SÉRIES DE FOURIER

Valéria de Magalhães Iorio

§1. Introdução

A teoria de séries de Fourier contem os germes de uma grande parte da Análise moderna, desde a análise harmônica abstrata, englobando a teoria de grupos topológicos e suas representações, até a Análise Funcional. Toda a teoria de expansão em autofunções, que é central em Análise, nasceu da teoria de séries de Fourier. De fato a importância da Análise Harmônica clássica (essencialmente o estudo de séries e integrais de Fourier) no desenvolvimento da Matemática é inestimável. Por exemplo, o conceito moderno de função foi introduzido por Dirichlet enquanto estudava a convergência das séries de Fourier; as integrais de Riemann e de Lebesgue foram originadas por problemas em análise de Fourier; Cantor, tentando caracterizar conjuntos de unicidade para séries trigonométricas (isto é, um conjunto tal que convergência a zero fora dele implica na série ser identicamente nula), foi levado a desenvolver a teoria dos números transfinitos e os rudimentos da teoria dos conjuntos; mais recentemente, a teoria de distribuições (ou funções generalizadas) de Laurent Schwartz foi desenvolvida em conexão com o estudo de transformadas de Fourier.

Nosso objetivo principal é discutir o ensino de séries de Fourier para alunos de final de graduação ou início de pós-graduação em Matemática. Esses alunos normalmente já tem noções básicas de Álgebra Linear e isso deve ser aproveitado para tornar mais claro o aspecto geométrico das séries de Fourier. Defendemos também a tese que as semelhanças entre a série e a transformada de Fourier devem ser enfatizadas desde o início e por essa razão usamos a notação e a nomenclatura normalmente associadas à transformada de Fourier — afinal de contas, a série e a transformada são exem plos de uma teoria mais geral, a Análise Harmônica em grupos abelianos localmente compactos.

Na segunda seção discutimos o aspecto geométrico tanto dos coeficientes de Fourier — enfatizando o paralelo entre o conjunto $\{1, \cos\frac{n\pi x}{\ell}, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{\ell};\ n \geq 1\}$ e uma base ortogonal em $\mathbb{R}^N$ — quanto da própria série, mostrando que a série de Fourier truncada é a melhor aproximação possível da função em certo sentido.

O ponto central dessa nota é a discussão da convergência pontual, na terceira seção. Apresentamos uma demonstração do teorema de convergência pontual que não utiliza o núcleo de Dirichlet, de autoria de Paul R. Chernoff [5]. É nossa opinião que essa demonstração, pela sua elegância e simplicidade, apresenta vantagens sobre a demonstração clássica: uma das vantagens é que ela torna mais claro o que é essencial, ou seja, o lema de Riemann-Lebesgue e o comportamento local da função; outra vantagem é que ela permite a introdução do núcleo de Dirichlet mais tarde, de uma forma mais natural, junto com o núcleo de Féjer e a discussão de somabilidade no sentido de Cesàro. Finalizamos a seção falando um pouco sobre somabilidade.

A quarta seção pressupõe um conhecimento básico da integral de Lebesgue e espaços L^p por parte do leitor; nela fazemos um rápido resumo dos resultados mais importantes de convergência em quase toda a parte e na norma L^p. Terminamos essa nota com alguns comentários sobre a bibliografia na quinta seção.

§2. Interpretação geométrica

A maneira natural de introduzir as séries de Fourier é através de um problema de condução de calor, usando o método de separação de variáveis e aplicando formalmente o princípio da superposição (veja [8]). Uma vez obtida a expressão

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{\pi}{\ell} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{\ell}\right) \qquad (2.1)$$

somos levados naturalmente às três perguntas fundamentais:

(i) quais as funções f que podem ser expressas na forma (2.1)?
(ii) como calcular os coeficientes a_n, b_n conhecendo f?
(iii) em que sentido a série em (2.1) converge para a função f?

Vamos começar discutindo o cálculo dos coeficientes. Para simplificar, vamos supor inicialmente que a função f é contínua. Para calcular os coeficientes formalmente — isto é, sem preocupações com convergência, troca de ordem de série com integral, etc. — basta notar que o espaço X das funções $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas e periódicas de período 2ℓ é um espaço vetorial real munido do produto interno

$$(f|g) = \int_{-\ell}^{\ell} f(x)g(x)dx$$

e que as funções

$$\begin{cases} \phi_0(x) = \frac{1}{2} \\ \phi_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{\ell}, & n \geq 1 \\ \psi_n(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{\ell}, & n \geq 1 \end{cases}$$

formam um conjunto ortogonal em X. Portanto, fazendo formalmente o produto interno da série em (2.1) com as funções ϕ_0, ϕ_n, ψ_n, $n \geq 1$, obtemos

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx, \quad n \geq 0 \\ b_n &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx, \quad n \geq 1 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Baseados nesses cálculos formais definimos então a *série de Fourier de* f como sendo a série

$$S[f](x) = S(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\right] \tag{2.3}$$

onde os coeficientes a_n e b_n são dados por (2.2).

