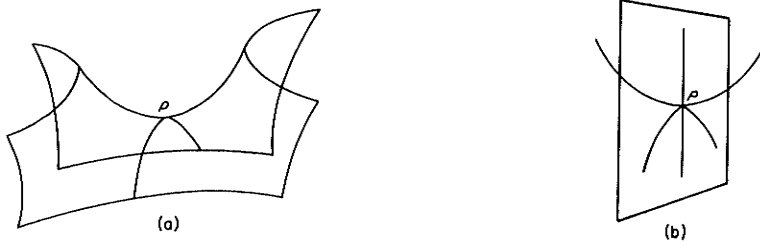


Figura 2

No trabalho citado anteriormente, Euler definiu as curvaturas principais k_1 e k_2 da superfície M no ponto P por

$$k_1 = \min_v k_v$$

e

$$k_2 = \max_v k_v.$$

Além disso ele demonstrou que o conhecimento de k_1 e k_2 é suficiente para determinar k_v para qualquer vetor unitário v (esse resultado é conhecido atualmente como Fôrmla de Euler).

Se tomarmos uma curva g qualquer em M que seja tangente ao vetor v no ponto P , então a curvatura normal pode ser calculada multiplicando a curvatura da curva g pelo cosseno do ângulo entre o vetor normal de g e o vetor normal da superfície. Isto é, a curvatura normal é a projeção normal da curvatura de uma curva g tangente a v no ponto P (ver Fig. 3). Uma curva em uma superfície é chamada *curva principal* se em cada um de seus pontos a curvatura normal na direção tangente é uma curvatura principal

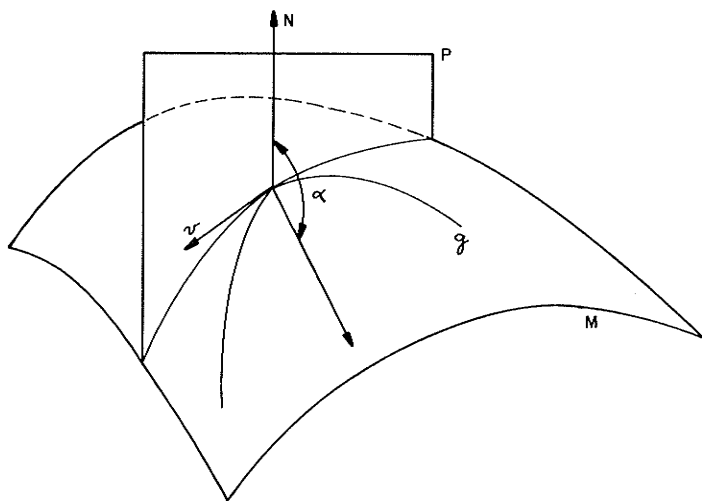


Figura 3

Em 1827 o matemático alemão C.F. Gauss definiu o que hoje conhecemos por curvatura gaussiana K , e mostrou que $K = k_1 \cdot k_2$ (um artigo elementar e bastante interessante sobre a história da curvatura gaussiana é [dC1]).

A curvatura média é definida por

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2},$$

e foi introduzida pela matemática francesa Sophie Germain em 1831 (ver [Di]) ao estudar um problema relacionado com vibrações de uma membrana.

Observe que se trocarmos o vetor normal N por $-N$, isto é, se mudarmos a orientação da superfície, as curvaturas principais (se não forem nulas) mudam de sinal, o mesmo ocorrendo com a curvatura média. Vemos pois que o sinal da curvatura média depende da orientação da superfície.

No que se segue estaremos especialmente interessados em su perfícies com curvatura média constante no espaço euclidiano R^3 que sejam completas, no sentido de que a superfície é um subconjunto fechado em R^3 com fronteira vazia. Como veremos os casos $H = 0$ e $H \neq 0$ têm comportamentos completamente diferentes porém ambos têm interpretações geométricas interessantes.

Seja D um domínio limitado na superfície M cujo bordo é uma curva regular ∂D (se M for compacta e $D = M$, então ∂D é vazio). Seja f uma função diferenciável definida no fecho \bar{D} de D , e considere o campo de vetores normais a M em D , definido por $V = fN$, onde N é o campo unitário normal à superfície M . Defina agora a família a um parâmetro de superfícies

$$x_t(u, v) = x(u, v) + t f N,$$

onde x é uma parametrização de um aberto $U \supset \bar{D}$, e $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Essa família é chamada uma variação normal do domínio D .

Observe que para $t = 0$, $x_t = x$; além disso se a restrição $f|_{\partial D}$ da função f ao bordo de D é identicamente nula, então a variação x_t deixa o bordo fixo para todo valor de t . Dizemos nesse caso que a variação preserva o bordo do domínio D . Intuitivamente uma variação de um domínio é uma deformação desse domínio através de pequenas perturbações.

Se indicarmos por D_t a imagem $x_t(D)$ do domínio D pela variação x_t para um determinado tempo t , e definirmos

$$A(t) = \text{área de } D_t,$$

é possível provar que para ϵ pequeno a função área $A: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável, e além disso

$$A'(0) = \left. \frac{dA}{dt} \right|_{t=0} = -2 \int_D f^H dM \quad (1)$$

(ver [dC2], pag. 199).

Aplicando (1) para variações que preservam o bordo, obtemos que $H = 0$ em todos os pontos do domínio D se, e somente se, $A'(0) = 0$ para toda variação de D que preserva o bordo. Ou seja, as superfícies com curvatura média zero são aquelas dentro das quais todo domínio compacto com bordo regular é ponto crítico da função área para variações que preservam o bordo. Em particular se todo domínio D tem área mínima entre todas as superfícies com bordo ∂D , então a curvatura média $H = 0$. É por essa razão que as superfícies com curvatura média zero foram chamadas por Lagrange de *Superfícies Mínimas*.

Desde que Lagrange iniciou o estudo das superfícies mínimas em 1760, essas superfícies têm merecido a atenção de vários matemáticos, e a literatura sobre o assunto é extremamente abundante. O leitor interessado pode consultar desde artigos mais elementares como [dC3], [Ni], [Co], até "surveys" completos e detalhados como [La1], [Os], [Me], etc.

