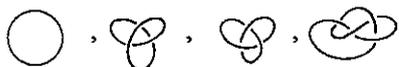


O INVARIANTE DE JONES E OUTROS INVARIANTES DE NÓS

Derek Hacon

A teoria matemática dos nós é de origem relativamente recente, apesar dos aspectos práticos e decorativos de nós terem uma longa história. Nas décadas finais do século XIX foram determinados (quase todos) os vários tipos de nós que podem ser desenhados com menos de 12 cruzamentos, o limite do possível naquela época.

Uma motivação inicial para este projeto de classificação foi a teoria de Kelvin que pretendia explicar a química em termos de nós! A classificação foi feita empiricamente, a lista começando com

 , ... (veja §1). Uma pergunta natural é

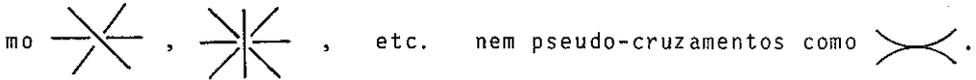
se poderiam existir repetições na lista. Só foi possível dar uma resposta definitiva no século XX com o desenvolvimento dos invariantes da topologia algébrica. Hoje em dia, a maioria dos invariantes de nós é de origem topológica mas, nos últimos dois ou três anos, foram descobertos vários novos invariantes como consequência da descoberta do invariante de Jones. Até agora estes invariantes não têm uma explicação topológica. Neste artigo queremos dar uma idéia de como funcionam estes novos invariantes e da conexão entre eles e outros invariantes.

As várias seções são:

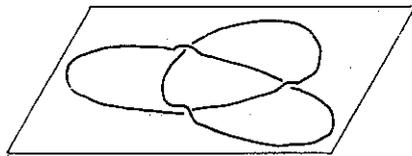
- §1. Generalidades sobre nós em \mathbb{R}^3 .
- §2. O determinante de um nó.
- §3. Nós trançados.
- §4. Fórmula recursiva para $\det(K)$.
- §5. Invariantes polinomiais.
- §6. Apêndice - o grupo do nó e $\det(K)$.

§1. Nós em \mathbb{R}^3

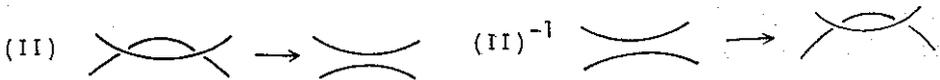
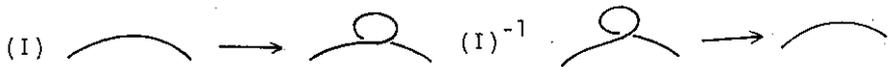
Um nó em \mathbb{R}^3 é uma curva fechada em \mathbb{R}^3 sem auto-interseções. Podemos restringir-nos a nós dados por diagramas no plano. Num diagrama não são permitidos cruzamentos triplos, quádruplos etc. como

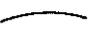


O diagrama  , por exemplo, deve ser interpretado como uma curva quase toda contida no plano, aparte as três pequenas "pontes" onde a curva passa em cima de si mesma



Dois nós são *equivalentes* se um pode ser transformado no outro por uma sequência de *transformações elementares*

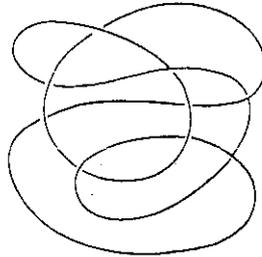


Exercícios: Transforme  em  e 

em  usando as transformações elementares. \setminus

Se K e L são equivalentes escrevemos $K \sim L$. Dizemos que K e L são do mesmo tipo.

A maneira mais simples de se produzir exemplos de nós é de desenhar um nó ao acaso, lembrando-se de indicar em cada cruzamento qual é o trecho que passa em cima do outro. Por exemplo:



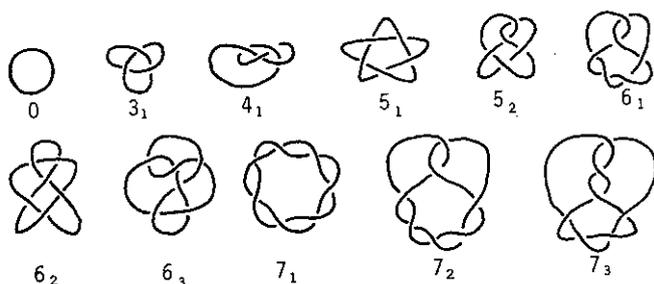
Uma pergunta básica é se dois nós são equivalentes ou não. Se conseguirmos *explicitamente* transformar um no outro, acabou a discussão. Mas se não conseguirmos, pode ser mera falta de esperteza! Porém a pergunta pode ser decidida negativamente se acharmos um invariante que distinga entre os dois nós.

Um *invariante* (numérico) de nós é um número $I(K)$ que pode ser calculado para qualquer nó K e que é invariante no sentido que se $K \sim L$ então $I(K) = I(L)$, ou seja se $I(K) \neq I(L)$ então $K \not\sim L$. Se $I(K) \neq I(L)$ dizemos que I *distingue* entre K e L .