Do ponto de vista geométrico, o método que utilizamos para o cálculo dos coeficientes é bastante natural pois é a generalização mais simples do caso de dimensão finita. De fato, considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^N$ munido do produto interno usual

$$(x|y) = \sum_{j=1}^{N} x_j y_j, \quad x = (x_1,\dots,x_N), \quad y = (y_1,\dots,y_N).$$

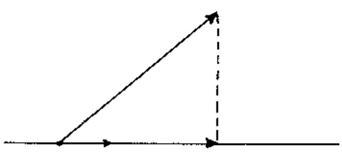
Dada uma base ortogonal $v_1,\dots,v_N$ de $\mathbb{R}^N$, podemos escrever qualquer vetor $x \in \mathbb{R}^N$ como uma combinação linear dos vetores da base

$$x = \sum_{j=1}^{N} a_j v_j$$

e, como a base é ortogonal, obtemos, qualquer que seja $k = 1,\dots,N$,

$$(x|v_k) = a_k(v_k|v_k) = a_k\|v_k\|^2.$$

Portanto a projeção ortogonal do vetor x na reta que tem a direção de v_k é exatamente $a_k v_k = \left(x \;\middle|\; \frac{v_k}{\|v_k\|}\right) \frac{v_k}{\|v_k\|}$



0 $\frac{v_k}{\|v_k\|}$ $a_k v_k$

Fig. 1

O conjunto $\{\phi_n : n \geq 0\} \cup \{\psi_n : n \geq 1\}$ faz então o papel de uma "base" ortogonal para o espaço X, embora não seja de fato uma base do ponto de vista da álgebra linear.

Podemos reescrever a série de Fourier em senos e cossenos de uma maneira diferente, usando exponenciais complexas: substituindo as expressões

$$\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \quad \operatorname{sen} t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2}$$

em (2.3), obtemos

$$S|f;x| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\pi x/\ell}$$

onde

$$c_0 = \frac{a_0}{2},$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad n \geq 1,$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n \geq 1.$$

Denotaremos o coeficiente complexo c_n por $\hat{f}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. A série

$$S|f;x| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{in \ x/\ell} \tag{2.4}$$

é chamada a *forma complexa* da série de Fourier de f.

Podemos também olhar a forma complexa como expansão em uma "base" ortogonal: o espaço $X_{\mathbb{C}}$ das funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ com partes real e imaginária em X é naturalmente um espaço vetorial complexo munido do produto interno

$$(f|g) = \int_{-\ell}^{\ell} f(x)\overline{g(x)}dx \tag{2.5}$$

e as funções $\Phi_n(x) = e^{in\pi x/\ell}$, $n \in \mathbb{Z}$, estão em $X_{\mathbb{C}}$ e satisfazem as relações de ortogonalidade

$$(\Phi_n|\Phi_m) = \begin{cases} 2\ell & \text{se} \quad n = m \\ 0 & \text{se} \quad n \neq m \end{cases} \tag{2.6}$$

Os coeficientes complexos são então dados por

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-in\pi x/\ell} dx \tag{2.7}$$

A convergência da série complexa é considerada, em geral, no sentido de "valor principal", isto é, considerando-se

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ik\pi x/\ell}$$

uma vez que

$$\sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ik\pi x/\ell} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos(\frac{k\pi x}{\ell}) + b_k \operatorname{sen}(\frac{k\pi x}{\ell})\right]:$$

É evidente que as formulações real e complexa são inteiramente equivalentes e é uma questão de gosto qual usar em se tratando de funções reais. A forma complexa é, de certa maneira, mais simples e precisaremos de uma função complexa auxiliar na demonstração do teorema de convergência pontual, de modo que trabalharemos com funções tomando valores complexos.

