UMA INTRODUÇÃO A HISTÓRIA DA GEOMETRIA PROJETIVA (*)

Abramo Hefez

1. As Origens

O Renascimento (aproximadamente de 1400 DC a 1600 DC) foi um período marcado por profundas transformações do pensamento humano. Em particular, as Artes Plásticas e a Geometria, dois campos com estreitas ligações e cristalizados por mais de doze séculos, passaram por uma revolução que as libertou do jugo do classicismo grego antigo.

A representação de figuras estáticas na pintura e na escultura gregas, com grande preocupação estética quanto à forma, mas sem nenhum onteúdo dramático, foi gradualmente cedendo lugar para a representação de cenas de ação onde os personagens refletiam os seus estados emocionais.

Os artistas passaram a necessitar de técnicas e conceitos novos para que a sua obra se tornasse uma boa representação da realidade, ou muitas vezes de sua fantasia.

A Geometria Euclidiana, com as suas noções de semelhança e de equivalência de figuras mediante as congruências, não era capaz de atender às novas necessidades. Foi então surgindo, de modo intuitivo, a noção de *Perspectiva* nos trabalhos dos pintores do início do século 15.

A primeira sistematização matemática do conceito de perspectiva, foi feita em 1435 pelo italiano Leone Battista Alberti. A idéia

(*) Estas são notas de uma palestra proferida na reunião regional da S.B.M. em comemoração dos 20 anos do Curso de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória Outubro de 1985.

de Alberti foi a de simplificar o complexo mecanismo da visão. A grosso modo, a visão humana é o processamento das duas imagens planas, ligeiramente deslocadas uma em relação à outra, formadas uma em cada ôlho. O cérebro então recria a sensação de tridimensionalidade.

A proposta de Alberti foi a de pintar o que um só ôlho vê, recuperando na tela a sensação de profundidade com um jôgo de luz e sombra e com a diminuição da intensidade da côr em função da distância.

O modêlo matemático é simples. Entre o ôlho e o objeto a ser pintado, forma-se um cone de raios luminosos, chamado de *Cone de Imagem* ou de *Projeção*. A pintura é então idealizada como uma *seção* deste cone pelo plano da tela. Este método é chamado de *Seção de Projeção*. Como a tela não é transparente, ela deve ser posta deslocada em relação ao cone de imagem. Alberti deu então uma série de regras para transportar para a tela o que estaria na seção plana do cone. Fato notável, é que olhando para a pintura, tem-se a mesma sensação que se teria se se olhasse para a cena pois, os raios que emanam do quadro simulam os raios que emanariam do objeto. Claro está que, tomando duas seções diferentes da mesma projeção, obtem-se duas representações da mesma realidade.

Uma pergunta natural que se apresenta a este ponto é, quais são as propriedades comuns a duas seções de uma mesma projeção? Tais propriedades são chamadas de *Projetivas*. Por exemplo, a incidência de pontos e retas são propriedades projetivas enquanto que, as seções de uma mesma projeção não preservam, distâncias, ângulos e tampouco noções tão caras à Geometria Euclidiana tais como, paralelismo de retas e semelhança de figuras (veja figura 1).

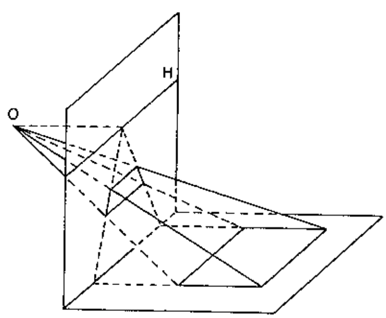


Fig. 1

Isto foi o ponto de partida para uma nova geometria, chamada de *Geometria Projetiva*.

As idéias projetivas apareceram de modo bem vago pela primeira vez em 1604 no livro Ótica Astronômica de autoria de Kepler. Apolônio e Arquimedes haviam observado que o círculo, a elipse, a parábola, a hipérbole e o par de retas concorrentes podiam ser obtidos por seção de um cone circular reto. Kepler foi mais longe notando que cada uma destas curvas pode ser deformada continuamente numa das outras. Ao variar continuamente o plano da seção, o círculo se transforma numa elipse que se transforma numa parábola para a seguir se transformar numa hipérbole. Kepler deu a seguinte explicação: da elipse para o parábola, um dos focos "vai para o infinito" para na hipérbole reaparecer do outro lado. A noção de ponto no infinito só seria esclarecida mais tarde.