Pelas razões acima mencionadas, vamos no que se segue restringir ainda mais nosso objetivo inicial, e tratar apenas, salvo em alguns pontos, de superfícies de curvatura média constante não nula, que chamaremos simplesmente de *superfícies com curvatura média constante*. Uma primeira observação interessante sobre essas superfícies é que elas são orientáveis, i.e., podemos escolher sobre a superfície um campo unitário normal de vetores. Este fato segue-se da equação (1), e o leitor poderá encontrar maiores detalhes em [dC]. Podemos pois através de uma escolha adequada do vetor normal a M supor que a curvatura média $H > 0$.

Vimos anteriormente que as superfícies mínimas ($H=0$) são pontos críticos do "problema variacional" da área. Daremos agora uma interpretação das superfícies com curvatura média constante, como ponto crítico de um outro problema variacional. Antes porém precisaremos de uma definição.

Seja U um domínio compacto de R^3 com bordo regular (ver [Li]), e x é uma parametrização de $M = \partial U$. Uma aplicação imediata do Teorema de Stokes mostra que o volume de U é dado por

$$V(U) = \int_M \langle x, N \rangle dM,$$

onde N é um campo de vetores unitários normais a M . Esse resultado torna plausível darmos a seguinte definição: seja M uma superfície (não necessariamente mergulhada) em R^3 , $D \subset M$ um domínio e O um ponto fora de D . O volume do cone de "base D e vértice em O " (ver Figura 4) é dado pela expressão

$$V_D = \frac{1}{3} \int_D \langle x, N \rangle dM.$$

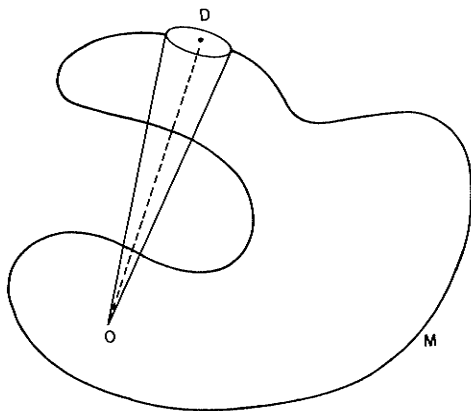


Figura 4

Dizemos que uma variação X_t do domínio D de M preserva volume se

$$V(t) = \text{Volume } V_{D_t} = V_D$$

para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Como no caso de superfícies mínimas, queremos agora determinar os pontos críticos da função área para variações que preservam o volume e o bordo. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, isto é equivalente a determinar os pontos críticos do operador

$$J(t) = A(t) + \lambda V(t).$$

É possível mostrar (ver [BdC]) que

$$J'(0) = \int_D (-2H + \lambda) f dM.$$

Decorre da expressão acima que $J'(0) = 0$ para qualquer variação que preserva bordo e volume se, e somente se, a curvatura média H é constante e não nula em D . Vemos assim que as superfícies de curvatura média constante são pontos críticos do problema variacional da área quando nos restringimos a variações que preservam o bordo e o volume (problema variacional isoperimétrico).

2. Construção de exemplos

Antes de tentarmos grandes aventuras em uma determinada área de pesquisa, é melhor termos em mãos um bom número de exemplos que funcionam como "espaço de teste" para perguntas interessantes que nos motivem a busca de novos resultados. Paremos pois um pouco para refletir sobre a seguinte pergunta: quais são os exemplos conhecidos de superfícies com curvatura média constante em \mathbb{R}^3 ?

De imediato vemos da definição de curvatura média que a esfera e o cilindro (circular reto) têm essa propriedade. Animados

pela aparição desses dois exemplos poderemos ficar um pouco frustrados ao descobrirmos que não conseguimos encontrar outros exemplos facilmente. Esse estado depressivo desaparece um pouco ao constatarmos que eles também não se encontram nos textos mais conhecidos de Geometria Diferencial. Como veremos essa omissão se deve em parte ao desprezo dado à curvatura média, mas também, e principalmente, à dificuldade de produzir exemplos em abundância. Vejamos agora a origem dessa dificuldade.

Uma superfície de curvatura média constante H deve obviamente satisfazer a equação

$$k_1 + k_2 = 2H \text{ (const.)}. \quad (2)$$

Para simplificar o problema, suponhamos que M é um gráfico $z = f(x, y)$ (localmente qualquer superfície pode ser escrita nessa forma). Podemos então calcular k_1 e k_2 em função de f e de suas derivadas, substituir o resultado em (2), e em seguida resolver a equação resultante para determinar a função f , e com isso obtermos os exemplos desejados. Um cálculo imediato (que pode ser encontrado por exemplo em [dC2], pag. 163) nos daria no final a equação

$$\begin{aligned} [1 + (\frac{\partial f}{\partial x})^2] \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + [1 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2] \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \\ = 2H [1 + (\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2]^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (3)$$

que é desencorajadora, pois se trata de uma equação de segunda ordem a derivadas parciais. Devemos nos contentar em obter soluções particulares dessa equação, e mesmo isto não é uma tarefa fácil.

O primeiro matemático a obter exemplos de superfícies de curvatura média constante, além dos dois mencionados anteriormente, foi o francês C. Delaunay [De] em 1841. Ele utilizou para isto um método que posteriormente viria a se tornar padrão na busca de soluções particulares em problemas semelhantes, e que já havia sido utilizado anteriormente por Mesnier em 1776 para descobrir um exemplo de superfície mínima: o Catenóide. O método consis

te em procurar soluções que são invariantes por algum grupo de isometrias do espaço.

Mais precisamente, fixada uma reta em R^3 , Delaunay considerou o grupo de todas as rotações do espaço tendo a reta como eixo, e estudou as superfícies invariantes por esse grupo (chamadas superfícies de *rotação* ou de *revolução*) com curvatura média constante.