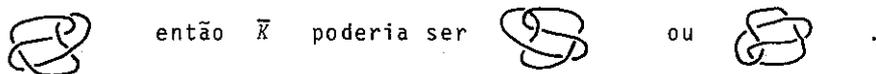
$I(K)$ não precisa ser um número. Pode ser um grupo, um anel, uma álgebra, etc. Neste caso a condição de invariância é "se $K \sim L$ então $I(K) \cong I(L)$ ", onde \cong significa isomorfismo de grupos, anéis, álgebras, etc.

Existe, há muito tempo, uma lista das várias centenas de tj

pos de nós, que podem ser desenhados com menos de uma dúzia de cruzamentos. Esta lista começa assim:



Esta lista precisa ser completada da seguinte maneira. Primeiro, para cada K na lista, é preciso incluir também \bar{K} , onde \bar{K} é obtido refletindo K num espelho, geralmente horizontal ou vertical. Por exemplo, se K é o nó



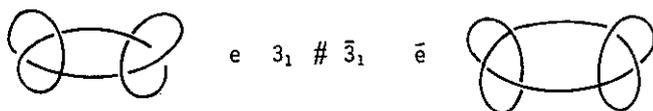
Todas estas possibilidades para \bar{K} são equivalentes, pois um espelho pode sempre ser movido continuamente para assumir qualquer outra posição.

Se $K \sim \bar{K}$ então K é chamado de nó *simétrico*.

Na lista acima são 0 , 4_1 e 6_3 são simétricos. Os demais não podem ser simétricos, pois existe um invariante I tal que $I(K) \neq I(\bar{K})$ para $K = 3_1, 5_1, 5_2, 6_1, 6_2, 7_1, 7_2, 7_3$ (e muitos outros nós).

Os vários invariantes são usados para mostrar que a lista não contém repetições, ou seja, dois nós do mesmo tipo.

É preciso também incluir as várias somas conexas $K \# L$, isto é o nó obtido juntando K e L . Por exemplo $3_1 \# 3_1$ é

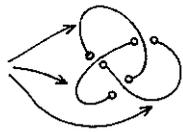


§2. O determinante $\det(K)$

Nesta seção, veremos como calcular um dos invariantes mais simples, o determinante, $\det(K)$.

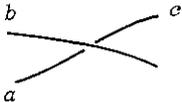
Calcular $\det(K)$ é bastante fácil mas explicar sua invariância é mais difícil. É possível verificar, sem muito trabalho, que se K' é obtido de K por uma transformação elementar (veja §1) então $\det(K') = \det(K)$ e isto é suficiente para mostrar a invariância de $\det(K)$. Esse cálculo, porém, não explica a invariância. Tal explicação precisa de mais trabalho, em particular do uso do grupo do nó. O apêndice contém uma rápida discussão das origens topológicas do determinante mas não é necessário para a leitura das demais seções.

Vamos calcular $\det(K)$ no caso simples $K = 3_1$. O diagrama

de 3_1 consiste em três arcos . A receita no ca

so geral é:

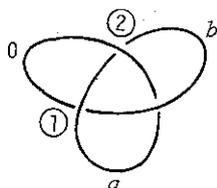
(1) A cada um dos n arcos associamos uma variável e colocamos uma destas variáveis (qualquer uma) igual a zero.

(2) Para cada cruzamento  escrevemos a equação

$a+c-2b = 0$ e esquecemos uma destas equações (acontece que qual quer uma das equações é consequência das outras).

(3) $\det(K)$ é o valor absoluto do determinante deste sistema $(n-1) \times (n-1)$.

Para $K = 3_1$ então temos

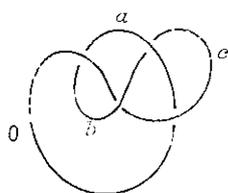


$$0+b-2a = 0 \quad - \textcircled{1}$$

$$a+b = 0 \quad - \textcircled{2}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3. \quad \text{Então } \det(K) = 3.$$

Para $K = 4$ temos



$$a+b = 0$$

$$c-2b = 0$$

$$a-2c = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 5. \text{ Ent\~{a}o } \det(K) = 5.$$

Podemos concluir que $3_1 \neq 4_1$.

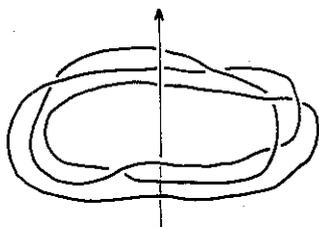
O leitor poder\~{a} verificar sem muita dificuldade que os valores de $\det K$ na lista $0, 3_1, \dots, 7_3$ s\~{a}o respectivamente $1, 3, 5, 5, 7, 9, 11, 13, 7, 11, 13$.

Para calcular $\det(\bar{K})$ e $\det(K \# L)$ temos as regras $\det(\bar{K}) = \det(K)$ e $\det(K \# L) = \det(K) \cdot \det(L)$.

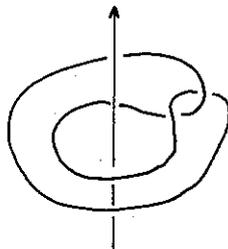
\u00c9 claro da tabela acima que $\det(K)$ \u00e9 sempre um n\u00famero \u00edmpar. Podemos verificar isto facilmente, pois, m\u00f3dulo dois, a equa\u00e7\u00e3o $a+c-2b=0$ equivale a equa\u00e7\u00e3o $a=c$. Fazendo a volta do n\u00f3 vemos que todas as vari\u00e1veis t\u00eam que ser iguais m\u00f3dulo dois. Como uma delas \u00e9 zero a \u00fanica solu\u00e7\u00e3o m\u00f3dulo dois \u00e9 a solu\u00e7\u00e3o trivial e ent\u00e3o o determinante \u00e9 n\u00e3o-zero m\u00f3dulo dois, ou seja $\det(K)$ \u00e9 \u00edmpar.