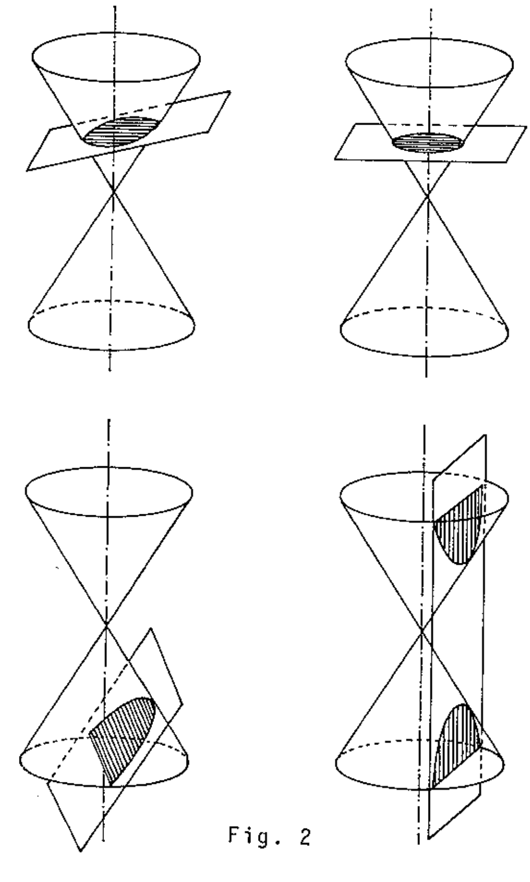


Fig. 2

2. Os Primeiros Passos

O engenheiro e arquiteto francês Girard Desargues (1591-1661) foi o primeiro a introduzir o método projetivo na geometria. Na tentativa de sistematizar o trabalho de Apolônio sôbre cônicas, Desargues imaginou o seguinte método inovador para demonstrar teorema sôbre cônicas. Todo teorema que trata de incidência de pontos e retas para cônicas, pode ser demonstrado inicialmente para o círculo para depois, por projeção e seção ser transportado para as cônicas. Com esta idéia bem simples, Desargnes foi capaz de demonstrar, com um método unificado, vários teoremas esparlos de Apolônio.

Uma grande contribuição conceitual de Desargues, além do método descrito acima, foi a introdução do *Plano Projetivo Real*, que dá maior uniformidade aos teoremas de Geometria Euclidiana e ao mesmo tempo esclarece a noção de pontos no infinito.

Seja dado um centro de projeção O. Do ponto de vista projetivo, são equivalentes todos os pontos, distintos de O, que estão sobre um mesmo raio passante por O. Isto estabelece uma partição do espaço tridimensional real, menos o ponto O, em classes de equivalência. O Plano Projetivo Real $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ é o conjunto destas classes.

Uma seção é um conjunto de representantes de classes que estão sobre um mesmo plano π não passante por O. Cada classe tem no máximo um representante em π. Há classes que não tem representantes em π, são as classes que consistem das retas passantes por O e paralelas a π. Cada reta passante por O e paralela a π, exceto uma, tem um representante na reta H (veja figura 1). Portanto, o plano projetivo real pode ser imaginado como sendo o plano Euclideano acrescido de uma reta e um ponto. O ponto é considerado ponto no infinito da reta e a reta, como reta no infinito do plano.

É fácil ver que, no plano projetivo, duas retas distintas se intersectam sempre num ponto (veja figura 1). Com isto, as relações de incidência entre retas e pontos na Geometria Projetiva tornam-se mais simétricas do que na Geometria Euclidiana

Axiomas de incidência da Geometria Euclidiana:

1) Dois pontos distintos determinam uma reta com a qual são incidentes

2) Duas retas distintas tem no máximo um ponto com o qual são incidentes.

