

NOTAS DE ENSINO

A CURVATURA MÉDIA E A DIVERGÊNCIA

Jonas de Miranda Gomes

1. Introdução

Nesta nota mostraremos que, a menos de um fator de normalização, a curvatura média de uma superfície é igual à divergência de um campo de vetores unitário e normal à superfície. Em seguida daremos dois exemplos interessantes desse resultado.

Desejo agradecer a Elon Lages Lima, que leu uma versão preliminar, corrigiu alguns erros e deu várias sugestões que tornaram o texto mais claro. As conversas com Manfredo P. do Carmo também foram úteis.

Inicialmente faremos uma breve apresentação dos personagens de nossa história.

Dado um ponto p em uma superfície M , seja ν um vetor normal a M nesse ponto. Para cada vetor unitário v tangente a M em p o plano P_v determinado pelo terno (p, v, ν) intersecta M em uma curva plana chamada *seção normal* de M em p na direção v . A curvatura da seção normal na direção v será indicada por k_v e é chamada *curvatura normal* da superfície M no ponto p na direção v . O sinal da curvatura normal obedece à seguinte convenção: se a concavidade da seção normal estiver voltada para o vetor normal ν , $k_v > 0$ caso contrário, teremos $k_v < 0$.

Definimos as *curvaturas principais* de M em p por

$$k_1 = \min_v k_v, \quad \text{e} \quad k_2 = \max_v k_v.$$

A *curvatura média* da superfície no ponto p é dada por

$$H = - \frac{k_1 + k_2}{2}. \quad (1.1)$$

O conceito de curvatura principal foi introduzido por Leonard Euler em 1770, e a curvatura média foi definida por Sophie Germain em 1831.

Uma maneira mais elegante de introduzir a curvatura média faz uso de Álgebra Linear elementar. Adotaremos no que se segue esse ponto de vista, que nos será útil posteriormente.

Dado um campo unitário v de vetores normal à superfície M , definimos a aplicação de Gauss $g: M \rightarrow S^2$ associando a cada ponto $p \in M$ o ponto $g(p)$ na esfera unitária S^2 em \mathbb{R}^3 , dado por

$$g(p) = v(p).$$

Como os planos tangentes em $p \in M$ e $g(p) \in S^2$ coincidem, a derivada $g' = g'(p)$ da aplicação g é um operador linear

$$g': T_p M \rightarrow T_p M.$$

Pode-se mostrar que em cada ponto $p \in M$ existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ do plano tangente de $T_p M$ na qual a matriz $M(g')$ de g' é diagonal. Além disso, os elementos da diagonal (isto é os autovalores do operador g') são as curvaturas principais de M no ponto em questão. Isto é:

$$M(g') = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.$$

Concluimos então que o dobro da curvatura média é menos o traço do operador g' , isto é,

$$H = - \frac{\text{tr}(g')}{2}. \quad (1.2)$$

Para maiores detalhes sobre os conceitos introduzidos acima, o leitor pode consultar [dC].

Passaremos agora à descrição do segundo personagem de nossa história.

Dado um campo de vetores V em \mathbb{R}^3 , isto é uma aplicação

de classe C^∞ definida em um conjunto aberto de \mathbb{R}^3 , definimos a *divergência* de V por

$$\operatorname{div}. V = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z},$$

onde V_1 , V_2 e V_3 são as componentes do campo V em coordenadas cartesianas. A matriz Jacobiana do campo V é dada por

$$J(V) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x} & \frac{\partial V_1}{\partial y} & \frac{\partial V_1}{\partial z} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} & \frac{\partial V_2}{\partial y} & \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_3}{\partial x} & \frac{\partial V_3}{\partial y} & \frac{\partial V_3}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Segue-se pois que a divergência do campo V é o traço da matriz Jacobiana do campo, isto é

$$\operatorname{div}. V = \operatorname{tr}(J(V)). \quad (1.3)$$

Uma vez que o traço de uma matriz é invariante por mudança de base, a equação 1.3 nos fornece uma maneira de definir a *divergência* de um campo de vetores independente do sistema de coordenadas.

Segue-se do que vimos acima que existe, pelo menos de um ponto de vista puramente conceitual, uma relação entre a curvatura média dada por (1.2) e a divergência, dada pela expressão (1.3). Mostremos no que se segue que essa relação vai além do terreno puramente conceitual.

2. Divergência e Curvatura Média

Considere uma superfície $M \subset \mathbb{R}^3$. Sejam U um aberto de \mathbb{R}^3 contendo M , e ν um campo unitário de vetores em U tal que a restrição $\nu|_M$ de ν à superfície M seja normal a M . Esta situa

ção, que se aplica a todas as superfícies orientáveis, contém um grande número de exemplos interessantes. Basta lembrarmos o caso das superfícies definidas implicitamente como imagem inversa de um valor regular de uma função $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, isto é,

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = 0\},$$

onde $\text{grad } f(x, y, z) \neq 0$ para todo $x \in M$.

Nesse caso, em uma vizinhança aberta U de M temos $\text{grad } f \neq 0$, e portanto o campo

$$= \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}$$

(onde $||$ indica a norma de um vetor em \mathbb{R}^3) satisfaz às condições expostas no parágrafo precedente.