§3. N\u00f3s tran\u00e7ados

Um n\u00f3 *tran\u00e7ado* \u00e9 um n\u00f3 que n\u00e3o encontra o eixo vertical e que sempre gira na mesma dire\u00e7\u00e3o em torno do eixo. Por exemplo



\u00e9 tran\u00e7ado mas



n\u00e3o \u00e9

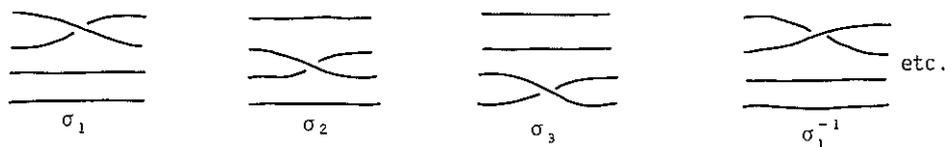
Parametrizando \mathbb{R}^3 por (r, θ, z) , onde r e θ são coordenadas polares no plano $z = 0$, o $n\tilde{o}$ encontra cada semi-plano $\theta = \text{cte}$ no mesmo número de pontos.

É um fato clássico que *todo $n\tilde{o}$ é equivalente a um $n\tilde{o}$ trançado*.

Um $n\tilde{o}$ trançado tem uma orientação natural — na direção de



É claro que podemos concentrar a parte interessante do $n\tilde{o}$ trançado numa pequena região $\theta_0 < \theta < \theta_1$. Uma tal porção é chamada de *trança*. Podemos representar uma trança por um diagrama como no caso de um $n\tilde{o}$. Por exemplo temos as seguintes 4-tranças:



Dois tranças podem ser compostas colocando uma depois da outra. Por exemplo



Cada n -trança é uma palavra nos $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$. Por exemplo,

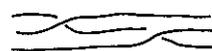
$\sigma_1^3 \sigma_5^{-2} \sigma_1 \sigma_2^{-4} \sigma_3$. Fechando, , obtemos um $n\tilde{o}$ ou link $F(b)$.

(Um *link* consiste de dois ou mais $n\tilde{o}$ s entrelaçados em geral). Por exemplo os $n\tilde{o}$ s $0, 3_1, 4_1, \dots, 7_3$ são respectivamente $F(1), F(1^3), F(1\bar{2}1\bar{2}), F(1^5), F(2^2\bar{1}21^2), F(1\bar{2}1\bar{3}2\bar{3}2), F(\bar{1}2\bar{1}\bar{2}^3), F(\bar{1}2^2\bar{1}^2), F(1^7), F(\bar{1}3^321^2\bar{3}2)$ e $F(2^512^2\bar{1}^2)$ onde m^a, \bar{m}^b significam α_m^a e α_{mm}^{-b} .

Lema. As n -tranças formam um grupo B_n .

Demonstração: A multiplicação é associativa no sentido que $(ab)c$ e $a(bc)$ são tranças equivalentes. O elemento neutro é

 . O inverso b^{-1} é a reflexão de b no plano "vertical"

$b =$  $b^{-1} =$ 

ou, equivalentemente, escreva b como palavra nos σ_i e tome a inversa. Por exemplo $(\sigma_1^2 \sigma_3^{-1} \sigma_2^6)^{-1} = \sigma_2^{-6} \sigma_3 \sigma_1^{-2}$.

Teorema. O grupo B_n consiste de todas as palavras nos $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ sujeitas às relações $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ e $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ se $|i-j| \geq 2$.

Demonstração: Omitida — mas o teorema é fácil de se aceitar. É claro que as equações são verdadeiras. Por exemplo



corresponde à transformação elementar (III); e cancelar $\sigma_i \sigma_i^{-1}$ ou $\sigma_i^{-1} \sigma_i$ corresponde a (II)⁻¹. O conteúdo do teorema é que a recíproca é verdadeira, ou seja que se duas palavras nos σ_i representam tranças equivalentes então uma palavra pode ser transformada na outra usando as relações.

Para nós trançados há um resultado parecido.

Teorema. $F(b)$ e $F(c)$ são equivalentes como nós trançados (equilência \approx no sentido que não pode cruzar o eixo z) se e so se $c = g^{-1} b g$.

Demonstração: Omitida - É claro que $F(g^{-1}bg) \approx F(b)$ pois em $F(g^{-1}bg)$ podemos cancelar g^{-1} com g (o que não seria possível sem fechar) ficando com $F(b)$. A recíproca é mais difícil de se mostrar.