Começamos supondo que a função f era contínua só para fixar as idéias mas isso não é necessário. É bastante comum trabalhar com funções seccionalmente contínuas, isto é, funções que tem um número finito de descontinuidades em cada intervalo finito e todas as suas descontinuidades são de primeira ordem, ou seja os limites laterais

$$f(x_0^+) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x), \qquad f(x_0^-) = \lim_{x \uparrow x_0} f(x)$$

existem e são finitos qualquer que seja $x_0 \in \mathbb{R}$.

Existem outras condições possíveis (mais fracas) para o estudo da convergência pontual (veja, por exemplo, o teste de Dini em [8]) mas as funções seccionalmente contínuas são suficientes para a maior parte das aplicações. Observamos que, de qualquer maneira, a demonstração do teorema de convergência pontual que apresentaremos pode ser adaptada para situações mais gerais (veja [5]).

Denotaremos por Y o espaço vetorial complexo das funções $f:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ seccionalmente contínuas e periódicas com período 2ℓ. É claro que podemos definir $(f|g)$ como em (2.5) para f,g em Y, no entanto $(\cdot|\cdot)$ não é mais um produto interno mas apenas uma *forma sesquilinear positiva*, isto é, é linear na primeira variável, $(f|g) = \overline{(g|f)}$ e $(f|f) \geq 0$, $f,g \in Y$. A única propriedade de produto interno que falta é que podemos ter $(f|f) = 0$ com $f \neq 0$: tome, por exemplo, a função f que vale 1 em todos os pontos da forma k, $k \in \mathbb{Z}$, e vale 0 nos outros pontos. É claro que a falta dessa propriedade não invalida os nossos cálculos formais feitos anteriormente e podemos definir, para qualquer $f \in Y$, a série de Fourier de f como anteriormente.

Toda forma sesquilinear positiva satisfaz a *desigualdade de Cauchy-Bunyakowski Schwartz* (*) (desigualdade CBS).

$$|(f|g)| \le \|f\|\|g\|$$

onde $\|f\| = \sqrt{(f|f)}$. A função $f \in Y \longmapsto \|f\|$ é uma *semi-norma* em χ, isto é, é uma função não negativa que satisfaz a desigualdade triangular

$$\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$$

e $\|\lambda f\| = |\lambda|\|f\|$, quaisquer que sejam $f,g \in Y$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. A demonstração desses fatos é padrão (igual ao caso de produto interno). Uma outra propriedade importante é a generalização do *teorema de Pitágoras*:

$$(f|g) = 0 \Longrightarrow \|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$

Uma propriedade geométrica importante das série de Fourier é que a série truncada dá a "melhor aproximação possível" de f em certo sentido: se Y_{NM} é o espaço vetorial gerado pelas funções Φ_n, $N \le n \le M$, $N,M \in \mathbb{Z}$, então a "projeção ortogonal" de $f \in Y$ em Y_{NM} é sua série de Fourier truncada. Mais precisamente, se $f \in Y$, então

$$\|f - \sum_{n=N}^{M} \hat{f}(n)\Phi_n\| \le \|f - \sum_{n=N}^{M} c_n\Phi_n\|$$

quaisquer que sejam os números complexos c_n, $N \le n \le M$; além disso a igualdade vale se e somente se $\hat{f}(n) = c_n$ para todo n tal que $N \le n \le M$. A demonstração é bastante simples: considere a função auxiliar

$$g = f - \sum_{n=N}^{M} \hat{f}(n)\Phi_n;$$

(*) Cauchy provou essa desigualdade para o produto interno usual em (1821) e Schwartz provou o resultado no caso de produto interno definido por integrais (1885); no entanto esse último caso já havia aparecido anteriormente em um trabalho de Bunyakowski (1859). Veja [9], pág. 16.

usando as relações de ortogonalidade (2.6) e a definição de $\hat{f}$ (2.7), é fácil ver que g é ortogonal a Y_{NM}; aplicando o teorema de Pitágoras,

$$\|f - \sum_{n=N}^{M} c_n \Phi_n\|^2 = \|g + \sum_{n=N}^{M} (\hat{f}(n) - c_n)\Phi_n\|^2 =$$

$$= \|g\|^2 + \sum_{n=N}^{M} |\hat{f}(n) - c_n|^2 \|\Phi_n\|^2 \geq$$

$$\geq \|g\|^2$$

e é claro que a igualdade vale se e somente se $\hat{f}(n) = c_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ satisfazendo $N \leq n \leq M$.