Se P é um plano em R^3 contendo o eixo de rotação r , e M é uma superfície de rotação, então a interseção de M com P é uma curva, chamada *curva geratriz* da superfície M , como mostrado na Figura 5 abaixo. A geometria da superfície M fica comple

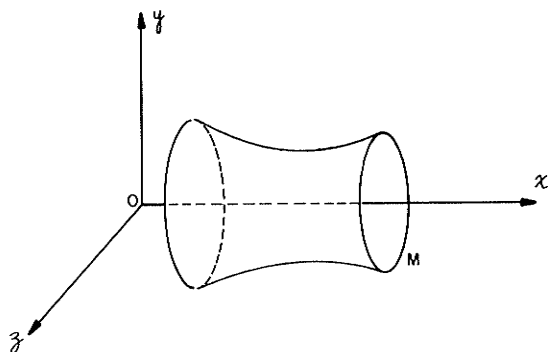


Figura 5

tamente determinada por sua curva geratriz g , uma vez que dado um ponto P em M , existe uma isometria de M (rotação do espaço) levando P em um ponto P' da curva geratriz g . Em nosso caso, tomemos o eixo de rotação como sendo o eixo- x , e consideremos a curva geratriz no plano xy (ver Figura 5) parametrizada por $(x(s), y(s))$ onde s é o comprimento de arco do plano, isto é, $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$. Seja ainda α o ângulo que o vetor tangente a essa curva faz com o eixo- x . Cada ponto da curva geratriz descreve um círculo em R^3 , que é chamado de *paralelo* da superfí

cie. Cada curva obtida da curva geratriz no movimento de rotação que gera a superfície é denominada *meridiano* da superfície. Pode-se mostrar que os paralelos e meridianos de uma superfície de revolução são curvas principais. Como os meridianos são seções normais, a curvatura principal nessa direção é simplesmente a curvatura da curva geratriz, isto é,

$$k_1 = \frac{d\alpha}{dt}.$$

Como os paralelos não são seções normais, devemos multiplicar sua curvatura em cada ponto (x, y) (que é dada por $1/y$) pelo cosseno do ângulo entre a seção normal e o vetor normal, que é exatamente o ângulo α . Temos então

$$k_2 = \frac{\cos \alpha}{y}.$$

Substituindo em (2) obtemos a equação diferencial ordinária

$$\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\cos \alpha}{y} = H \quad (4)$$

Note que obtivemos uma equação diferencial ordinária para a curva geratriz g . Através do estudo dessa equação podemos pois determinar as propriedades da curva g , e portanto da superfície M .

A idéia central no estudo acima, é que se existir um grupo de isometrias que deixa invariante uma superfície de curvatura média constante, podemos obter simplificações consideráveis na equação dessas superfícies (equação (3)) resultando equações mais simples cujas soluções podem ser melhor compreendidas. No nosso caso particular, um estudo detalhado da equação (4) nos leva ao resultado descoberto por Delaunay ([De]):

TEOREMA DE DELAUNAY

a curva geratriz de qualquer superfície de rotação em R^3 com curvatura média constante é uma roulette gerada pelo foco de uma seção canônica.

Em outras palavras, o Teorema de Delaunay afirma que a curva geratriz de uma superfície com curvatura média constante é a trajetória descrita pelo foco de uma cônica que rola sobre uma reta de um plano sem deslizar. Temos três casos a considerar:

- (a) Quando a cônica é uma elipse obtemos o *Ondulóide* (ver Figura 6) que tem como casos particulares o Cilindro circular reto (quando a elipse é um círculo), e a esfera (quando a elipse degenera em um segmento).

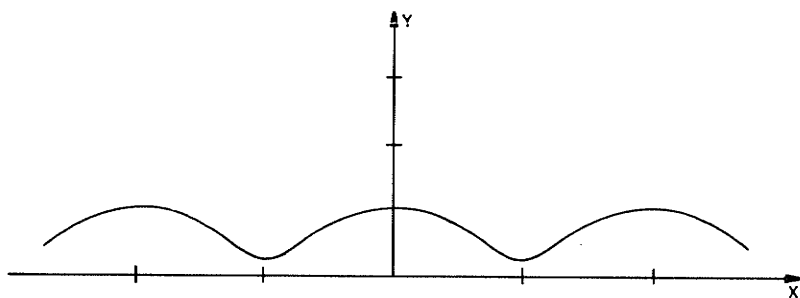


Figura 6

- (b) Quando a cônica é uma hipérbole obtemos o *Nodóide*, que mostramos na Figura 7.

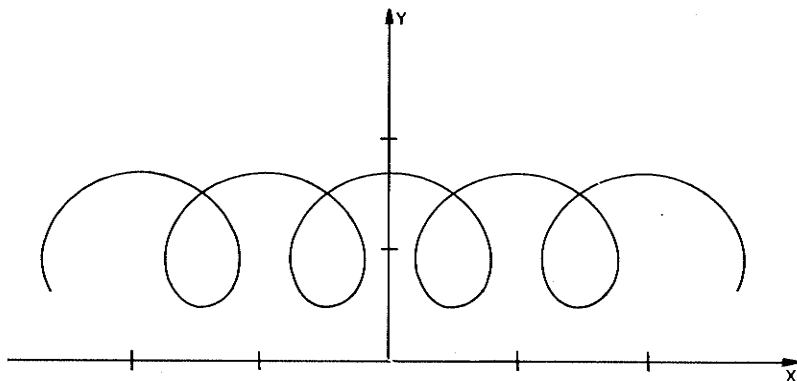


Figura 7

(c) Quando a cônica é uma parábola, obtemos o *Catenóide* que é uma superfície mínima (ver Figura 8). Como mencionamos acima, o Catenóide já havia sido descoberto utilizando o mesmo método.

