SOBRE AS SOMAS DE CERTAS SÉRIES INFINITAS

Geraldo Ávila

Introdução

No artigo que publicamos no primeiro número desta Revista — sob o título *Evolução dos Conceitos de Função e de Integral* — utilizamos o fato de que a soma da série

$$S = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \qquad (1)$$

é $\pi^2/8$ (p. 33 da Revista). Isto levou um leitor a perguntar-nos como se obtém este resultado. Ao pensarmos na resposta, ocorreram-nos outras questões ligadas à série acima e a outras séries com ela relacionadas, inclusive o modo como Euler obteve, pela primeira vez, as somas dessas séries. O assunto é interessante, sobretudo pela oportunidade que oferece de exibir alguns aspectos notáveis da imaginação criadora de Euler, merecendo, portanto, ser levado à atenção dos leitores desta Revista. É este o objetivo do presente artigo.

Usando séries de Fourier

Se f é uma função par, isto é $f(x) = f(-x)$, então sua série de Fourier no intervalo $-\pi < x < \pi$ é uma série de cosenos, dada por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

onde

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos ntdt, \qquad n=0,1,2,\ldots,$$

Vamos considerar o caso em que $f(x) = |x|$. Calculando então os coeficientes a_n e substituindo-os na série acima, juntamente com $f(x) = |x|$, obtemos, para $0 \leq x < \pi$,

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_0^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}. \tag{2}$$

Note-se que esta série converge uniformemente para todo x real, logo podemos passar ao limite sob a somatória com $x \to \pi$ pela esquerda. Isto nos conduz a

$$\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_0^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2},$$

donde obtemos

$$\sum_0^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}, \tag{3}$$

que é o resultado anunciado na Introdução.

A partir daqui é fácil obter a soma seguinte, um resultado bem conhecido e também descoberto por Euler:

$$S_2 = \sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}. \tag{4}$$

De fato, observemos que

$$S_2 = \sum_1\frac{1}{(2n)^2} + \sum_0^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{S_2}{4} + \sum_0^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}. \tag{5}$$

Substituindo-se esta última somatória pelo seu valor dado em (3), obtemos $3S_2/4 = \pi^2/8$, donde segue o resultado (4).

Outra consequência simples de (3) e (4) é a soma

$$\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{(n+1)}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots = \frac{\pi^2}{12}. \tag{6}$$

Para obtê-la observamos que

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{(n+1)}}{n^2} = \sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^2} - \sum_1^\infty \frac{1}{(2n)^2} = \sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{S_2}{4} \qquad (7)$$

e em seguida substituimos esta última somatória e S_2 pelos valores dados em (3) e (4) respectivamente.

Voltemos agora à série (2). Integrando-a duas vezes de 0 a x obtemos, sucessivamente,

$$\frac{x^2}{2} = \frac{\pi x}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{(2n+1)^3} \qquad (8)$$

e

$$\frac{x^3}{6} = \frac{\pi x^2}{4} + \frac{4}{\pi}\sum_0^\infty \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^4} - \frac{4}{\pi}\sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^4}. \qquad (9)$$

Fazendo $x = \pi/2$ em (8) encontramos a soma

$$\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots = \frac{\pi^3}{32}.$$

Por outro lado, com $x = \pi$, (9) nos dá

$$\sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^4} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{96}.$$

Daquí e do fato de ser

$$S_4 = \sum_1^\infty \frac{1}{n^4} = \sum_1^\infty \frac{1}{(2n)^4} + \sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{S_4}{16} + \sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^4},$$

segue-se a soma dessa sêire S_4:

$$S_4 = \sum_1^\infty \frac{1}{n^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{90}.$$

Prosseguindo com sucessivas integrações de (9) e substituições convenientes de x, obtemos as somas de outras séries, como

$$1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \dots = \frac{5\pi^5}{1536},$$

$$1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \dots = \frac{\pi^6}{960},$$

e assim por diante.