Se consideramos $F(b)$ como nó em R^3 temos um resultado parecido. É claro que se b é uma palavra em B_{n+1} que não contém σ_n então

$$F(b) \sim F(b\sigma_n).$$

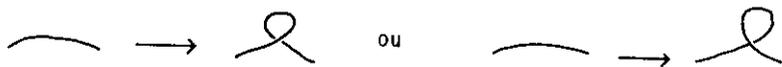
Se b é uma n -trança, seja $b^\#$ a $n+1$ -trança obtida assim



Então $F(b) \sim F(b^\#)$. O teorema é

Teorema. $F(b) \sim F(c)$ se e só se existe uma sequência de tranças $b = b_1, b_2, b_3, \dots, b_k = c$ tais que $b_i = g^{-1}b_{i+1}g$ ou $b_i = b_{i+1}$ ou $b_{i+1} = b_i^\#$.

A operação $F(b) \rightarrow F(b^\#)$ corresponde às transformações elementares

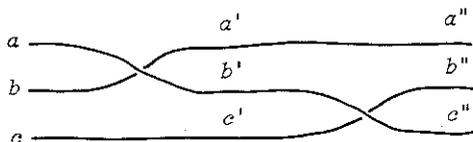


Foi usando este teorema que Jones mostrou a existência do seu novo invariante. Ele notou que uma certa família de matrizes já conhecida poderia ser usada para definir matrizes invertíveis A_i satisfazendo as relações $A_i A_{i+1} A_i = A_{i+1} A_i A_{i+1}$ e $A_i A_j = A_j A_i$. Isto é equivalente a um homomorfismo ϕ do grupo B_n no grupo de matrizes invertíveis.

Usando o traço de $\phi(b)$ e o fato que $\text{traço}(\phi(g^{-1}bg)) = \text{traço}(\phi(g)^{-1}\phi(b)\phi(g)) = \text{traço}(\phi(b))$ ele conseguiu definir um $J(b)$ tal que $J(b^{-1}bg) = J(b)$. Ou seja, J é um invariante de nós trançados. Além disso, ele descobriu que $J(b^\#) = J(b)$ e que então, pelo teorema acima, J é um invariante de nós ou links em \mathbb{R}^3 .

Como a construção dos A_i é bastante exótica, consideraremos algo bem mais simples, mas que tem certas analogias com J — o cálculo de $\det(F(b))$.

Considere o caso $b = \sigma_1 \sigma_2$



Depois de σ_1 temos as equações

$$a' = 2a - b, \quad b' = a, \quad c' = c.$$

Depois de σ_2 temos

$$a'' = a', \quad b'' = 2b' - c', \quad c'' = b'.$$

Fechando temos

$$a'' = a, \quad b'' = b, \quad c'' = c.$$

Simbolicamente, temos

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

ou seja $X' = M(\sigma_1)X$, $X'' = M(\sigma_2)X'$. Então a matriz do sistema é $M(\sigma_2)M(\sigma_1) - I$. Para calcular $\det(F(\sigma_1 \sigma_2))$ riscamos uma coluna qualquer e uma linha qualquer e calculamos o determinante.

Considere o caso de $\gamma_3 = F(2^5 12^2 \bar{1}^2)$. A matriz é $M(\sigma_1)^{-2} M(\sigma_2)^2 M(\sigma_1) M(\sigma_2)^5 - I = (I - 2E_1)(I + 2E_2)(I + E_1)(I + 5E_2) - I$,

onde $M(\sigma_1) = I + E_1$; $M(\sigma_2) = I + E_2$, $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

É fácil verificar que

$$(I) \quad E_1^2 = 0 = E_2^2 \quad \text{e então} \quad (I + E_i)^k = I + kE_i \quad (i=1,2)$$

$$(II) \quad E_1 E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(III) \quad E_1 E_2 E_1 = -E_1, \quad E_2 E_1 E_2 = -E_2.$$

Então a nossa matriz

$$I - E_1 + 7E_2 - 9E_1 E_2 + 2E_2 E_1 - 4E_1 E_2 E_1 + 10E_2 E_1 E_2 - 20E_1 E_2 E_1 E_2 - I$$

$$= 3E_1 - 3E_2 + 11E_1 E_2 + 2E_2 E_1 = \begin{pmatrix} 3 & -14 & x \\ 5 & -19 & x \\ x & x & x \end{pmatrix} \quad (\text{onde não precisa achar os } x\text{'s}).$$

Como $\begin{vmatrix} 3 & -14 \\ 5 & -19 \end{vmatrix} = 13$, $\det(7_3) = 13$.

Em geral $M(\sigma_i) = I + E_i$ onde $E_i E_j = 0$ se $|i-j| \neq 1$ e $E_i E_{i\pm 1} E_i = -E_i$.

É interessante notar que as matrizes usadas por Jones satisfazem $E_i^2 = E_i$, $E_i E_{i\pm 1} E_i = \lambda E_i$, $E_i E_j = E_j E_i$ se $|i-j| \geq 2$ (aqui λ é um parâmetro real).

As matrizes $M(\sigma_i)$ fornecem um homomorfismo $B_n \rightarrow$ matrizes invertíveis. Sô precisa checar que $M(\sigma_i)M(\sigma_{i+1})M(\sigma_i) = M(\sigma_{i+1})M(\sigma_i)M(\sigma_{i+1})$ e $M(\sigma_i)M(\sigma_j) = M(\sigma_j)M(\sigma_i)$ se $|i-j| \geq 2$.

Estas relações seguem-se imediatamente das relações $E_i E_{i \pm 1} E_i = -E_i$ e $E_i E_j = 0$ se $|i-j| \neq 1$.

