CLASSIFICAÇÃO DE VARIEDADES UNI-DIMENSIONAIS; UMA DEMONSTRAÇÃO EDUCADA

Elon Lages Lima

Algumas vezes o matemático procura demonstrar seus teoremas usando o mínimo de técnicas e pressupondo o mínimo de conhecimentos. Estas são as demonstrações "elementares", que provam mas, em geral, não explicam por que é verdadeiro o resultado. Outras vezes, para sentir-se mais seguro, o matemático busca demonstrações que o façam entender melhor o significado e a posição do teorema dentro de uma teoria. Estas são as demonstrações que aqui chamamos "educadas".

Neste trabalho, apresentamos uma demonstração educada do teorema de classificação das variedades diferenciáveis de dimensão 1.

§1. Sobre as demonstrações matemáticas

Do ponto de vista científico, o que se exige de uma demonstração matemática é apenas que ela seja correta, isto é, que mostre, por meio de uma série de argumentos organizados segundo as regras lógicas usuais, como a tese decorre da hipótese e das proposições já estabelecidas anteriormente na teoria.

Entretanto, todos os matemáticos têm suas demonstrações preferidas e sabem que, além da correção lógica, há outros fatores, de natureza mais ou menos subjetiva, que os fazem valorizar mais uma demonstração do que outra.

A própria aceitação de um raciocínio como válido ou correto é, até certo ponto, uma questão de consenso; o que é admitido hoje poderá não ser aprovado pelos critérios de rigor em voga amanhã. Os "Elementos" de Euclides, por exemplo, eram o modelo por excelência do raciocínio dedutivo dos nossos antepassados. Suas deficiências lógicas em alguns pontos são, no entanto, quase escandalosas face aos padrões atuais de rigor.

Não desejamos, porém, tratar aqui do problema da evolução do rigor matemático, nem tampouco da natureza lógica da demonstração. Os fatores subjetivos, aos quais nos referimos acima, são de várias naturezas.

Há, por exemplo, o critério estético. A maioria (provavelmente a totalidade) dos matemáticos se sensibiliza com a beleza da Matemática. Uma demonstração elegante, um argumento inesperado e definitivo, uma construção engenhosa, são sempre fontes de deleite, motivos de enlevo, razões para amar nossa Ciência, para cultivá-la com carinho e dedicar-lhe o melhor de nossos esforços. Euclides, a quem acabamos de citar como contra-exemplo, é pródigo em lances imortais de elegância matemática. Quem não se maravilhou com sua demonstração de que há infinitos números primos? Ou com a singela astúcia de sua prova de que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais?

Outro importante critério de valor para as demonstrações matemáticas é o que nos leva a preferir os raciocínios que chamaremos de "restritivos", os quais se caracterizam por evitarem o uso de uma ou outra técnica ou teoria.

Já na Escola nos ensinam a usar métodos restritivos quando nos dizem para resolver certos problemas "por Artimética", ou seja, sem direito a recorrer à Álgebra. Como vemos neste exemplo, nem sempre o raciocínio restritivo é o mais simples ou o mais elegante. Às vezes ele pode ser usado apenas como um exercício de virtuosismo. Mas, quando bem empregado, ele pode ter férteis conseqüências.

Novamente vamos encontrar em Euclides um interessante exemplo do tipo de raciocínio restritivo. Trata-se de sua demonstração do Teorema de Pitágoras, repetida tradicionalmente nos compêndios de Geometria até hoje. Ela está longe de ser a mais breve, a mais elegante ou a mais brilhante. (E. Rosa [1983] contém um catálogo de demonstrações desse teorema.) Euclides sem dúvida conhecia uma prova mais simples, por semelhança de triângulos. A razão pela qual ele escolheu aquela demonstração para o seu livro é que ela evitava o uso da teoria das proporções (de Eudóxio), um tema bastante sutil e só apresentado de forma definitiva vários séculos depois, quando se desenvolveu a construção rigorosa do corpo dos números reais. (A propósito, ver a lúcida discussão deste tópico em Aaboe 1984 , página 74.)

Uma extensão da idéia de raciocínio restritivo leva às demonstrações chamadas "elementares". Em cada área do conhecimento matemático há uma noção diferente de demonstração elementar. Por exemplo, na Teoria dos Números, são chamadas elementares as demonstrações que não utilizam as técnicas da Análise Complexas. (Às vezes isto pode levar a chamar elementares certas demonstrações bastante intrincadas.) Em Topologia Diferencial são consideradas elementares as demonstrações que não se valem da Topologia Algébrica.

A procura de demonstrações elementares para teoremas importantes é uma atividade bem conceituada entre matemáticos.

Nesta nota, queremos chamar a atenção para um outro tipo de demonstração, que chamaremos de "educada".

Sob certos aspectos, as demonstrações educadas são o oposto das demonstrações elementares.

Matemáticos experientes apreciam demonstrações educadas, entre outras coisas porque lhes dão segurança ao mostrarem a força das teorias que eles conhecem. Nessas demonstrações, os argumentos devem apoiar-se em teoremas e conceitos bem conhecidos, para mostrar como o teorema em questão decorre necessàriamente de teorias firmemente estabelecidas.

As demonstrações educadas devem usar um mínimo de notação. As mais bem sucedidas entre elas não requerem seque um quadro negro ou uma folha de papel.