É interessante notar que Euler obteve todos esses resultados, ainda na primeira metade do século XVIII, quase cem anos antes do aparecimento das séries de Fourier. E para fazer os cálculos ele se valeu, como explicaremos adiante, de métodos puramente algébricos, usando, tacitamente, o teorema fundamental da Álgebra, que só seria demonstrado pela primeira vez, por Gauss, em 1799. Antes, porém, mostraremos como obter, com a utilização de séries de potências, as somas de todas as séries do tipo

$$S_{2m+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m+2}}, \qquad m = 0, 1, 2, \dots \tag{10}$$

Usando séries de potências

O leitor deve notar que se obtivermos primeiro a soma (4), então a soma em (3) seguirá como consequência de (5). E uma vez de posse dos resultados (3) e (4), obtemos facilmente a soma (6) usando (7). Vejamos, pois, como obter, não somente S_2, mas, de um modo geral, todas as somas do tipo (10), comparando séries de potências.

Começamos lembrando que a função $\cot x$ admite a seguinte representação (veja [5], p. 113):

$$\cot x = \frac{1}{x} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2 - x^2}, \tag{11}$$

Podemos supor que x seja real, não necessariamente complexo. Observemos que para $|x| < \pi$ e $n \geq 1$,

$$\frac{1}{(n\pi)^2 - x^2} = \frac{1}{(n\pi)^2} \frac{1}{1 - (x/n\pi)^2} = \frac{1}{(n\pi)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{x}{n\pi}\right)^{2m}.$$

Substituindo-se esta expressão em (11) e invertendo a ordem das somatórias, o que é lícito (veja [...], p. 29), encontramos:

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{\pi^{2m+2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m+2}}.$$

Daqui e de (10) segue-se que

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{S_{2m+2}}{\pi^{2m+2}} x^{2m} = 2x\left(\frac{1}{x} - \cot x\right).$$

Desenvolvendo $\cot x$ em série de potências, esta última igualdade nos dá:

$$\frac{S_2}{\pi^2} + \frac{S_4}{\pi^4}x^2 + \frac{S_6}{\pi^6}x^4 + \ldots = \frac{1}{6} + \frac{x^2}{90} + \frac{x^4}{945} + \ldots$$

É claro, agora, que basta igualar entre si os coeficientes de iguais potências de x para obtermos S_2, S_4, $S_6, \ldots$, etc. Em particular, vemos que

$$S_6 = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Devemos observar que Euler conhecia todas as séries de potências utilizadas acima e também a fórmula (11) - aliás, descoberta sua! Em consequência, os cálculos que fizemos nesta seção seriam perfeitamente familiares a Euler. Acontece, entretanto, que em seu tempo não existia a teoria da convergência de séries que existe hoje, de forma que, embora os cálculos acima sejam todos rigorosos, no tempo de Euler eles eram puramente formais. Esse procedimento formal, que Euler usava com admirável maestria e proveito, ficará mais patente no que exporemos a seguir.

A Álgebra de Euler

Vamos começar considerando certas relações entre as raizes e os coeficientes de um polinômio de grau n da forma

$$p(x) = 1 - a_1x + a_2x^2 - \ldots + (-1)^n a_n x^n. \tag{12}$$

É claro que as raizes deste polinômio são todas diferentes de zero. Designando-as por $x_1, x_2, \ldots, x_n$, podemos escrever o polinômio como um produto:

$$P(x) = (-1)^n a_n (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n). \tag{13}$$

Em seguida efetuamos as multiplicações aqui indicadas e igualamos os coeficientes das mesmas potências de x em (12) e (13). O termo constante em (13) é $a_n x_1 x_2 \ldots x_n$, de sorte que

$$a_n x_1 x_2 \ldots x_n = 1. \tag{14}$$

O termo em x é dado pela soma

$$-a_n (x_2 \ldots x_n + x_1 x_3 \ \ldots x_n + \ \ldots \ + x_1 \ldots x_{n-1}),$$