§4. Uma fórmula recursiva para $\det(K)$

Se um nó ou link orientado trocamos um cruzamento



obtemos dois outros nós ou links. Veremos que os determinantes des tes três nós satisfazem uma simples equação linear e que isto per mite calcular $\det(K)$ recursivamente.

Para motivar a fórmula, considere o que acontece com $\det(F(b))$ se trocarmos a n -trança b pela n -trança $b\sigma_{n-1}^k$ (não confundir com $b^\#$ da seção 3). A matriz de $b\sigma_{n-1}^k$ é $M(\sigma_{n-1}^k)M(b) - I = (I + kE_{n-1})M(b) - I = M(b) - I + kE_{n-1}M(b) =$

$$= M(b) - I + k \begin{pmatrix} \text{○} \\ \alpha\beta\dots\mu \\ \alpha\beta\dots\mu \end{pmatrix} \quad (\text{digamos}).$$

Riscando a última coluna e a última linha obteremos uma ma triz da forma $A + k \begin{pmatrix} \text{○} \\ \alpha\beta\dots\lambda \end{pmatrix}$ cujo determinante é $|A| + k|B|$ on

de B é a matriz obtida trocando a última linha de A por $\alpha\beta\dots\lambda$. Colocando $k = 1, -1, 0$ sugere que existe uma equação do tipo

$$\pm \det F(b\sigma_{n-1}) \pm \det F(b\sigma_{n-1}^{-1}) = \pm 2 \det F(b).$$

A ambigüidade \pm pode ser exorcizada definindo $\text{Det}(K)$ pe la regra $\text{Det}(K) = \pm \det(K)$, $\text{Det}(K) \equiv 1$ (módulo 4) (lembramos que $\det(K)$ é ímpar). Pode-se mostrar que esta é a definição "cer- ta" para nós e que $\text{Det}(K)$ pode ser definida também para links

(orientados) de tal maneira que

$$\text{Det}(K_+) - \text{Det}(K_-) = \pm 2 \text{Det}(K_0)$$

onde

(1) K_- resp. K_0 é obtido de K_+ trocando um cruzamento



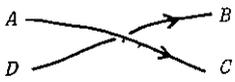
(é claro que se um de K_0 , K_- , K_+ é orientado então os outros dois também são orientados).

(2) O sinal \pm é igual a $\mu(K_+) - \mu(K_0)$ onde $\mu(K)$ é a multiplicidade de K (isto é: K consiste de $\mu(K)$ nós entrelaçados).

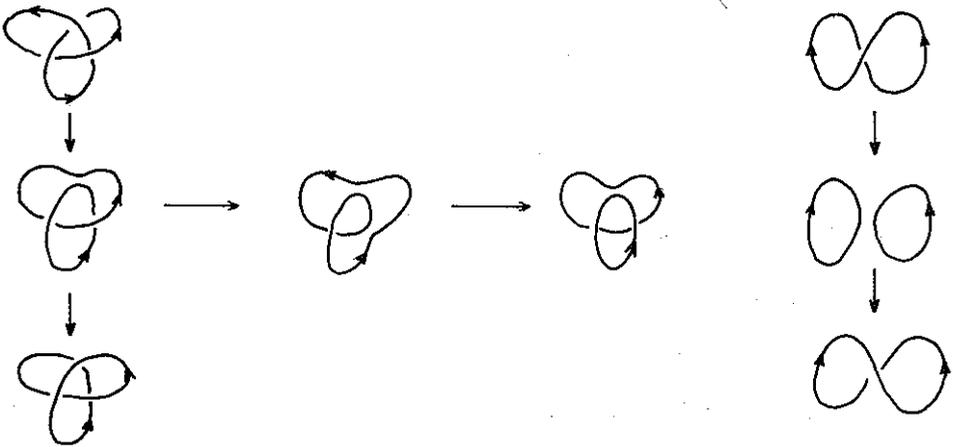
O seguinte lema esclarece $\mu(K)$.

Lema. $\mu(K_-) = \mu(K_+)$ e $\mu(K_0) = \mu(K_+) \pm 1$.

Demonstração: $\mu(K_-) = \mu(K_+)$ é claro. Quando a $\mu(K_0)$, no

cruzamento  o trecho que sai de B voltará por A ou por D . Se for por A então $\mu(K_0) = \mu(K_+) + 1$. Se for por D então $\mu(K_0) = \mu(K_+) - 1$.

Vamos calcular $\text{Det}(3_1)$ usando esta fórmula. (É preciso ter cuidado com as orientações!) Temos



onde \downarrow ou \rightarrow significa uma sequência $K_+ \rightarrow K_0 \rightarrow K_-$. Então $\text{Det}(00) = 0$, $\text{Det}(\text{S}) = +2 \text{Det}(0)$ e $\text{Det}(3_1) = \text{Det}(0) - 2\text{Det}(\text{S}) = -3 \text{Det}(0)$. Como $\text{Det}(0) = +1$, isto está de acordo com o fato que $\text{det}(3_1) = 3$.

Exercício: Mostre que $\text{Det}(5_2) = -7$.