O axioma 2 permite que as duas retas não tenham nenhum ponto em comum como é o caso para retas paralelas.

Axiomas de incidência da Geometria Projetiva:

1) Dois pontos distintos determinam uma e sòmente uma reta com a qual são incidentes.

2) Duas retas distintas determinam um e sòmente um ponto com o qual são incidentes.

Os axiomas de incidência da Geometria Projetiva não contradizem nenhum axioma da Geometria Euclidiana. Trata-se tão sòmente de ajustar as coisas à nível de semântica. Duas retas são paralelas no plano euclidiano se e sòmente se elas se encontram no infinito no plano projetivo.

O primeiro teorema novo da Geometria Projetiva é o famoso teorema de Desargues que relaciona dois triângulos em perspectiva. Duas figuras dizem-se em *Perspectiva* a partir do ponto O, quando elas são seções de uma mesma projeção de centro O.

Teorema (Desargues). Dois triângulos ABC e A'B'C' estão em perspectiva central se, e sòmente se, os prolongamentos de AB e A'B', BC e B'C', AC e A'C', determinam tres pontos colineares.

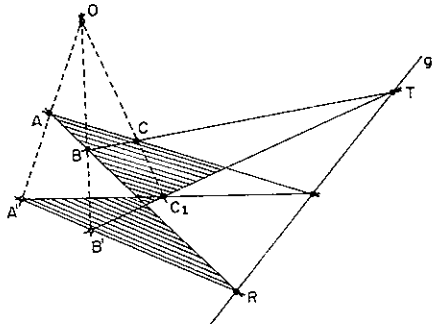


Fig. 3

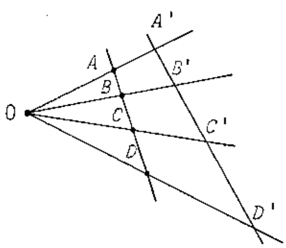
Para demonstrar este teorema, Desargues usou o teorema de Menelaus da Geometria Euclidiana, portanto os métodos para obter teoremas projetivos eram ainda os da Geometria Euclidiana.

Desargues também descobriu um importante invariante projetivo, a bi-razão de quatro pontos, que é definida como segue:

Dados quatro pontos colineares A, B, C e D, a bi-razão destes quatro pontos é o número

$$\frac{BA}{BC}/\frac{DA}{DC}.$$

Teorema (Desargues). A bi-razão é um invariante projetivo.



$$\frac{BA}{BC}/\frac{DA}{DC} = \frac{B'A'}{B'C'}/\frac{D'A'}{D'C'}$$

Fig. 4

A consagração do método projetivo introduzido por Desargues foi alcançada quando Pascal (aos 16 anos) sob a influência direta de Desargues demonstrou o teorema sôbre hexágonos inscritos em cônicas. Este teorema mostrou como o método projetivo tornava fáceis teoremas que seriam muito difíceis para a Geometria Euclidiana.

Teorema (Pascal). Se os seis vértices de um hexágono estão sobre uma cônica, então os três pontos de interseção dos pares de lados opostos são colineares.

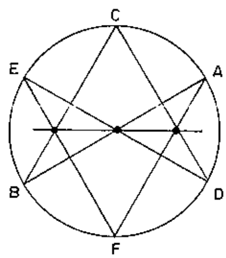


Fig. 5

Pascal demonstrou inicialmente o teorema para hexágonos inscritos em círculos usando teoremas da Geometria Euclidiana. É provável que Pascal tenha também usado o teorema de Menelaus, mas disto não se tem certeza dado que seu trabalho sobre cônicas foi perdido. O teorema é então transferido para as cônicas pelo método de seção e projeção. Forma-se uma projeção de centro O fora do plano do círculo e toma-se uma seção de modo que se obtenha a cônica desejada. Sôbre esta cônica o hexágono é transportado e como a noção de colinearidade é preservada por seção e projeção, a propriedade vale para as cônicas.

3. O Método Sintético

O trabalho de Desargues, apesar de apreciado por matemáticos como Mersenne, Fermat e Descartes, não foi compreendido pelo públi co em geral para o qual era dirigido, Desargues desgostoso, retirou-se da atividade científica. O principal trabalho de Desargues foi perdido e só foi reencontrado em 1845.