Uma outra propriedade importante é a *desigualdade de Bessel:*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^2 \leq \frac{1}{2\ell}\|f\|^2.$$

A demonstração também é muito simples: se $N, M \in \mathbb{Z}$, expandindo e usando as relações de ortogonalidade (2.6), obtemos

$$0 \leq \|f - \sum_{n=N}^{M} \hat{f}(n)\Phi_n\|^2 = \|f\|^2 - 2\ell \sum_{n=N}^{M} |\hat{f}(n)|^2,$$

portanto

$$\sum_{n=N}^{M} |\hat{f}(n)|^2 \leq \frac{1}{2\ell} \|f\|^2; \tag{2.8}$$

como toda série de termos positivos limitadas é convergente a série $\sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^2$ converge e, tomando o limite quando $M \to +\infty$, $N \to -\infty$ em (2.8), obtemos a desigualdade de Bessel, qualquer que seja $f \in Y$.

Observação. A forma real da desigualdade de Bessel é

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\ell}\|f\|^2.$$

Um corolário imediato da desigualdade de Bessel, que é fundamental na demonstração da convergência pontual das séries de Fourier, é o chamado *Lema de Riemann-Lebesgue*: se $f \in Y$, então $\hat{f}(n) \to 0$ quando $|n| \to +\infty$.

§3. Convergência Pontual das Séries de Fourier

Nessa seção demonstraremos o seguinte teorema:

Teorema: Se $f \in Y$ é diferencial, a menos de um número finito de pontos, em cada intervalo aberto e se f' é seccionalmente contínua então, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, a série de Fourier de f no ponto x_0 converge para $\frac{1}{2}\left[f(x_0^+) + f(x_0^-)\right]$.

Vamos demonstrar primeiro o teorema em um caso bem simples.

Lema: Seja f como no teorema e suponha que f é contínua em $x=0$ com $f(0) = 0$. Então a série de Fourier de f na origem converge para $f(0)$, isto é,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) = 0.$$

Demonstração: Vamos definir uma função auxiliar complexa

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{e^{i\pi x/\ell} - 1} & \text{se } x \neq 0,\ x \in [-\ell, \ell) \\[2ex] \dfrac{-i\ell}{\pi} f'(0^+) & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$g(x+2\ell) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Note que g tem limites finitos quando $x \downarrow 0$ ou $x \uparrow 0$

$$g(0^+) = \lim_{x \downarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} \frac{x}{e^{ix\pi/\ell} - 1}\right) = -i\,\frac{\ell}{\pi} f'(0^+),$$

$$g(0^-) = -i\,\frac{\ell}{\pi}\,f'(0^-).$$

É claro então que $g \in Y$ e portanto, pelo lema de Riemann-Lebesgue, $\hat{g}(n) \to 0$ quando $|n| \to +\infty$. Por outro lado,

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(x)(e^{i\pi x/\ell}-1)e^{-in\pi x/\ell}dx = \hat{g}(n-1)-\hat{g}(n)$$

portanto

$$\sum_{n=-M}^{N} \hat{f}(n) = \hat{g}(-M-1) - \hat{g}(N) \to 0 \quad \text{quando} \quad N,M \to +\infty,$$

cqd.

Esse caso simples implica o teorema geral. A idéia da demonstração é ir transformando a função f até obter uma outra função que satisfaça o lema (veja Fig. 2)