Podemos evitar o $\mu(K)$ nos cálculos com o seguinte truque:

Seja

$$\Delta(K) = \sqrt{-1}^{\mu(K)-1} \text{Det}(K).$$

Então é fácil verificar que

$$\Delta(K_+) = -\Delta(K_-) = 2\sqrt{-1} \Delta(K_0).$$

§5. Invariantes Polinomiais

Jones mostrou que seu invariante também satisfaz uma simples fórmula recursiva. Subsequentemente vários autores trocaram a

construção explícita de Jones em termos de matrizes por uma construção axiomática mais simples e ao mesmo tempo mais geral.

Teorema. Existe uma e só uma maneira de associar a cada \bar{n} ou link orientado K um polinômio $P_K(x, y, z)$ nas variáveis $x, x^{-1}, y, y^{-1}, z, z^{-1}$ tal que

$$(1) P_K \text{ é homogêneo de grau } 0.$$

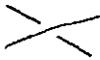
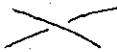
$$(2) P_{\bar{1}} = 1 \quad (0 \text{ é } \bar{n} \text{ trivial}).$$

$$(3) \text{ Se } K \sim_{\text{or}} L \text{ então } P_K = P_L.$$

$$(4) xP_{K_-} + yP_K + zP_{K_+} = 0.$$

[Homogêneo de grau 0 quer dizer uma soma de termos $x^a y^b z^c$ onde $a+b+c = 0$.]

A demonstração do teorema é por indução na "complexidade" do \bar{n} . Para mostrar a unicidade usa-se o fato que todo \bar{n} ou link po de ser reduzido a um \bar{n} ou link trivial trocando um número de

cruzamentos  por  e vice-versa, e que

então P_K é determinado por (2) (3) (4).

Exemplo: Usando o esquema acima para $K = 3_1$ obtemos

$$P_K = -2xz^{-1} + (y^2 - x^2)z^{-2}.$$

É claro agora que $\text{Det}(K)$ é um caso muito particular de P_K .

Colocando $x = -1, y = -2\sqrt{-1}, z = 1$ vemos que $\text{Det}(K) =$

$= P(-1, -2\sqrt{-1}, 1)$ pois a regra para calcular $\text{Det}(K)$ é

$$\text{Det}(K_+) - \text{Det}(K_-) = 2\sqrt{-1} \text{Det}(K_0).$$

O polinômio de Jones é obtido colocando $x = t^{-1}, y = t^{-1/2} - t^{1/2}, z = -t$ e o polinômio de Alexander corresponde a $x = -1, y = t^{-1/2} - t^{1/2}, z = 1$.

P_K é muito útil para detectar nós assimétricos:

Lema. $P_{\bar{K}} = P_K$ onde $\tilde{f}(x,y,z) = f(z,y,x)$.

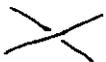
Demonstração: Defina $R_K = \tilde{P}_K$ e verifique que R_K satisfaz as condições para P_K . Por unicidade, $R_K = P_K$, ou seja $\tilde{P}_K = P_K$, isto é, $P_{\bar{K}} = \tilde{P}_K$. (Note que $(\bar{K})_{\pm} = \overline{K_{\mp}}$ e que $(\bar{K})_0 = \overline{K_0}$.)

Exercício: Verifique que 3_1 não é simétrico.

Embora, em geral, P_K dependa das orientações, podemos, em princípio, usar P no caso não orientado também. É um exercício fácil mostrar, com a ajuda do teorema, que, se $-K$ é o nó ou link K com a orientação oposta, então $P_{-K} = P_K$, ou seja P_K só depende das "orientações relativas" das componentes do K . Então, no caso de um nó K , P_K não depende da orientação. Se $K \sim L$ podemos orientar K e L de tal maneira que $K \underset{\text{or}}{\sim} L$, e então $P_K = P_L$. Então se K e L são nós e $P_K \neq P_L$ podemos concluir que $K \not\sim L$. Mas no caso não orientado existe um outro polinômio.

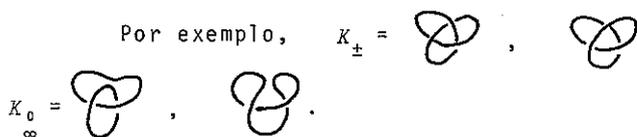
Teorema. Existe uma e só uma maneira de associar a cada nó ou link K um polinômio $Q_K(x)$ em x e x^{-1} tal que

- 1 $Q_0(x) = 1$; ($0 =$ nó trivial)
- 2 Se $K \sim L$ então $Q_K = Q_L$;
- 3 $Q_{K_+} + Q_{K_-} = x(Q_{K_0} + Q_{K_{\infty}})$.

Dado um cruzamento  de K definimos K_+ e K_- usando

 e  (a ordem não importa) e definimos K e K_{∞}

usando  e  (onde aqui também a ordem não importa).



A demonstraçãõ ã semelhante ã do caso de P_K .
 Algumas propriedades de Q_K sãõ:

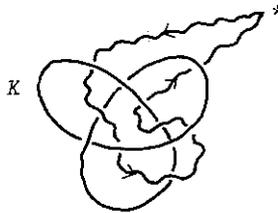
- ① $Q_K^- = Q_K$
- ② $Q_{K\#L} = Q_K Q_L$
- ③ $Q_{00} = 2x^{-1} - 1$ (00 ã o link .
- ④ $Q_K(-2) = (-2)^{\mu(K)-1}$
- ⑤ $Q_K(-1) = (-3)^{e(K)}$ onde $e(K)$ ã um certo invariante topolõgico associado a K .
- ⑥ $Q_K(1) = 1$
- ⑦ $Q_K(2) = \det(K)^2$
- ⑧ Existem casos onde $Q_K \neq Q_L$ mas $P_K = P_L$ para todas as possíveis orientações de K e L . Entãõ Q_K nãõ pode sãõ depender de P_K .