No final do século 18, início do século 19, floresceu na École Polytechnique de Paris uma escola de geometria cujo inventor era Gaspard Monge e à qual pertenceram entre outros, Poncelet, Carnot e Brianchon.

Jean Victor Poncelet (1788-1867), enquanto prisioneiro na Rússia em 1813-14 após a dramática retirada Napoleônica, na tentativa de reconstituir o que havia aprendido de geometria com Monge, redescobriu a Geometria Projetiva.

Poncelet foi o primeiro a reconhecer a Geometria Projetiva como um novo ramo da matemática e se propôs a achar todas as propriedades geométricas das figuras que são invariantes por projeções e seções.

O trabalho de Poncelet baseia-se sôbre três idéias básicas. Estas idéias, na realidade, são anteriores a Poncelet, ele apenas as tomou como base para o seu trabalho dando-lhes uma ampla aplicação.

1) A primeira idéia utiliza a noção de *Figuras Homólogas*. Poncelet define duas figuras como sendo homólogas, quando uma pode ser obtida da outra, mediante uma sequência de projeções e seções. A idéia, uma redescoberta do método de Desargues e Pascal, consiste em encontrar uma figura mais simples do que a original e homóloga a ela, estudar as suas propriedades que são invariantes por projeções e seções e assim obter propriedades da figura mais complexa. Um exemplo disto, é a redução que Pascal fez de um teorema sôbre cônicas a um teorema sobre o círculo.

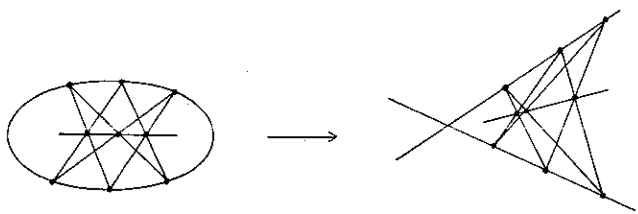
2) A segunda idéia é o *Princípio de Continuidade*. Este princípio sobre o qual se baseia grande parte da Geometria Projetiva do século 19, foi um dos argumentos que mais suscitaram polêmicas em matemática. Nos padrões de rigôr da atualidade, as demonstrações que usam tal princípio não são aceitas como tal, mas como simples raciocínios heurísticos. Até o presente momento, vários resultados obtidos usando este princípio, aguardam demonstração.

Nas palavras de Poncelet, o princípio é o seguinte:

"Se uma figura é obtida de uma outra por mudança contínua, e a última é tão geral quanto a primeira, então qualquer propriedade da primeira pode ser enunciada imediatamente para a segunda figura".

As objeções ao princípio são a de que o conceito de generalidade de figuras é vago e de que não é fornecida nenhuma demonstração deste princípio.

Uma possível aplicação do princípio é a "obtenção" do teorema de Pappus a partir do Teorema de Pascal



Teorema de Pascal Teorema de Pappus

Fig. 6

Para que o princípio funcione em várias situações, Poncelet teve que introduzir, além dos pontos no infinito do espaço projetivo, a noção de pontos imaginários. Do ponto de vista geométrico, estes pontos estão envolvidos por uma auréola de mistério. Veremos mais adiante que do ponto de vista algébrico, isto corresponde a considerar o espaço projetivo sôbre o corpo dos números complexos.

Por exemplo, sejam dadas duas cônicas no plano real que se intersetam em 4 pontos distintos. Dois círculos distintos têm no máximo dois pontos em comum. Como os círculos podem ser obtidos por deformações contínuas das cônicas, dois pontos de interseção das cônicas simplesmente desapareceriam nas figuras transformadas. Estes dois pontos na geometria de Poncelet são considerados imaginários e chamados de *Pontos Circulares no Infinito*.

Estes pontos perderão todo o seu mistério quando introduziremos, no próximo parágrafo, a noção de coordenadas em Geometria Projetiva.