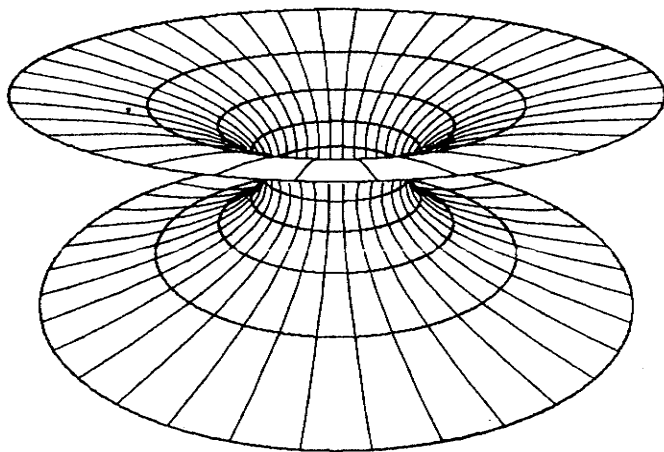


Figura 8

O resultado de Delaunay é um exemplo claro do desprezo pela curvatura média de que falamos no início, pois apesar de simples e belo, ele não é sequer mencionado nos textos de Geometria diferencial mais conhecidos. Por outro lado é comum encontramos nesses textos estudo detalhado das superfícies de rotação com curvatura Gaussiana constante, valendo ressaltar que dentre essas superfícies a única completa é a esfera, ao contrário do que ocorre com as de Delaunay onde todas as superfícies são completas.

Voltemos agora à nossa caminhada em busca de novos exemplos de superfícies com curvatura média constante em \mathbb{R}^3 . Motivados pelo estudo de Delaunay podemos tentar obter superfícies invariantes por um grupo de translações na direção de um vetor fixado. Não é porém difícil mostrar que nesse caso o único exemplo com curvatura média constante que obtemos é o já conhecido Cilindro circular reto.

Em 1776 o matemático francês Meusnier havia descoberto uma superfície mínima (o Helicóide, que mostramos na Figura 9) procu

rando-a entre a família das superfícies regradas (i.e. superfícies tais que por cada um de seus pontos passa uma reta inteiramente contínua na superfície). Posteriormente Catalan mostrou que o Helicóide e o plano são as únicas superfícies mínimas regradas. Parece pois natural tentarmos procurar na família das superfícies regradas uma superfície de curvatura média constante distinta das que já obtivemos até aqui. É porém um fato clássico (pouco conhecido) que a única superfície nessas condições é o cilindro circular reto. A demonstração desse fato pode ser vista em [Da].

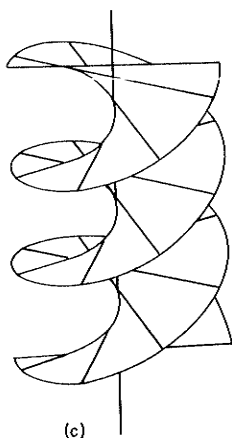


Figura 9

Antes de prosseguirmos em busca de novos exemplos, precisamos de alguns resultados adicionais. É um fato clássico que dada uma superfície mínima em \mathbb{R}^3 ,

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

existe uma família a um parâmetro

$$f_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ com } \theta \in [0, \pi]$$

com $f_0 = f$, tal que cada membro da família é uma superfície mínima*. Dizemos que cada superfície dessa família é associada à superf

* Observe que se $\theta_1 \neq \theta_2$ então f_{θ_1} e f_{θ_2} são não-congruentes, isto é, não existe um movimento rígido $\rho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\rho \circ f_{\theta_1} = f_{\theta_2}$

fície f . Geometricamente uma superfície mínima associada é obtida por uma deformação da superfície em R^3 , que preserva a métrica (isometria), e faz uma rotação das direções principais. O exemplo clássico de superfícies mínimas associadas é dado pelo Helicóide e pelo Catenóide. Na Figura 10 mostramos uma família de superfícies associadas, todas mínimas, que participam da deformação do Catenóide no Helicóide.

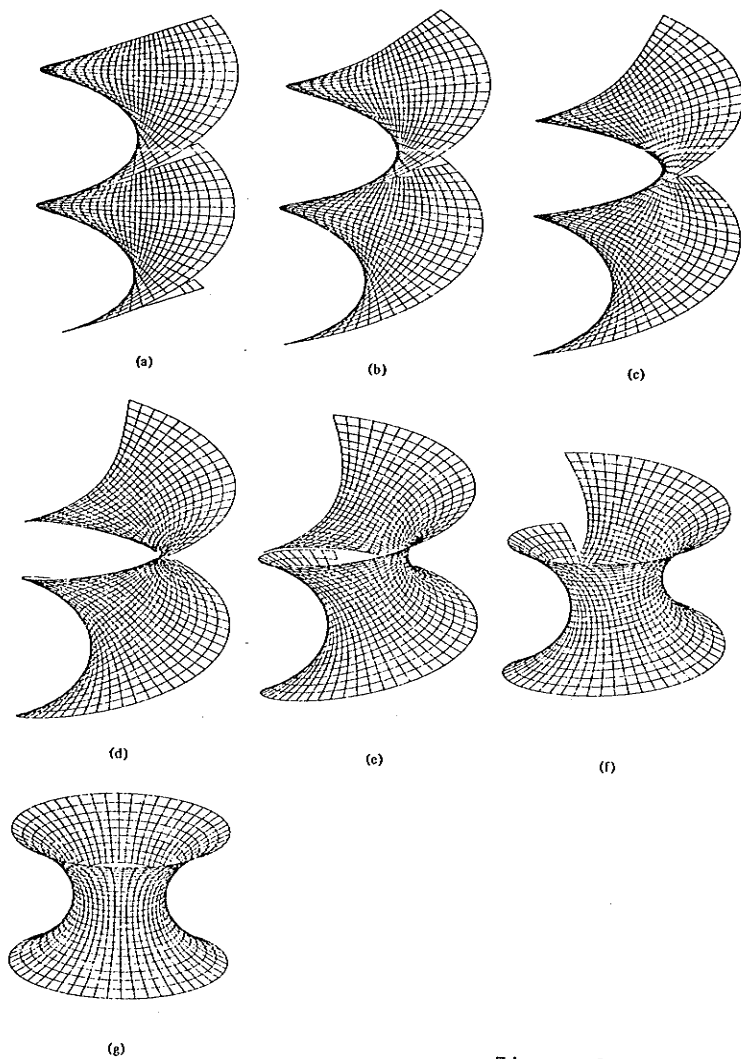


Figura 10
(obtida em [dC2])

Em 1970 H.B. Lawson [La] generalizou o conceito de superfícies associadas para superfícies em R^3 com curvatura média constante. Isto é, dada uma superfície

$$f: R^2 \rightarrow R^3,$$

com curvatura média constante H , existe uma família a um parâmetro

$$f_\theta: R^2 \rightarrow R^3, \text{ com } \theta \in [0, \pi]$$

de superfícies, todas com curvatura média constante H . Além disso para $H = 0$ essa família é exatamente a família associada de uma superfície mínima. Por essa razão dizemos também que a família acima é associada da superfície dada originalmente.