Atã agora nãõ foi descoberta nenhuma explicaçãõ destes polinõmiais em termos de topologia algãbrica. No caso de $\det(K)$, existe uma explicaçãõ topolõgica. O mesmo ã verdadeiro para $\Delta_K(t)$, o polinõmio de Alexander. A definiçãõ de $\Delta_K(t)$ ã parecida com a definiçãõ de $\det(K)$ mas um pouco mais complicada, pois depende de um parãmetro t . A conexãõ entre os dois ã que o valor $\Delta_K(-1)$ de $\Delta_K(t)$ em $t = -1$ ã $\det(K)$. Como $\Delta_K(t)$ e $\det(K)$ tãem muitas propriedades em comum, ã preferível sãõ discutir $\det(K)$. No apãndice daremos uma breve idãia da explicaçãõ topolõgica de $\det(K)$.

§6. Apêndice: O grupo do nó e $\det(K)$

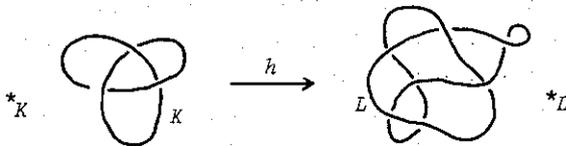
Neste apêndice definiremos um invariante $d(K)$ que é claramente um invariante de nós (por definição) e mostraremos como $d(K)$ pode ser calculado do diagrama de K . Em muitos casos $\det(K) = d(K)$ e então, nestes casos, temos uma explicação topológica para $\det(K)$.

Faremos uso da idéia de grupo fundamental $\pi_1(X, *)$ de um espaço X relativo a um ponto $*$, que pode ser encontrado em quase toda introdução à Topologia Algébrica. $\pi_1(X, *)$ é definido usando laços em X com ponto base $*$. Consideraremos o caso $X = \mathbb{R}^3 - K$, onde o ponto base $*$ é um ponto qualquer de X . Lembramos que um laço em X é um caminho contínuo em $\mathbb{R}^3 - K$ com pontos inicial e final iguais a $*$.



O grupo $\pi(K)$ de K é, por definição, igual a $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K, *)$.

Lema. Se $K \sim L$ e $*_K, *_L$ são os pontos base de $\mathbb{R}^3 - K$ e $\mathbb{R}^3 - L$ então existe um homeomorfismo $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que leva K em L e $*_K$ em $*_L$.



Corolário. Se $K \sim L$ então $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K, *_K)$ e $\pi_1(\mathbb{R}^3 - L, *_L)$ são grupos isomorfos.

Demonstração: O homeomorfismo h induz um homeomorfismo

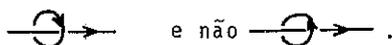
$h: \mathbb{R}^3 - K \rightarrow \mathbb{R}^3 - L$. Como h leva $*_K$ em $*_L$, h define um isomorfismo entre $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K, *_K)$ e $\pi_1(\mathbb{R}^3 - L, *_L)$.

Então o tipo do grupo $\pi(K)$ é bem definido. Cada tipo de nó define um tipo (classe de isomorfismo) de grupo. Portanto $\pi(K)$ é um invariante de nós.

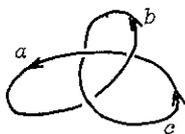
Do diagrama de K pode-se "calcular" o grupo $\pi(K)$. Escolhe-se uma orientação para K . O diagrama com as falhas — uma para cada cruzamento — consiste de vários intervalos chamados de *arcos*.

Por exemplo,  tem três arcos ,  e . Para cada arco, temos um laço em $\mathbb{R}^3 - K$ que sai de $*$, faz uma volta do arco no sentido positivo e volta para $*$. Estamos pensando em $*$ como um ponto bem alto em cima de K .

"Sentido positivo" quer dizer

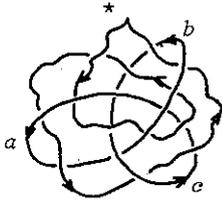


Estes laços definem elementos de $\pi(K)$ a, b, c, \dots , um para cada arco.



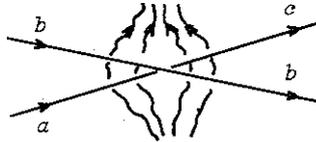
Se ℓ é um laço em $\mathbb{R}^3 - K$, podemos tentar contrair ℓ no ponto $*$. As únicas obstruções são os lugares onde ℓ passa debaixo de K . Então é

claro que todo elemento de $\pi(K)$ pode ser escrito como uma sucessão das letras a, b, c, \dots (e as inversas a^{-1}, b^{-1}, \dots obtidas fazendo a volta dos arcos no sentido negativo), ou seja, como *palavra* nas letras a, b, c, \dots . Por exemplo

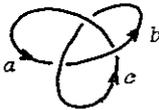


representa $ab^{-1}baeb$, ou seja $a\overline{cb}$, puxando o laço um pouco para cancelar b e b^{-1} . A palavra se escreve notando a ordem dos arcos debaixo dos quais o laço passa (com os devidos índices).