3) A terceira idéia e a da *Reciprocação Polar* em relação a uma cônica. Havia sido notado que vários teoremas de geometria continuavam válidos quando se intercambiavam retas e pontos nos enunciados. Isto é a base do *Princípio de Dualidade*. Um dos objetivos de Poncelet ao estudar a reciprocação polar, foi o de tentar dar uma prova do princípio de dualidade.

O caso mais simples de reciprocação polar, é o de reciprocação em relação a um círculo.

Dado um círculo e um ponto p, chamado *Polo*, no plano do círculo e não no centro dele, associa-se uma, e sòmente uma, reta p, chamada *Polar*, do seguinte modo:

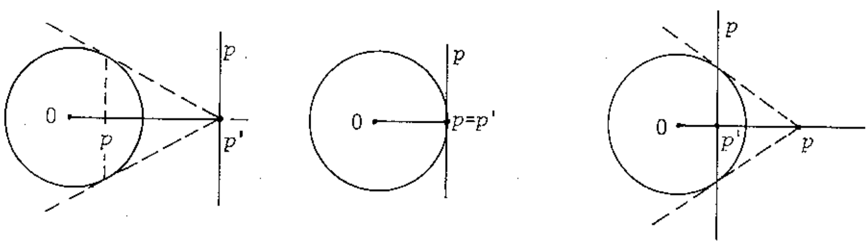


Fig. 7

As construções acima podem ser invertidas, de modo que, dada uma reta (polar) não passante por 0, associa-se um único ponto p (polo).

A reciprocação polar respeita as relações de incidência. Por exemplo, uma reta b e um ponto A sobre ela, são transformados no ponto B sôbre a reta a.

Tem-se o seguinte dicionário para a reciprocação:

Ponto	Reta
Está sôbre	Passa por
Reta por dois pontos	Interseção de duas retas
Concorrentes	Colineares
Tangentes	Pontos de contato
Lugar	Envelope

A reciprocidade polar havia sido usado já em 1806 por Charles-Julien Brianchon para demonstrar o dual do teorema de Pascal.

Teorema de Pascal	Teorema de Brianchon
Num hexágono inscrito num círculo, os pares de lados opostos determinam três pontos colineares.	Num hexágono circunscrito a um círculo, as tres diagonais são concorrentes.

O problema de achar uma demonstração puramente euclidiana, isto é, sem recorrer à noção de reciprocação polar, foi um desafio por muitos anos só sendo vencido em 1961.

O princípio de dualidade por intermédio de uma cônica foi criticado por Joseph Drez Gergonne (1771-1859) que dependia o ponto de vista de que a dualidade era um princípio geral não necessitando da mediação de uma cônica e que convalidaria o dual de todo teorema que não envolvesse propriedades métricas. Gergonne não conseguiu apresentar argumentos convincentes para a validade do princípio. Isto foi feito por Plücker após introduzir coordenadas em Geometria Projetiva.

4. O Método Analítico

Parece inacreditável que em plena revolução pós Cartesiana, os métodos sintéticos ainda prevalessem na Geometria Projetiva.

A primeira tentativa de introduzir coordenadas em Geometria Projetiva foi feita por Möbius com as suas *Coordenadas Baricêntricas*.

Fixados três pontos, formando um triângulo, as coordenadas baricêntricas de um ponto P no plano do triângulo, são números que correspondem a pesos que devem ser colocados em cada vértice do triângulo para que o centro de gravidade da figura caia em P. Isto nos fornece um conjunto de *coordenadas homogêneas* para cada ponto P, no seguinte sentido; (X,Y,Z) é um conjunto de coordenadas baricêntricas de P se, e sòmente se, para todo $t \neq 0$, (tX,tY,tZ) também o é.