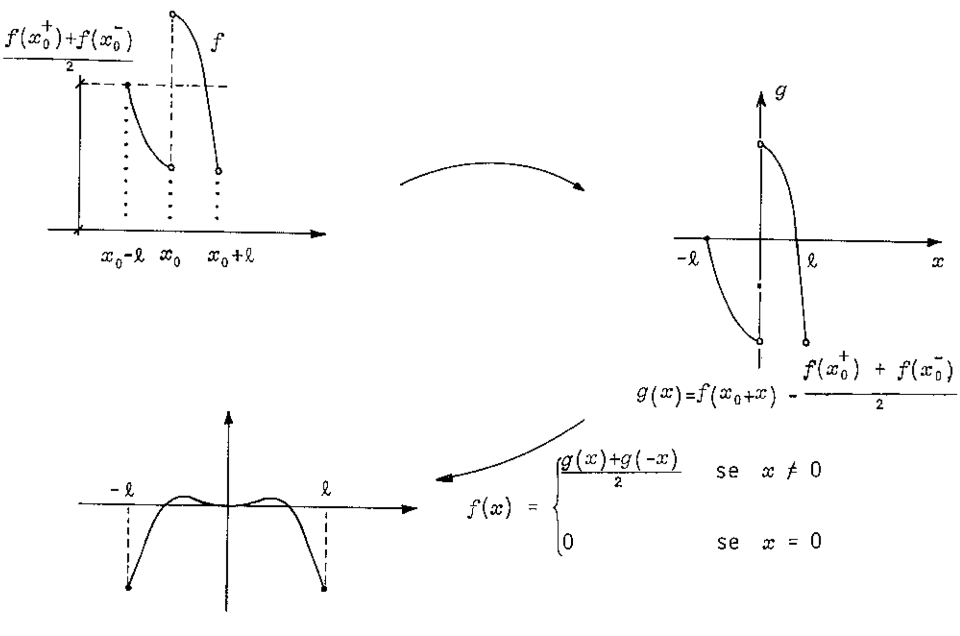


Fig. 2

Demonstração do Teorema. Defina as funções auxiliares

$$g(x) = f(x+x_0) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)+g(-x)}{2} & \text{se} \quad x \neq 0, \ x \in [-\ell, \ell) \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

$$h(x+2\ell) = h(x)$$

Como f e f' são seccionalmente contínuas, é fácil ver que g e g' (e portanto h e h') são seccionalmente contínuas. Por construção $g(0^+) + g(0^-) = 0$ e h é contínua na origem com $h(0) = 0$ portanto, pelo lema, a série de Fourier de h na origem converge para zero. Por outro lado,

$$\hat{h}(n) = \frac{\hat{g}(n) + \hat{g}(-n)}{2},$$

logo

$$\sum_{n=-N}^{N} \hat{h}(n) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{g}(n)$$

e portanto, tomando o limite quando $N \to +\infty$,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{g}(n) = 0.$$

Em relação à função f, os coeficientes de g são dados por

$$\hat{g}(n) = \begin{cases} \hat{f}(n) e^{in\pi x_0/\ell} & \text{se} \quad n \neq 0 \\ \hat{f}(0) - \dfrac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2} & \text{se} \quad n = 0 \end{cases}$$

e portanto

$$\sum_{n=-N}^{N} \hat{g}(n) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{in\pi x_0/\ell} - \frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$$

Tomando então o limite quando $N \to +\infty$, obtemos

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{in\pi x_0/\ell} = \frac{1}{2} [f(x_0^+) + f(x_0^-)],$$

cqd.

Como observamos anteriormente, podemos mostrar a convergência pontual da série de Fourier com hipóteses mais fracas; no entanto, é importante notar que a continuidade da função *não* implica na convergência pontual da série (veja [13; II.2.1]). Mais do que isso, é possível mostrar que, dado qualquer conjunto E de medida nula (por exemplo, qualquer conjunto enumerável) em $[-\ell,\ell]$ existe uma função contínua cuja série de Fourier diverge em todos os pontos de E ([13; II.3.4]). Para maiores detalhes sobre convergência pontual, veja as seções II.2 e II.3 de [13], o capítulo 10 de [7] e as referências alí contidas.

Mesmo que a série de Fourier de uma função f divirja em um ponto x, pode ser possível "somá-la" nesse ponto de outras maneiras. Uma dessas maneiras é através das médias aritméticas: defina

$$S_N(f;x) = \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n) e^{in\pi x/\ell},$$

$$\sigma_N(f;x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} S_n(f;x);$$

dizemos que a série de Fourier é *somável no sentido de Cesàro* no ponto x se existe $\lim_{N\to+\infty} \sigma_N(f;x)$. No caso em que a série converge, ela é somável no sentido de Cesàro e

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(f;x) = \lim_{N\to+\infty} \sigma_N(f;x).$$

Vale então o teorema de Féjer: se $f \in Y$, a série de Fourier de f é somável no sentido de Cesàro e

$$\lim_{N\to+\infty} \sigma_N(f;x) = \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)];$$

além disso $\sigma_N(f;\cdot)$ converge uniformemente para f em todo intervalo fechado I que não contenha pontos de descontinuidade de f. Dessa forma, mesmo que a série divirja, ela ainda pode ser usada para calcular a função!

O conceito de somabilidade no sentido de Cesàro é muito importante e existem uma série de resultados (os chamados teoremas tauberianos, em homenagem a Tauber que provou os primeiros resultados desse tipo) que dão condições para que a convergência no sentido de Cesàro implique em convergência pontual. Para uma discussão de somabilidade no sentido de Cesàro e aplicações, veja o capítulo 6 de [7].