Considere o laço que passa debaixo de um cruzamento



Podemos passar à esquerda (o que dá $a\overline{b}$) ou à direita (o que dá \overline{bc}). Temos então uma relação $a\overline{b} = \overline{bc}$. É um teorema que (reciprocamente) se duas palavras representam o mesmo elemento de $\pi(K)$ então uma pode ser transformada na outra usando as relações. Por exemplo, para 3_1 :



temos letras a, b, c

relações $ac = \overline{cb}$, $\overline{cb} = ba$

e $ba = ac$.

Notamos que, neste exemplo, qualquer uma das relações é consequência das outras. Isto acontece para qualquer $n\bar{o}$. Por exemplo, para 4_1 , temos

$$\pi(K) = \langle a, b, c, d \mid ca = \overline{bc}, \quad \overline{db} = ba, \quad \overline{bd} = \overline{dc}, \quad ac = \overline{da} \rangle.$$

Considere a relação $ac = \overline{da}$. Depois de algumas tentativas, temos $b(ac) = (\overline{db})c = \overline{d(ca)} = (\overline{bd})a$. Cancelando b , temos $ac = \overline{da}$.

$\pi(K)$ é um invariante muito poderoso. Um teorema recente tem como corolário que, para uma grande classe de $n\bar{o}$ s, $K \sim L$ se e só se $\pi(K)$ e $\pi(L)$ são isomorfos. Mas existem sérias dificuldades em

ρ rotação que manda 1 em 2, 2 em 3:



ρ^2 (a outra rotação) e as três reflexões



Se R é uma reflexão qualquer, podemos escrever as três reflexões na forma $\rho^i R$ ($i=0,1,2$) onde $\rho^0 = \text{id}$. Temos as regras $\rho^3 = \text{id} = R$ e $R\rho = \rho^{-1}R$.

Lema. Seja $\psi: \pi(3_1) \rightarrow D_6$ um homomorfismo, então ψ é sobrejetor se e só se existem duas reflexões distintas entre os elementos a', b', c' .

Demonstração. As equações são $a'c' = c'b' = b'a'$. [Reciprocamente, dado elementos λ, μ, ν de D_6 satisfazendo $\lambda\nu = \nu\mu = \mu\lambda$, podemos definir um homomorfismo por $a' = \lambda, b' = \mu, c' = \nu$.] Das equações segue-se facilmente que se um de a', b', c' é uma reflexão então todos três são reflexões. Temos três casos:

- (1) Nenhuma reflexão. Então todo produto dos a', b', c' é uma rotação e ψ não é sobrejetor.
- (2) a', b', c' são a mesma reflexão R . Então é claro que ψ não é sobrejetor.
- (3) a', b', c' são reflexões não todas iguais. Então é fácil verificar que ψ é sobrejetor.

Isto conclui a demonstração.

Podemos reduzir o problema de achar a', b', c' à Álgebra Linear! Seja a' a reflexão R . Então $b' = \rho^i R, c' = \rho^j R$ e as equações são $\rho^i R = \rho^j R \rho^i R$ e $\rho^j R \rho^i R = R \rho^j R$ ou seja $\rho^i = \rho^{j-i}$ e $\rho^{j-i} = \rho^{-j}$ ou seja $2i-j \equiv 0$ e $2j-i \equiv 0 \pmod{3}$. Este sistema tem uma solução não-trivial pois $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{3}$.

O mesmo cálculo pode ser feito para qualquer $n \geq 3$ e para qualquer número primo $p \geq 3$ usando $G = D_{2p}$, o grupo de simetrias do

p -ângono regular. Definimos $d(K)$ a ser o produto de todos os p para os quais D_{2p} é um quociente de $\pi(K)$. Como esta condição é um invariante do nó K , $d(K)$ é um invariante. Os cálculos acima revelam que $d(K)$ é precisamente o produto dos p que dividem $\det(K)$.

É possível dar uma explicação topológica parecida para $\det(K)$ mas os detalhes são mais complicados.

Referências Bibliográficas

- R. Brandt et al. "A polynomial invariant for unoriented knots and links" MSRI Preprint (sept. 85).
- G. Burde e H. Zieschang "Knots", Walter de Gruyter (1985).
- J.H. Conway "An enumeration of knots and links and some of their algebraic properties", *Computational Problems in Abstract Algebra* ed. J. Leech, Pergamon (1970), p. 329-358.
- R.H. Crowell e R.H. Fox "Introduction to knot theory" Springer (1977).
- M. Culler et al. "Dehn Surgery on Knots", *Bull. Amer. Math. Soc.* 13 (1985), nº 1, p. 43-45.
- P. Freyd et al. "A new polynomial invariant of knots and links", *Bull. Amer. Math. Soc.* 12 (1985). nº 2, p. 239-246.
- D. Hacon "Introdução à teoria dos nós", 15º Colóquio Bras. de Mat. (1985).
- V. Jones "A polynomial invariant for knots via von Neumann Algebras", *Bull. Amer. Math. Soc.* 12 (1985), nº 1, p. 103-111.
- D. Rolfsen "Knots and links", Publish or Perish (1976).

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Departamento de Matemática
Rua Marques de São Vicente - Gávea
22.453 Rio de Janeiro-RJ