Julius Plücker (1801-68) introduziu outra maneira de pensar as coordenadas e deu as primeiras contribuições à algebrização da Geometria Projetiva. O ponto de vista de Plücker, que é o adotado hoje em dia, foi o seguinte:

Considere o espaço vetorial tridimensional complexo $\mathbb{C}^3$. Um ponto P deste espaço tem coordenadas complexas (X,Y,Z). O plano projetivo complexo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ é o conjunto das retas complexas passantes por $0 = (0,0,0)$. Cada uma destas retas é determinada por um ponto $P \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dois pontos (X,Y,Z) e (X',Y',Z') determinam a mesma reta se, e sòmente se, $(X',Y',Z') = (tX,tY,tZ)$ para algum $t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Dois pontos nesta situação são identificados. Tomaremos como conjunto de representantes para os pontos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ o seguinte conjunto:

$$\{(x,y,1)/x,y \in \mathbb{C}\} \cup \{(x,1,0)/x \in \mathbb{C}\} \cup \{(1,0,0)\}.$$

O primeiro conjunto é um plano complexo que contém um único representante para cada uma das retas determinadas por pontos $P = (X,Y,Z)$ com $Z \neq 0$. O segundo conjunto é uma reta complexa que contém um único representante para cada uma das retas determinadas por pontos $P = (X,Y,Z)$ com $Z = 0$, $Y \neq 0$. O terceiro conjunto é um ponto, representante da reta determinada por qualquer um dos pontos $(X,0,0)$, $X \neq 0$.

O ponto $(1,0,0)$ é considerado ponto no infinito da reta $\{(x,1,0)/x \in C\}$, esta reta é considerada reta no infinito do plano $\{(x,y,1)/x,y \in \mathbb{C}\}$.

Como os pontos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ são as retas de $\mathbb{C}^3$ passantes por 0, as figuras de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ correspondem a cones em $\mathbb{C}^3$ com vértices em 0. A passagem da representação das figuras de $\mathbb{C}^3$ para $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, diminui a dimensão de 1. Portanto, as curvas de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ provêm de superfícies cônicas de $\mathbb{C}^3$ com vértices em 0.

Plücker se propôs, a exemplo da Geometria Analítica de Descartes, de estudar o lugar dos zeros de polinômios que representam curvas em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Como superfícies algébricas cônicas em $\mathbb{C}^3$, com vértices em 0, são zeros de polinômios homogêneos $F(X,Y,Z)$ em 3 indeterminadas, estes serão os objetos do estudo. Por exemplo, uma reta em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ corresponde a um plano de $\mathbb{C}^3$ passante pela origem, logo de equação

$$aX + bY + cZ = 0,$$

com $a,b,c \in \mathbb{C}$ não todos nulos. Uma cônica em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ é o lugar dos zeros de um polinômio homogêneo do segundo grau em 3 indeterminadas.

Com este enfoque, alguns mistérios da geometria sintética, como por exemplo os pontos circulares no infinito, ficam definitivamente desvendados.

Um círculo no plano complexo é dado por

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ podemos escrever esta equação como

$$\left(\frac{X}{Z} - a\right)^2 + \left(\frac{Y}{Z} - b\right)^2 = r^2,$$

portanto,

$$(X-aZ)^2 + (Y-bZ)^2 = r^2Z^2.$$

No infinito, isto é, quando $Z = 0$, tem-se que

$$X^2 + Y^2 = 0,$$

fatorando este polinômio tem-se,

$$(Y-iX)(Y+iX) = 0.$$

Segue então que em $\mathbb{P}(\mathbb{C})$, o círculo dado passa pelos pontos

$$I = (X,iX,0) = (1,i,0) \quad \text{e} \quad J = (X,-iX,0) = (1,-i,0).$$

Estes são os pontos circulares no infinito e pertencem a todo círculo do plano. Aí estão os dois pontos de interseção de dois círculos que faltavam.

A introdução de pontos no infinito e de pontos imaginários uniformizou, não sòmente a questão da interseção de duas retas ou de dois círculos, mas também, a questão da interseção de duas curvas quaisquer.

Maclaurin baseado em exemplos havia concluido que duas curvas, uma de grau n e outra de grau m, se intersetam em $n \cdot m$ pontos.

O grau de uma curva é o grau do polinômio que define a curva. Geometricamente o grau corresponde ao número de pontos de interseção da curva com uma reta em posição geral.

O princípio de continuidade fornece uma justificativa heurística para a observação de Maclaurin. Uma curva de grau pode ser deformada continuamente em n retas em posição geral. Cada uma destas retas tem m ponto de interseção com a curva de grau m, totalizando $n \cdot m$ pontos de interseção.