Existem outros conceitos de somabilidade, como por exemplo somabilidade no sentido de Abel, que está relacionada com o importante núcleo de Poisson, que por sua vez liga a teoria de séries trigonométricas com a teoria de funções analíticas (cf. [18]). Para um tratamento abstrato e bastante geral de somabilidade, veja o primeiro capítulo de [13].

§4. Outras Noções de Convergência

Nessa seção supomos um conhecimento básico do leitor sobre integral de Lebesgue, o leitor que não estiver familiarizado poderá substituir o espaço $L^p([-\ell,\ell])$ pelo espaço de funções contínuas com a norma

$$\|f\|_p = \left|\int_{-\ell}^{\ell} |f(x)|^p dx\right|^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

(exceto, é claro, no teorema de Riesz-Fischer). Discutiremos convergência uniforme, convergência em L^p e convergência em quase toda a parte (q.t.p.).

Para funções sem descontinuidade a convergência uniforme (convergência na norma do sup) é fácil de provar. Suponha que f e f' estão em Y: então a série de Fourier de f converge uniformemente para f em todo intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade de f. A demonstração não é complicada: integrando por partes obtemos $\hat{f'}(0) = 0$ e, se $n \neq 0$,

$$\hat{f}(n) = \frac{-i\ell}{n\pi} \hat{f'}(n);$$

usando então a desigualdade de Cauchy (CBS) para o $\mathbb{R}^{2N}$ e a desigualdade de Bessel,

$$\sum_{|n|\leq N} |\hat{f}(n)e^{in\pi x/\ell}| = |\hat{f}(0)| + \frac{\ell}{\pi} \sum_{|n|=1}^{N} \frac{1}{|n|} |\hat{f'}(n)| \leq$$

$$\leq |\hat{f}(0)| + \frac{\ell}{\pi} \left[\sum_{|n|=1}^{N} \frac{1}{n^2}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{|n|=1}^{N} |\hat{f'}(n)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq |\hat{f}(0)| + \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \|f'\|_2$$

onde $\|\cdot\|_2$ é a semi-norma utilizada anteriormente, isto é,

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\ell}^{\ell} |f(x)|^2 dx.$$

O teorema segue então do teste M de Weierstrass ([4], [8]).

A convergência uniforme é convergência na norma infinito (norma do sup); no entanto essa convergência só é garantida em um espaço menor que $L^\infty([-\ell,\ell])$, de fato menor que o espaço de funções contínuas. A situação é diferente no caso da norma quadrática (norma L^2): o espaço $L^2([-\ell,\ell])$ é, do ponto de vista geométrico, o espaço mais natural para o estudo das séries de Fourier. É possível mostrar que se $f \in L^2([-\ell,\ell])$ então a série de Fourier de f converge na média quadrática para f, isto é,

$$\int_{-\ell}^{\ell} |f(x) - \sum_{|n|\leq N} \hat{f}(n)e^{in\pi x/\ell}|^2 dx \to 0 \quad \text{quando} \quad N \to +\infty;$$

além disso vale a *identidade de Parseval*

$$\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^2 \tag{4.1}$$

e, mais ainda,

$$\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\overline{g(x)}dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}, \tag{4.2}$$

quaisquer que sejam $f,g \in L^2([-\ell,\ell])$. O que torna o espaço $L^2([-\ell,\ell])$ único no que se refere ao estudo das séries de Fourier é a caracterização completa das funções em L^2 pela sua série:

Teorema (Riesz-Fischer): Dada uma sequência $\{c_n\}_{-\infty}^{+\infty}$ de números complexos satisfazendo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < \infty,$$

existe uma única $f \in L^2([-\ell,\ell])$ tal que $\hat{f}(n) = c_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Observação: 1. A unicidade no teorema de Riesz-Fischer é no sentido L^2, isto é, como classe de equivalência de funções; como função, está determinada em quase toda a parte.

2. Devido às identidades (4.1) e (4.2), muitos autores definem o produto interno em $L^2([-\ell,\ell])$ por

$$(f|g) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\overline{g(x)}dx;$$

denotaremos o espaço L^2 com esse produto interno por $L^2([-\ell,\ell], \frac{dx}{2\ell})$.