Um fato interessante, que atesta mais uma vez o desprezo pela curvatura média, é que a idéia mencionada acima de tentar descobrir novos exemplos estudando superfícies que são invariantes por um determinado grupo de isometrias não havia sido ainda totalmente explorada até recentemente: restava ainda estudar as superfícies invariantes por movimentos helicoidais do espaço. Esses movimentos consistem na decomposição de uma translação ao longo de uma reta, com uma rotação em torno dessa mesma reta. As superfícies invariantes por esse grupo são chamadas *superfícies helicoidais*. As superfícies mínimas helicoidais já haviam sido estudadas desde 1862 por O. Bonnet e o leitor pode encontrar os detalhes em [Wu]. Um exemplo bastante conhecido dessa família é o Helicóide (Figura 9). O resultado central desse estudo é que as superfícies mínimas helicoidais são todas associadas do Catenóide.

Apenas recentemente as superfícies helicoidais com curvatura média constante foram estudadas por M.P. do Carmo e Marcos Dajczer [dCD] que demonstraram ser verdadeiro o resultado análogo ao caso mínimo para as superfícies helicoidais com curvatura média constante, substituindo o Catenóide pelas superfícies de Delaunay. Mais precisamente, no trabalho anteriormente mencionado, B. Lawson mostrou que a superfície associada de uma superfície de Delaunay é uma superfície helicoidal. O trabalho de do Carmo-Dajczer consistiu em mostrar que a recíproca desse resultado é verdadeira, isto

é, toda superfície helicoidal com curvatura média constante é associada de uma superfície de Delaunay.

Há uma maneira bem interessante de visualizar o espaço das superfícies helicoidais de curvatura média constante. Com a mesma notação utilizada para obter a equação (4) sobre superfícies de rotação, temos que

$$\frac{dy}{dt} = \text{sen } \alpha,$$

que juntamente com a equação (4) fornece o sistema plano de equações diferenciais

$$\frac{dy}{dt} = \text{sen } \alpha;$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{-\text{cos } \alpha}{y} + H.$$

Para $H > 0$ o retrato de fase desse sistema é dado na Figura 11.

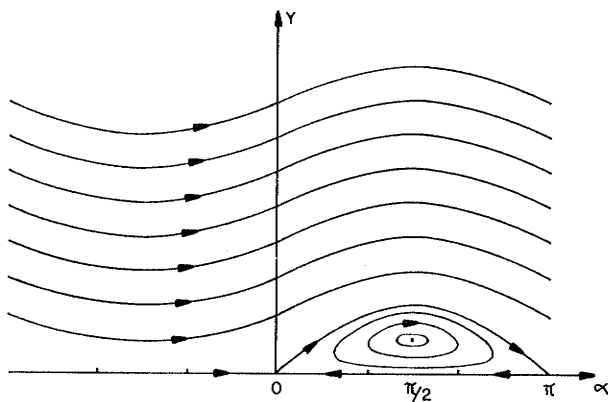


Figura 11

Considere nesse retrato de fase a semi-reta definida por

$$\alpha = \pi/2,$$

$$y \geq 0$$

Essa semi-reta intercepta todas as \bar{o} rbitas do retrato de fase, e como cada uma dessas \bar{o} rbitas representa uma superf3cie de Delaunay (e reciprocamente), segue-se que a fam3lia das superf3cies de Delaunay com curvatura m3dia H pode ser parametrizada pelo intervalo $[0, \infty)$. Al3m disso podemos tomar o par3metro de modo que

0	\longleftrightarrow	cilindro
$(0,1)$	\longleftrightarrow	ondul3ide
1	\longleftrightarrow	esfera
$(1, \infty)$	\longleftrightarrow	nod3ide

girando essa semi-reta em torno de um eixo, temos um semi-cilindro $S^1 \times [0, \infty)$. Pelo resultado de do Carmo-Dajczer as superf3cies helicoidais em R^3 com curvatura m3dia constante s3o parametrizadas por esse cilindro, de forma que cada paralelo representa a fam3lia helicoidal associada a uma superf3cie de Delaunay. Como a fam3lia associada do cilindro e da esfera 3 degenerada (i.e. 3 constitu3da apenas pelo cilindro e pela pr3pria esfera), devemos representar o cilindro acima identificando os pontos que est3o 3 altura 0 e 1 (ver Figura 12).

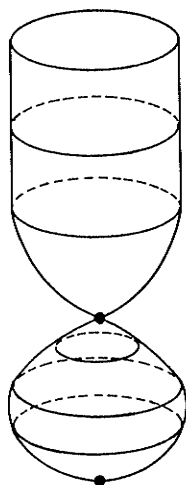


Figura 12

Vamos agora descrever uma correspondência clássica que associa a cada superfície de curvatura média constante em R (podendo ser mínima) a solução de uma equação a derivadas parciais bastante conhecida na literatura. A importância de falarmos sobre essa correspondência no presente contexto é dupla: inicialmente ela nos permitirá dar alguns outros exemplos de superfícies com curvaturas média constante em R^3 . Além disso usando essa correspondência pode-se dar outra demonstração do resultado de do Carmo-Dajczer sobre superfícies helicoidais com curvatura média constante.