Dado um ponto $p \in M$, como o campo v é unitário, temos que o produto interno $\langle v(p), v'(p) \rangle = 0$. Segue-se pois que a derivada $v'(p)$ é uma aplicação linear $v': \mathbb{R}^3 \rightarrow T_p M$. É claro que a restrição de v a M é a aplicação de Gauss g da superfície M . Segue-se pois que a derivada g' é a restrição $v'|_{T_p M}$ de v' ao plano tangente $T_p M$, e portanto

$$\text{div. } v = \text{tr}(v') = \text{tr}(g') = -2H,$$

isto é, a menos do fator de normalização -2 a curvatura média de M é igual à divergência do campo.

Na penúltima igualdade acima usamos um fato elementar de Álgebra Linear. Se $F \subset E$ são espaços vetoriais, e $A: E \rightarrow E$ é uma transformação linear tal que $A(E) \subset F$, e $A': F \rightarrow F$ é a restrição de A , então $\text{tr}(A') = \text{tr}(A)$.

Nas próximas seções daremos duas aplicações interessantes do resultado acima obtido.

O resultado visto nesta seção relacionando a curvatura média e a divergência vale para hiperfícies M^n no espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+1} . A demonstração é a mesma.

3. Superfícies Mínicas e Gráfico de funções

Considere uma superfície M definida como gráfico de uma função f de classe C^∞ ,

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = f(x, y)\}.$$

Neste caso, o campo

$$v = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)}{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2},$$

é unitário e normal à superfície M . Portanto a curvatura média de M é dada por

$$-2H = \operatorname{div}.v = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \right)$$

Em particular, se M é uma superfície mínima, obtemos com um cálculo imediato a equação a derivadas parciais das superfícies mínimas

$$\left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right] \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \quad (3.1)$$

A equação (3.1) foi obtida pela primeira vez por Lagrange utilizando métodos de Cálculo das Variações para estudar superfícies que minimizam área. Ele observou que o plano (caso em que $f(x, y) = ax + by + c$) satisfaz a equação dada, porém não deu qualquer exemplo não trivial de superfície mínima.

4. A Superfície de Scherk

A equação a derivadas parciais das superfícies mínimas (equação 3.1 da seção anterior) foi descoberta por Lagrange em 1760. Soamente em 1776 Meusnier deu os primeiros exemplos não triviais de su

perfícies m̃nimas: O *Catenoide* e o *Helicoide* (ver [dMG]). O terceiro exemplo surgiu apenas em 1834, e foi descoberto por H. Scherk [Sc]. Nosso objetivo nesta seção é definir a superfície de Scherk, e utilizar o resultado da seção 2 para mostrar que ela é m̃nima.

Podemos definir a superfície de Scherk implicitamente, pela equação

$$M = f^{-1}(0),$$

onde a função f é dada por

$$f(x, y, z) = e^z \cos(x) - \cos(y).$$

Não é difícil verificar que 0 é de fato valor regular de f , ou seja $|\text{grad } f| \neq 0$ nos pontos da superfície M . Segue-se pois que M é uma superfície regular em \mathbb{R}^3 .

Observe que no subconjunto do plano $V = \{(x, y); \cos x \cdot \cos y > 0\}$, a superfície de Scherk é o gráfico da função

$$f(x, y) = \log\left(\frac{\cos y}{\cos x}\right),$$

porém globalmente a superfície de Scherk não é um gráfico. O subconjunto V constitui as casas pretas de um tabuleiro de xadrez infinito. Na figura 4.1 no final desta seção mostramos o esboço, obtido com o computador, da restrição da superfície a uma das casas pretas do tabuleiro.

Como a superfície é periódica nas variáveis x e y (o período é 2π), obtemos uma visão global repetindo o gráfico da figura 4.1 ao longo das casas pretas do tabuleiro de xadrez.

Um exercício interessante é mostrar que a superfície de Scherk é m̃nima. Note que não podemos usar diretamente a equação (3.1) da seção anterior uma vez que M não é globalmente um gráfico. Utilizando o resultado da seção 2 obteremos o resultado com um cálculo imediato.

Sabemos que o campo

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right),$$

é normal à superfície M , logo a divergência do campo

$$v = \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}, \quad (4.1)$$

é igual a $-2H$, onde H é a curvatura média de M .

É fácil verificar que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -e^z \sin x;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin y;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = e^z \cos z.$$

Substituindo esses valores em (4.1) após um cálculo direto obtemos que $-2H = \text{div. } N = 0$.

Convidamos o leitor a consultar em alguns textos de Geometria Diferencial o método usado para mostrar que a superfície de Scherk é mínima.

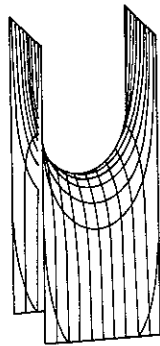


Fig. 4.1 - Superfície de Scherk (obtida em [dC]).

Referências Bibliográficas

- [dC] M.P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall.
- [Sc] H. Scherk, *Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen*. Journal de Crelle, vol XIII, 1834, p. 185.
- [dMG] J. de M. Gomes, *A Curvatura Média das Superfície II*. Matemática Universitária, vol II, 1985.

Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Estrada Dona Castorina, 110
Jardim Botânico
22460 Rio de Janeiro-RJ

ESCOLA DE ÁLGEBRA

A IX Escola de Álgebra está programada para o período de 21 a 25 de julho no Departamento de Matemática da Universidade de Brasília.

Participarão do encontro professores visitantes de universidades dos Estados Unidos, França, Alemanha Ocidental, Chile, Canadá e Itália.