Vamos denotar por $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z})$ o espaço das seqüências complexas $\{c_n: n \in \mathbb{Z}\}$ com a propriedade

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < \infty;$$

então ℓ^2 é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(\{c_n\}|\{d_n\}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\overline{d_n}.$$

O teorema de Riesz-Fischer, (4.1) e a linearidade da integral mostram que a transformada de Fourier

$$F : L^2([-\ell,\ell], \tfrac{dx}{2\ell}) \longrightarrow \ell^2$$

$$f \longmapsto \{\hat{f}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

é uma isometria linear sobrejetora, isto é, um operador unitário. (Para uma apresentação elegante da teoria L^2, veja o capítulo 8, vol. I, de [7].)

A situação no caso L^p, $p \neq 2$, $1 \leq p < \infty$, é bem diferente. Como os espaços $L^p([-\ell,\ell])$ estão encaixados e o lema de Riemann-Lebesgue é válido em $L^1([-\ell,\ell])$ podemos definir $Ff = \hat{f}$ para qualquer $f \in L^p([-\ell,\ell])$ e $\hat{f} \in c_0 = c_0(\mathbb{Z})$, o espaço das sequências complexas $\{c_n : n\in\mathbb{Z}\}$ tais que $c_n \to 0$ quando $|n| \to +\infty$. No entanto, a caracterização das sequências em c_0 que estão na imagem de L^p sob F é um problema complexo. No caso $p = 1$, por exemplo, existem algumas condições necessárias e suficientes mas são tão complexas que é extremamente difícil aplicá-las em um caso concreto (cf. [7; 2.3.10]).

Sobre convergência na norma L^p, se $1<p<\infty$ e $f\in L^p([-\ell,\ell])$, então a série de Fourier de f converge a f na norma L^p, isto é,

$$\int_{-\ell}^{\ell} \left| f(x) - \sum_{|n|\leq N} \hat{f}(n)e^{in\pi x/\ell}\right| dx \to 0 \quad \text{quando} \quad N \to +\infty.$$

Esse resultado é falso para $p = 1$. No entanto, se f e $f\log^+|f|$ estão em $L^1([-\ell,\ell])$, a série de Fourier de f converge a f na norma L^1 ([7; vol II, 12.10], [13]).

A convergência em quase toda a parte (q.t.p.) é mais delicada. Em 1915 Lusin colocou o seguinte problema: a condição $\sum|c_n|^2<\infty$ implica na convergência q.t.p. da série $\sum c_n e^{inx}$? Em outras palavras, a série de Fourier de uma função L^2 converge q.t.p.? É natural perguntar, mais geralmente, se a série de Fourier de uma função em $L^p([-\ell,\ell])$ converge q.t.p., $1 \leq p < \infty$. Durante meio século a comunidade matemática fez um esforço enorme para responder essa pergunta. Em 1926 Kolmogorov mostrou a existência de uma função em $L^1([-\pi,\pi])$ cuja série de Fourier diverge em *todos* os pontos, respondendo assim negativamente o caso $p = 1$, mas só em 1966 é que a pergunta original de Lusin ($p=2$) foi respondida afirmativamente por Carleson [3]. Esse resultado foi generalizado em 1968 por Hunt [10] e o caso geral ficou conhecido como o teorema de Carleson-Hunt: se $f \in L^p([-\ell,\ell])$, $1 < p < \infty$, então a série de Fourier de f converge q.t.p. para f. A demonstração é longa e bastante complicada (veja [11], [12] e [1]).

§5. Comentários Finais

Em um primeiro contato com séries de Fourier, parece-nos razoável perder um pouco de generalidade em prol da simplicidade, e por essa razão desenvolvemos a teoria básica para funções seccionalmente contínuas. É interessante observar como, por exemplo, a demonstração do lema de Riemann-Lebesgue fica simples nesse caso (compare com a demonstração em [8]).

Apesar de apresentarmos uma demonstração de convergência pontual sem usar o núcleo de Dirichlet, achamos importante a apresentação, mesmo que rápida, desse núcleo, assim como a introdução de convolução, do núcleo de Féjer e, se possível, núcleos de Dirac (ou identidades aproximadas). Como observamos na introdução, parece-nos natural introduzir o núcleo de Dirichlet junto com o núcleo de Féjer e a discussão de somabilidade no sentido de Cesàro.

Sobre a bibliografia, observamos que a lista de referências ao final dessa nota está longe de ser completa e foi feita visando uma diversidade de tópicos que podem ser abordados em vários níveis.