isto é, pela expressão

$$-a_n \sum_{i=1}^{n} x_1 \ldots \hat{x}_i \ldots x_n,$$

onde $\hat{x}_i$ significa "omitir o fator x_i". Então,

$$a_1 = \sum_{i=1}^{n} a_n x_1 \ldots x_i \ldots x_n.$$

Dividindo esta somatória pela expressão em (14), resulta

$$a_1 = \sum_1^n \frac{1}{x_i}. \tag{15}$$

De modo inteiramente análogo, podemos exprimir, sucessivamente, os demais coeficientes em (12) em termos das raizes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Assim encontramos

$$a_2 = \sum_{i<j} \frac{1}{x_i x_j}, \quad a_3 = \sum_{i<j<k} \frac{1}{x_i x_j x_k}, \tag{16}$$

e assim por diante.

Usando (15) e (16) é fácil ver que

$$a_1^2 = \sum_1^n \frac{1}{x_i^2} + 2a_2,$$

ou seja

$$\sum_{1}^{n} \frac{1}{x_i^2} = a_1^2 - 2a_2. \tag{17}$$

Vamos ver agora como Euler utilizou esses resultados para calcular as somas de várias séries infinitas. Ele começa com a série

$$y = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots,$$

que pode ser escrita na forma

$$1 - \frac{x}{y} + \frac{x^3}{3!y} - \frac{x^5}{5!y} + \dots = 0.$$

Euler interpreta esta série como um "polinômio infinito" em x. Se $x = \alpha, \beta, \gamma, \dots$ são as suas raizes, então, por analogia com (12) e (13), podemos escrever:

$$1 - \frac{x}{y} + \frac{x^3}{3!y} - \frac{x^5}{5!y} + \dots = (1 - \frac{x}{\alpha})(1 - \frac{x}{\beta})(1 - \frac{x}{\gamma})\dots = 0. \tag{18}$$

As raizes $x = \alpha, \beta, \gamma, \dots$ são os valores de x tais que $y = \sin x$. Então, se $x = \alpha$ é uma tal raiz, todas essas raizes são dadas pelas fórmulas

$$\alpha + 2k\pi \quad \text{e} \quad (\pi - \alpha) + 2k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Fazendo $k = 1, 2, \dots,$ obtemos a sequência de valores

$$\alpha, \pi - \alpha, \alpha + 2\pi, 3\pi - \alpha, \dots;$$

e com $k = -1, -2, \dots,$ resulta a sequência

$$-\pi - \alpha, -2\pi + \alpha, -3\pi - \alpha, -4\pi + \alpha, \dots$$

Por analogia com o caso finito, $a_1 = 1/y$ e $a_2 = 0$ em (18), de sorte que (15) e (17) se tornam, respectivamente,

$$(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\pi - \alpha} + \frac{1}{\alpha + 2\pi} + \dots) - (\frac{1}{\pi + \alpha} + \frac{1}{2\pi - \alpha} + \frac{1}{3\pi + \alpha} + \dots) = \frac{1}{y}$$

e

$$\left[\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{(\pi-\alpha)^2} + \frac{1}{(\alpha+2\pi)^2} + \ldots\right] + \left[\frac{1}{(\pi+\alpha)^2} + \frac{1}{(2\pi-\alpha)^2} + \frac{1}{(3\pi+\alpha)^2} + \ldots\right] = \frac{1}{y}.$$

Fazendo $\alpha = \pi/2$ e, (e consequentemente, $y = 1$), estas equações passam a ser

$$\frac{4}{\pi}\left[\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \ldots\right)\right] = 1$$

e

$$\frac{8}{\pi^2}\left[\left(1+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{9^2}+\ldots\right) + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \ldots\right)\right] = 1$$

Finalmente, rearranjando os termos destas séries e multiplicando, a primeira por $\pi/4$ e a segunda por $\pi^2/8$, obtemos as somas

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4} \tag{19}$$

e (6) respectivamente. A propósito, essa série (19) fora obtida, pela primeira vez, por Leibniz, em 1674.