Em certas configurações particulares podem ocorrer menos pontos de interseção do que o esperado. Por exemplo, duas cônicas tangentes num ponto podem ter 3 pontos de interseção, portanto algumas interseções devem ser contadas com multiplicidade. Bézout em 1764 forneceu um modo para calcular a multiplicidade de pontos de interseção particulares mas não soube tratar os pontos no infinito nem os pontos de interseção onde as curvas apresentam singularidades. Esta questão foi definitivamente resolvida por Halphen em 1873. Hoje este resultado é conhecido como o *Teorema de Bézout* e tem o seguinte enunciado:

Duas curvas projetivas planas de graus n e m tem $n \cdot m$ pontos de interseção contados com multiplicidade apropriada.

O princípio de dualidade recebeu uma grande contribuição de Plücker que o liberou da mediação das cônicas. A idéia é muito simples.

Dada a equação de uma reta em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

$$aX + bY + cZ = 0,$$

podemos olhar para a, b e c como coordenadas homogêneas de um plano projetivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})^*$. Portanto as retas de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ passam a ser representadas por pontos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})^*$. Dada uma curva C em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ definida pela equação $F(X,Y,Z) = 0$, define-se a reta tangente à curva $\mathbb{C}$ no ponto P como sendo a reta de equação

$$XF_x(P) + YF_y(P) + ZF_z(P) = 0,$$

onde F_x, F_y e F_z são as derivadas parciais F com relação a x, y e z respectivamente e desde que $F_x(P)$, $F_y(P)$ e $F_z(P)$ não sejam simultâneamente nulos. Denote por C^0 o subconjunto dos pontos P de C que tem esta propriedade.

A cada ponto P de C^0, pode-se associar o ponto $(F_x(P), F_y(P), F_z(P)) \in \mathbb{P}(\mathbb{C})^*$, que são as coordenadas da reta tangente a C em P. Isto define uma aplicação

$$\phi: C^0 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})^*.$$

A imagem de C^0 por ϕ corresponde então ao envelope das tangentes a C. O fêcho de $\phi(C^0)$ em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, numa certa topologia chamada *Topologia de Zariski*, é uma curva, admitindo que C não seja uma reta. Esta curva é chamada de *Curva Dual* de C e é denotada por C^*.

O que foi feito com a curva C pode ser repetido com a curva C^* e vale o seguinte *Teorema* (Monge-Segre) $(C^*)^* = C$.

Plücker deu uma relação entre o grau n de C, o grau n^* de C^* e as singularidades de C. Um ponto singular de C é um ponto de $C \setminus C^0$. Supondo que as singularidades de C só são d pontos nodais e k pontos cuspidais ordinários (veja figura 8), vale a seguinte fórmula

$$n^* = n(n-1) - 2d - 3k$$

nó cúspide

Fig. 8

O princípio de dualidade consiste então em transportar propriedades das curvas em propriedades das curvas duais.

Estas idéias bem simples que expusemos nestas notas estão na base de um dos ramos mais bem sucedidos e mais ativos da matemática contemporânea: A *Geometria Algébrica*.

Referências Bibliográficas

1. H.S.M. Coxeter, S.L. Greitzer - *Geometry Revisited*. Random House The L.W. Singer Company, NY, 1967.

2. J. Dieudonné - *Courses de Géometric Algébrique* - Presses Universitaires de France, 1974.

3. F. Klein - *Le Programme d'Erlangen* - Gauthier-Villars, Paris. Bruxelles - Montréal, 1974.

4. D. Hilbert, Cohn-Vossen - *Geometry and Imagination* - Chelsea Publishing Co, NY, 1952.

5. W.M. Ivins, Jr. - *Art and Geometry*, a Study in Space Intuitions - Dover, 1964.

6. M. Kline - *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* - Oxford University Press, NY, 1972.

Universidade Federal do Espírito Santos
Departamento de Matemática
Av. Fernando Ferrari, s/nº - Goiabeiras
29.000 Vitória-ES