Em um nível elementar, [14] contem uma boa introdução às séries e transformadas de Fourier. A organização segue de certa forma a história da análise de Fourier e o autor procura transmitir ao leitor "um pouco do excitamento e entusiasmo que imbuiu as centenas de matemáticos que contribuíram para esse capítulo notável da análise" [14]. Ainda em um nível elementar mas em um estilo bastante diferente, [4] é, no nosso entender, muito útil em um curso de graduação, principalmente no que se refere a resultados de análise clássica.

Para uma visão mais ampla de análise harmônica, recomendamos fortemente [17] e os artigos em [2], especialmente o belíssimo artigo de Zygmund sobre a história de séries de Fourier.

Para cursos mais avançados ou o estudo de tópicos extras, recomendamos [6], [7], [13] e [15]. O livro de Dym e MacKean [6] tem uma seção sobre séries de Fourier em dimensões maiores (veja também o último capítulo de [16]); o capítulo quatro, sobre séries de Fourier e integrais em grupos, é bem interessante – nele são estudadas as autofunções do laplaciano, harmônicos esféricos, $SO(3)$ e $SL(2,\mathbb{R})$. Sobre análise harmônica em grupos abelianos localmente compactos, o livro do Rudin [15] contem um bom tratamento. Os livros do Edwards [7] contem praticamente tudo que foi feito até 1966, incluindo o trabalho do Carleson; é uma excelente referência e um prazer de ler. Finalmente, Katznelson [13] faz uma teoria de forma abstrata que pode servir muito bem como um texto de introdução à análise harmônica abstrata (para alunos com conhecimento de integral de Lebesgue e um pouco de análise funcional); vale a pena observar que a teoria de somabilidade abstrata desenvolvida logo no início (§I.2) pode ser adaptada – em espaços concretos, é claro – para alunos com um conhecimento básico de análise.

Referências Bibliográficas

[1] Andrade, Doherty - "*Convergência Pontual de Séries de Fourier*", Tese de Mestrado, Departamento de Matemática, PUC/RJ (1985).

[2] Ash, J.M. (editor) - "*Studies in Harmonic Analysis*", MAA Studies in Math., vol. 13 (1976).

[3] Carleson, L. - "*On convergence and growth of partial sums of Fourier series*", Acta Math. 116 (1966) 135-157.

[4] Carlaw, H.S. - "*An Introdd tion to the Theory of Fourier Series and Integrals*", Macmillan and Company, Ltd. (1930). Reprinted by Dover Publications, Inc. (1950).

[5] Chernoff, P.R. - "Pointwise Convergence of Fourier Series", Amer Math Montly 87 (1980) 399-400.

[6] Dym, H.; H.P. McKean - "*Fourier Series and Integrals*", Academic Pres (1972).

[7] Edwards, R.E. - "*Fourier Series, a Modern Introduction*", 2 vols., Holt, Rinehart and Winston, Inc. (1967).

[8] Figueiredo, Djairo G. - "*Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*", Projeto Euclides (1977).

[9] Hardy, G.H.; J.E. Littlewood; G. Pólya - "*Inequalities*", Cambridge University Press (1952).

[10] Hunt, R.A. - "*On the convergence of Fourier series*", Proceedings of the Conference on Orthogonal Expansions and Their Continuous Analogues, Southern Illinois Univ. Press (1968) 234-255.

[11] - "*Developments related to the a.e. convergence of Fourier series*", MAA Studies in Math., vol. 13, J.M. Ash, ed. (1976).

[12] Jorsboe, O.G.; Mejlbro, L. - "*The Carleson-Hunt Theorem on Fourier Series*", Lecture Notes in Math. 911, Springer-Verlag (1982).

[13] Katznelson, Y. - "*An Introduction to Harmonic Analysis*", Dover Publications, Inc. (1976).

[14] Laczos, C. - "*Discourse on Fourier Series*", University Math. Monographs, D.E. Rutherford, ed., Oliver & Boyd, Edinburgh and Lindon (1966).

[15] Rudin, W. - "*Fourier Analysis on Groups*", John Wiley & Sons (1963).

[16] Stein, E.; G. Weiss - "*Harmonic Analysis in Euclidean Spaces*", Princeton Univ. Press (1971).

[17] Weiss, G. - "*Harmonic Analysis*", MAA Studies in Math., vol. 3, I.I. Hirschman, Jr, ed., Prentice Hall (1965) 124-178.

[18] Zygmund, A. - "*Trigonometric Series*", 2 vols., Cambridge Univ. Press (1959).

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Departamento de Matemática
Rua Marques de São Vicente - Gávea
22.453 Rio de Janeiro-RJ