Dizemos que um ponto P em uma superfície é *umbílico* se as curvaturas principais nesse ponto coincidem. Pode-se demonstrar que a cada superfície com curvatura média constante H , sem pontos umbílicos, podemos associar uma solução f da equação

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = -2H^2 \sinh(2\theta), \quad (7)$$

onde H é uma constante não nula. Além disso, e mais importante de nosso ponto de vista de construirmos novos exemplos de superfícies com curvatura média constante, para cada solução da equação acima existe uma superfície em R^3 com curvatura média constante H , única a menos de movimento rígido. Uma demonstração detalhada desse resultado pode ser vista em [Te], aqui vamos apenas dar uma breve idéia de como a correspondência é estabelecida.

Dada uma solução θ da equação (5), definimos duas formas quadráticas no plano

$$I = e^{2\theta}(du^2 + dv^2),$$

e

$$II = H(e^{2\theta} + 1)du^2 + H(e^{2\theta} - 1)dv^2.$$

Usamos então o Teorema Fundamental das Superfícies (ver [dC] pág. 236) para mostrar que essas duas formas quadráticas determinam uma superfície em R^3 , única a menos de movimento rígido. Em seguida um cálculo imediato mostra que a superfície obtida tem curvatura média constante H .

Cálculos elementares (porém longo) mostram que a função

$$(u, v) = \log \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{3} \cos(2v)}{2 \cosh(\sqrt{3}u)}}{1 - \frac{\sqrt{3} \cos(2v)}{2 \cosh(\sqrt{3}u)}} \right)$$

é solução da equação (5). Obtemos assim pela correspondência acima um novo exemplo de superfície com curvatura média constante em R^3 .

Recentemente Brian Smyth [Sm] conseguiu obter soluções particulares da equação (7) utilizando uma técnica que já é conhecida. Ele procurou soluções θ que são invariantes por translações, e por rotações do plano em torno da origem. Além disso ele demonstrou que no primeiro caso a família de superfícies com curvatura média constante que obtemos é a família das superfícies helicoidais (incluindo obviamente as de Delaunay). Esse método inclusive pode ser usado para redemonstrar o resultado de do Carmo-Dajczer sobre superfícies helicoidais.

No caso em que a solução θ da equação é invariante por rotações em torno da origem, obtemos para $H = 0$ a superfície de Enneper que foi descoberta em 1864 (ver [dC2], pag. 205) e para $H \neq 0$ uma superfície de curvatura média constante que, pode-se demonstrar, é diferente de todas superfícies conhecidas.

Consequimos desse modo mais exemplos de superfícies com curvatura média constante. Podemos ainda obter um sem número de soluções da equação (7), gerando assim novas superfícies em R^3 com curvatura média constante. O problema é que devido à maneira indireta como a superfície é obtida (através do Teorema Fundamental das Superfícies), temos pouquíssima informação de natureza geométrica/topológica sobre ela. A saída para esse problema é o uso de Computação Gráfica (ver [GS]).

Com os exemplos dados até aqui ainda temos poucas informações sobre superfícies com curvatura média constante. Para comprovarmos isto, consideremos a topologia dessas superfícies. Todos

os exemplos vistos até aqui têm a topologia do plano, do cilindro ou da esfera. Existem superfícies com curvatura média constante cuja topologia seja mais complicada?

Em [La] o autor usando construções bem geométricas, porém muito longas e um tanto complicadas para descrevermos aqui, construiu exemplos de superfícies com curvatura média constante completas em R^3 que possuem as seguintes propriedades:

- 1) são mergulhadas;
- 2) possuem gênero infinito (i.e. tem um número infinito de buracos);
- 3) estão contidas entre dois planos paralelos.

Topologicamente essas superfícies são como mostra mostra a Fig. 13.

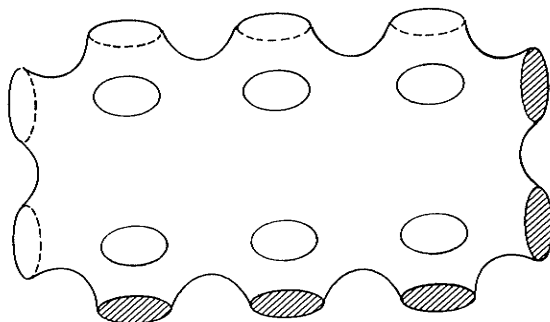


Figura 13

Com essa última superfície esgotamos o nosso repertório de exemplos de superfícies completas com curvatura média constante em R^3 , com uma exceção de que falaremos na próxima seção (superfície de Wente). Com o nosso espaço de teste enriquecido, passemos agora à terceira parte de nossa palestra, onde vamos falar de problemas.

3. Problemas e Resultados

O problema isoperimétrico clássico consiste em determinar dentre todas as superfícies compactas sem bordo em R^3 que envolvem o mesmo volume, qual a de menor área. Em 1884 o matemático alemão Schwarz mostrou de modo eficaz que a solução desse problema é a esfera. Mais precisamente, ele mostrou que a esfera é o mínimo absoluto do problema isoperimétrico para superfícies compactas. Uma pergunta natural é saber se esse problema possui outros pontos críticos. Dividiremos essa pergunta em duas.

Problema 1.

Existem outros mínimos locais para o problema isoperimétrico além da esfera?

Problema 2.

Existem outros pontos críticos?

Antes de continuar, vejamos mais uma definição. Vimos anteriormente que as superfícies de curvatura média constante (incluindo as mínimas) são pontos críticos de um problema variacional. Dizemos que uma tal superfície é *estável*, se cada domínio compacto D contido em M , cujo bordo é uma curva regular, for um mínimo local variacional, isto é, para toda variação X_t do domínio D satisfazendo as condições especificadas na definição do problema tem-se

$$\text{Área}(D_t) \geq \text{Área}(D).$$

Pelo que vimos anteriormente, as superfícies que respondem às perguntas 1 e 2 acima têm curvatura média constante. Em última análise, os dois problemas se reduzem a perguntar se existem superfícies de curvatura média constante compacta em R^3 além da esfera. Ou de modo mais preciso:

Problema 3.