Como exemplo inicial podemos citar o Teorema Fundamental da Álgebra, segundo o qual todo polinômio não-constante p, com coeficientes complexos, possui uma raiz complexa. Uma demonstração educada deste fato pode ser feita assim: como $\lim_{z\to\infty} p(z) = \infty$, segue-se que p é uma aplicação própria de $\mathbb{C}$ em si mesmo. Logo, sua imagem é um subconjunto fechado do plano complexo. Por outro lado, sendo p uma função holomorfa, sua imagem é também um subconjunto aberto do plano. Como o plano é conexo, a imagem de p é todo o pla no, ou seja, p é sobrejetiva. Em particular, existe um número complexo z tal que $p(z) = 0$.

A seção seguinte trata de um exemplo mais substancial.

§2. Um exemplo novo de demonstração educada

O teorema a ser provado é o seguinte:

Toda variedade diferenciável conexa de dimensão 1 é difeomorfa à reta ou ao círculo.

Nossas variedades são espaços de Hausdorff com base enumerável. Por simplicidade, suporemos que são de classe C^∞.

Este teorema é, naturalmente, um fato elementar. É curioso que não seja demonstrado mais freqüentemente.

Sem a restrição de base enumerável, haveria outras possibilidades, a saber as "retas longas" de diferentes cardinalidades. Uma exposição disto, no caso C^0, foi feita por H. Kneser [1958].

Se omitirmos a condição de Hausdorff, uma variedade surpreendente de exemplos podem ser obtidos. Os simplesmente conexos foram classificados por A. Haefliger e G. Reeb [1957].

Tanto quanto seja de nosso conhecimento, a primeira demonstração publicada desse teorema sob sua forma mais útil, acima enunciada, foi a de J. Milnor [1965]. Essa demonstração tem sido reproduzida por outros autores, desde então. Uma demonstração diferente foi apresentada por V. Guillemin e A. Pollack [1974]. Em todos esses casos, a prova é do tipo "demonstração por primeiros princípios", envolvendo consideração de casos e verificação de detalhes. Pode ser entendida por principiantes mas não desperta a atenção do matemático mais experiente.

Uma demonstração educada desse teorema é oferecida a seguir.

Consideremos em nossa variedade X uma métrica riemanniana completa. (Obtida, digamos, mergulhando X como subconjunto fechado do espaço euclidiano).

Suponhamos inicialmente que X seja orientável. Sendo X

uni-dimensional, orientá-la é o mesmo que definir sobre ela um campo C^∞ de vetores tangentes unitários.

Como X é completa, as órbitas de um campo limitado são definidas para todos os valores reais do parâmetro, isto é, tem-se um fluxo em X.

Fixemos um ponto em X.

Se a órbita do fluxo que passa por esse ponto for periódica, isto é, difeomorfa ao círculo, então ela é compacta, logo é um subconjunto fechado de X. Também é um subconjunto aberto porque é uma subvariedade de mesma dimensão que X. Por conexidade, essa órbita é X, e nossa variedade é difeomorfa ao círculo.

Se a órbita do ponto não for periódica, ela é a imagem da reta por uma imersão injetiva. Novamente, como a dimensão de X é igual a um, tal imersão é na realidade um mergulho, e a órbita é um subconjunto aberto de X, homeomorfo à reta. É também um subconjunto fechado, pois um ponto de sua fronteira teria de ser uma singularidade do campo. Por conexidade, essa órbita é X, logo nossa variedade é difeomorfa à reta.

Portanto, resta-nos apenas mostrar que as variedades de dimensão 1 são orientáveis.

Toda variedade conexa X possui um recobrimento duplo orientável Y, que é conexo se, e somente se, X é não orientável. Associando a cada ponto de Y o outro ponto que tem a mesma projeção em X, obtemos uma aplicação contínua $f:Y \to Y$, sem pontos fixos, a qual é uma involução (isto é, coincide com sua inversa).

Se X fosse não-orientável, Y seria a reta ou círculo, como vimos acima.

Ora, a reta não admite uma involução contínua sem pontos fixos. (Se $f(x) = y$ então $f(y) = x$, logo o intervalo $[x,y]$ seria levado em si mesmo por f; então f teria um ponto fixo.)

Suponhamos, finalmente, que Y seja o círculo. Tomemos um ponto x em Y e seja $y = f(x)$. Cada um dos dois arcos de Y com extremidades x,y é portanto transformado por f no outro ou sobre si mesmo. Esta última possibilidade não ocorre pois f não tem pontos fixos. Portanto a projeção de Y sobre X, quando restrita a um desses arcos, aplica-o sobre X, injetivamente salvo nos extremos, que são transformados no mesmo ponto de X. Isto mostra que X é homeomorfo ao círculo, o que contradiz sua não-orientabilidade.

Referências Bibliográficas

E. Rosa 1983 - *Mania de Pitágoras*, Revista do Professor de Matemática, vol. 2, págs. 14-17.

A. Aaboe 1984 - *Episódios da História Antiga da Matemática*, Coleção "Fundamentos da Matemática Elementar", S.B.M.

H. Kneser 1958 - *Sur les variétés connexes de dimension* 1, Bulletin de la Société Mathématique de Belgique, t.X, págs. 19-25.

A. Haefliger et G. Reeb 1957 - *Variétés (nonseparées) à une dimension et structures feuilletés du plan*, L'Enseignement Mathématique, págs. 107-125.

J. Milnor 1965 - *Topology from the Differentiable Viewpoint*. The University Press of Virginia.

V. Guillemin and A. Pollack 1974 - *Differential Topology*. Prentice Hall, N.J.