Conclusão

Os cálculos da seção anterior são uma simples amostra de comos os matemáticos do século XVIII — sobretudo Euler — utilizavam manipulações formais. É claro que esse procedimento não satisfaz aos padrões de rigor de nossos dias; sabemos, em particular, que existe uma diferença nítida entre polinômios e séries infinitas, não sendo lícito supor que as propriedades das raizes de um polinômio sejam necessariamente válidas para séries infinitas.

Mas é preciso usar de objetividade em qualquer avaliação crítica. O pensamento dominante numa determinada época — seja em ciência ou em qualquer atividade do espírito humano — só pode ser devidamente apreciado no contexto próprio do período em que se desenvolveu. No caso que nos interessa aqui, só podemos entender e avaliar devidamente a obra de um matemático como Euler quando examinamo-la sob a ótica científica da época em que ele viveu, não permitindo que o conhecimento desde então acumulado e a perspectiva do presente deformem nossa apreciação crítica.

Vejamos como essas observações se aplicam aos procedimentos usados na manipulação das séries infinitas. Newton foi dos primeiros a reconhecer a importância destas séries nos processos do Cálculo, isto já por volta de 1665. De fato, sua descoberta do teorema fundamental, estabelecendo a ligação recíproca entre derivação e integração, ocorreu na consideração de funções algébricas do tipo "monômio"; e ele estendeu o resultado a outras funções, usando o recurso de desenvolvê-las em séries de potencias. Desde então e, seguramente, por século e meio, as séries foram manipuladas como se fossem polinômios; portanto, a elas se aplicavam os mesmos processos do cálculo formal algébrico. E foi precisamente por isto — pela utilização do formalismo algébrico no trato com as séries infinitas, ao lado de outros procedimentos formais então usados, como o cálculo com infinitésimos — que os matemáticos conseguiram progressos notáveis no desenvolvimento das técnicas e dos métodos analíticos do Cálculo, na descoberta de novas funções e novas maneiras de representá-las, enfim na criação e consolidação da Análise Matemática como disciplina autônoma.

Num sentido muito real, foi a própria ignorância de certos fatos, como o da necessidade de se reconhecer a diferença entre um polinômio e uma série infinita, que permitiu se processasse todo esse desenvolvimento; pois tivessem os matemáticos da época visão clara de que nem sempre é lícito utilizar o formalismo algébrico, submetendo-se então a exigentes critérios de rigor, certamente eles teriam inibido sua atividade criadora.

A necessidade de se distinguir entre as operações algébricas e os processos infinitos da Análise só se tornou evidente depois desse longo período de desenvolvimento no século XVIII, graças à própria experiência então adquirida. Foi a partir de então, já no século XIX, que puderam surgir teorias precisas sobre limite, integração, convergência de séries infinitas, etc.

Ao leitor interessado em leitura adicional, recomendamos os artigos de Ayoub [1] e Kline [4], que contêm explanações mais detalhadas sobre Euler e a manipulação formal de séries; o livro de

Grattan-Guinness [3], sobre a evolução do Cálculo e da Análise Matemática, sobretudo o capítulo 2, onde são tratadas, de maneira clara e concisa, as contribuições de Newton, Leibniz e Euler, dentre outros; e o artigo de Grabiner [2], que contém uma interessante discussão de vários aspectos da Matemática no século XVIII e das razões que levaram às crescentes preocupações com o rigor no século XIX.

Referências Bibliográficas

[1] R. Ayoub, *Euler and the Zeta Function*, American Mathematical Monthly, vol. 81 (1974) 1067-1087.

[2] J.V. Grabiner, *Is Mathematical Truth Time-Dependent?*, American Mathematical Monthly, vol. 81 (1974) 354-365.

[3] I. Grattan-Guinness (editor), *From the Calculus to Set Theory*, Duckworth and Co., 1980.

[4] M. Kline, *Euler and Infinite Series*, Mathematics Magazine, vol. 56 (1983) 307-314.

[5] E.C. Titchmarsh, *Theory of Functions*, Oxford University Press, 1968.

Universidade de Brasília
Departamento de Matemática
70.910 Brasília-DF