Quais as superfícies compactas sem bordo com curvatura média constante em R^3 ?

Na direção dos três problemas acima, são conhecidos os seguintes resultados:

(a) H. Hopf (1951) [Ho].

Se M tem a topologia da esfera, então M é a esfera.

Devido a esse resultado de Hopf ficou-se conhecendo na literatura a "conjetura de Hopf": a esfera é a única solução para o Problema 3. Se bem que Hopf jamais fez tal conjetura.

(b) A.D. Alexandrov (1956).

Se M é mergulhada, isto é não possui auto-interseções, então M é uma esfera.

A demonstração de Alexandrov é bastante geométrica, e usa o "Princípio da Tangência" que foi introduzido por ele na literatura e teve grande influência no estudo das superfícies de curvatura média constante em R^3 . Uma exposição detalhada do princípio da tangência e do resultado de Alexandrov pode ser vista em [Fr].

(c) J.L.M. Barbosa e M.P. do Carmo (1984) [BdC].

Se M for estável então M é a esfera.

O trabalho de Barbosa-do Carmo é de leitura acessível, e possui vários outros resultados sobre a estabilidade de superfícies com curvatura média constante.

As propriedades físicas das películas de sabão têm como consequência o fato de que a curvatura média da película em cada ponto é proporcional à diferença de pressão do ar nos dois lados. Desse modo uma bolha de sabão tem curvatura média constante, determinada pela diferença de pressão no interior e no exterior. A Con

jectura de Hopf tem pois uma versão física bem interessante: "Uma bola de sabão pode ter uma outra forma além da esférica?".

Sendo fisicamente realizáveis, as bolhas de sabão são estáveis, o resultado de Barbosa-do Carmo mostra então que a resposta à pergunta acima é negativa.

Recentemente H. Wente [We] anunciou a construção de uma superfície compacta com curvatura média constante que tem a topologia de um toro, dando assim um contra-exemplo do gênero um à "Conjetura de Hopf". Porém isto não encerra a questão:

Problema 4.

Existem contra-exemplos à conjetura de Hopf com topologia mais complicada que o toro? Existem contra-exemplos com gênero arbitrário?

Se M é uma superfície orientada em R^3 , e N o campo de vetores normais a M , a aplicação normal de Gauss de M associa a cada ponto P de M o ponto $N(P)$ na esfera unitária S^2 . A imagem da superfície M pela aplicação normal é chamada de *imagem esférica*. Baseados em certos resultados conhecidos sobre a aplicação de Gauss de uma superfície com curvatura média constante, M.P. do Carmo formulou a seguinte pergunta:

Problema 5.

A imagem esférica de uma superfície completa com curvatura média constante contém um círculo máximo da esfera?

Em [HOS] Hoffman, Osserman e Schoen provaram uma versão mais fraca da pergunta, a saber, a imagem esférica de uma tal superfície não pode estar contida em um hemisfério aberto da esfera, e além disso a única superfície de curvatura média constante cuja imagem esférica está contida no hemisfério fechado é o cilindro circular reto.

Recentemente foi demonstrado [Se] que as superfícies helicoidais respondem afirmativamente à pergunta do Problema 5. Dentre as superfícies de nosso espaço de teste resta verificar esse fato para as duas superfícies obtidas da equação (5) na seção anterior.

Em [dCP] M.P. do Carmo e C. Peng mostraram que a única superfície mínima completa, orientável e estável em R^3 é o plano. A partir desse resultado seria natural fazer a pergunta análoga para superfícies com curvatura média constante. Nesse caso a formulação correta seria

Problema 6.

Não existe superfície em R^3 , completa, estável e com curvatura média constante.

Esse problema foi atacado recentemente por Alexandre Magalhães da Silveira em sua tese de doutorado no IMPA, e ele mostrou que o resultado é verdadeiro.

Problema 7.

Existe uma superfície de curvatura média constante, completa, não compacta e limitada em R^3 ?

O problema análogo para superfícies mínimas é uma conjectura já clássica em geometria. É interessante observar que para superfícies mínimas o exemplo de Jorge e Xavier [JX], mostra que existe uma superfície mínima completa limitada por dois planos paralelos. Resultado análogo para superfícies com curvatura média constante é dado pelos exemplos de Lawson com gênero infinito, vistos na seção anterior.

É um resultado conhecido, e provado recentemente por F. Xavier [Xa], que a imagem esférica de uma superfície mínima ou é

a esfera toda, ou omite no máximo sete pontos da esfera. Um resultado bem mais fraco já havia sido demonstrado por R. Ossermann (ver [Os]) em 1960: A imagem esférica de uma superfície mínima completa em R^3 é densa na esfera. Poderíamos indagar se esse resultado é válido para superfícies completas com curvatura média constante em R^3 . Na realidade essa questão foi levantada por S.S. Chern em 1965 (ver [Ch]), porém o Ondulóide mostra obviamente que o resultado é falso, pois sua imagem esférica é uma faixa compacta contendo um círculo máximo da esfera. Vimos na seção 2 exemplos de superfícies com curvatura média constante cuja imagem esférica é toda esfera (Quais?). Achamos o seguinte problema bem interessante:

Problema 8.

A imagem esférica de uma superfície completa com curvatura média constante ($\neq 0$) em R^3 ou é a esfera inteira, ou omite abertos da esfera.

Baseado nas mesmas razões que levaram M.P. do Carmo a formular o Problema 5, podemos ousar um pouco mais no Problema 8.

Problema 9.

Os abertos omitidos pela aplicação normal de Gauss de uma superfície com curvatura média constante são calotas esféricas.

A imagem esférica das superfícies helicoidais com curvatura média constante ou cobre toda a esfera, ou então omite duas calotas (ver [Se]). Não se conhecem exemplos cujo comportamento da imagem esférica seja mais complicado.

4. Epílogo

Esperamos ter atingido o objetivo inicial do presente trabalho: fazer uma exposição sobre a curvatura média em uma linguagem simples e acessível, levando o leitor (ou leitora) a tomar contato com essa área repleta de problemas interessantes e intrigantes. Se de um lado somos atraídos pela beleza geométrica de sua formulação, do outro lado a aparente dificuldade desses problemas deixa perplexo o leitor menos avisado.

Como consideramos apenas superfícies completas, deixamos de fora algumas dezenas de problemas interessantes. Dentre esses quero apenas mencionar o "Problema de Plateau para superfícies com curvatura média constante", que em linhas gerais pode ser formulado do seguinte modo:

Problema 10.

Dada uma curva γ em R^3 , e uma constante H , existe uma superfície M cujo bordo é γ , e cuja curvatura média é H ?

Uma exposição clara e concisa, com uma bibliografia atualizada, sobre o problema acima pode ser vista no Capítulo IV de [Ka].

Referências Bibliográficas

- [BdC] J.L. Barbosa e M.P. do Carmo, *Stability of Hypersurfaces with constant mean curvature*. Math. Zeits. vol. 185, 1984, pp. 339-353.
- [Co] R. Courant, *Soap film experiments with minimal surfaces*. American Mathematical Monthly, Vol. 47 (1940), 164-167.

- [Ch] S.S. Chern, *On the curvature of a piece of hypersurface in Euclidean space*. Abh. Math. Sem. Hamburg 29 (1965), 15-34.
- [Da] G. Darboux, *Leçons sur la theorie generale des surfaces*. Chelsea Publishing Co., New York, 3^{me} edition, 1972.
- [dC] M.P. do Carmo, *A curvatura média das superfícies*. Atas do 13^o Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, Julho 1981.
- [dC₁] M.P. do Carmo, *Cartografia e Geometria diferencial*. Noticiário da SBM, Maio de 1983.
- [dC₂] M.P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall Inc. (1976).
- [dC₃] M.P. do Carmo, *A matemática das Películas de Sabão*. Revista Ciência Hoje, nº 11, vol. 2, 1984.
- [dCD] M.P. do Carmo e M. Dajczer, *Helicoidal surfaces with constant mean curvature*. Tôhoku Mathematical Journal, vol. 34, nº 3, (1982), pp. 425-435.
- [dCL] M.P. do Carmo e H.B. Lawson, *Alexandrov-Bernstein type theorems in hyperbolic space*. Duke Math. Journal, (4), 50 (1984).
- [dCP] M.P. do Carmo e C. Peng, *Stable Complete minimal surfaces in R^3 are planes*. Bulletin of the AMS, Vol. 1, nº 6 (1979), pp. 903-906.
- [De] C. Delaunay, *Sur la surface de Revolution dont la courbure moyenne est constante*. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Ser. 1, 6 (1841), 309-320 (com um apêndice de M. Sturm).
- [Di] J. Dieudonné, *Abrégé d'histoire des mathématiques*. Vol. II, Hermann, 1978.
- [Fr] K.R. Frensel, *O Princípio da Tangência e Aplicações*. Tese de Mestrado, IMPA (1982).
- [Go] J. de M. Gomes, *Sobre superfícies com Curvatura Média Constante no Espaço Hiperbólico*. Tese de Doutorado, IMPA, 1984.

- [GRR] J. de M. Gomes, F.B. Ripoll e Lucio L. Rodriguez, *On surfaces of constant mean curvature in Hyperbolic Space*. Preprint, IMPA, 1984.
- [GS] J. de M. Gomes e G.T. dos Santos, *Teorema Fundamental das Superfícies e Computação Gráfica*. Comunicação no 15º Colóquio Brasileiro de Matemática.
- [Ho] H. Hopf, *Lectures on Differential Geometry on the Large*, Lecture Notes on Mathematics nº 1000, Springer-Verlag (1983).
- [HOS] D. Hoffman, R. Osserman e R. Schoen, *On the Gauss map of complete surfaces of constant mean curvature*. Comment. Math. Helvetici 57 (1982), pp. 519-531.
- [JX] L.P. de M. Jorge e F. Xavier, *A complete minimal surface in R^3 between two parallel planes*. Ann. of Math., 102 (1980), 204-206.
- [Ka] J.L. Kazdan, *Prescribing the curvature of a Riemannian manifold*. Regional conference series in mathematics, nº 57, AMS, 1985.
- [Ke] K. Tenenblat, *Transformações de Superfícies e Aplicações*. 13º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas (1981).
- [Li] E.L. Lima, *Curso de Análise*, vol. III, Projeto Euclides, (1981).
- [La] H.B. Lawson, *Minimal surfaces in S^n* . Annals of Math. 92 (1970), 335-374.
- [La 1] H.B. Lawson, *Minimal varieties*. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 27 (1975).
- [LR] G. Levitt e H. Rosenberg, *Symmetry of constant mean curvature hypersurfaces in hyperbolic space*. Duke Math. Journal, Vol. 52 (1985), pp. 53-59.
- [Me] W.H. Meeks III, *A survey of the Geometric Results in the classical theory of minimal surfaces*. Boletim da Sociedade Bras. de Matemática, Vol. 12, nº 1, (1981).
- [Ni] J.C.C. Nitsche, *Plateau's Problem and their modern ramifications*. American Mathematical Monthly, 81 (1974), 945-968.
- [Os] R. Osserman, *A survey of Minimal Surfaces*, Van Nostrand Mathematical Studies, New York, (1969).

- [Se] W. Seaman, *Helicoids of Constant mean curvature and their Gauss maps.*
- [Sm] B. Smyth, *The Geometry of bounded solutions of the Sine-Gordon Equation.* Preprint, University of Notre Dame, (1985).
- [Xa] F. Xavier, *The Gauss map of a complete non-flat minimal surface cannot omit 7 points of the sphere.* Ann. of Math. 113 (1981), pp. 211-214.
- [We] H. Wente, *Counterexample to a Conjecture of H. Hopf,* Preprint, 1984.
- [Wu] W. Wunderlich, *Beitrag zur Kenntnis der Minimalcharaubflächen,* Compositio Math. 1952, 297-311.

Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Estrada Dona Castorina, 110
Jardim Botânico
22.460 Rio de Janeiro, RJ