ARTIGOS

ARQUIMEDES, O RIGOR E O MÉTODO

Geraldo Ávila

1. Introdução

A obra de Arquimedes, pelos muitos elementos de criatividade que contêm, e pelo uso magistral dos recursos de invenção e descoberta, enseja reflexões tão oportunas e enriquecedoras ao matemático de hoje como aos de muitas épocas passadas. Seus escritos, extensos e variados, são, no dizer de Heath ([9], p. 20), "monumentos de exposição matemática". Segundo Eves ([6], p. 143), os trabalhos de Arquimedes "muito se parecem com artigos especializados dos modernos periódicos". Para Plutarco ([14], p. 275) "não é possível encontrar em toda a Geometria questões mais difíceis e complicadas, ou explicações mais simples e lúcidas". A propósito do interesse permanente de Arquimedes, cabe lembrar que suas obras, juntamente com as de Euclides, ocupavam vários semestres de estudo no famoso Seminário de Matemática de Frankfurt nos anos vinte e trinta, conforme nos conta Siegel [17].

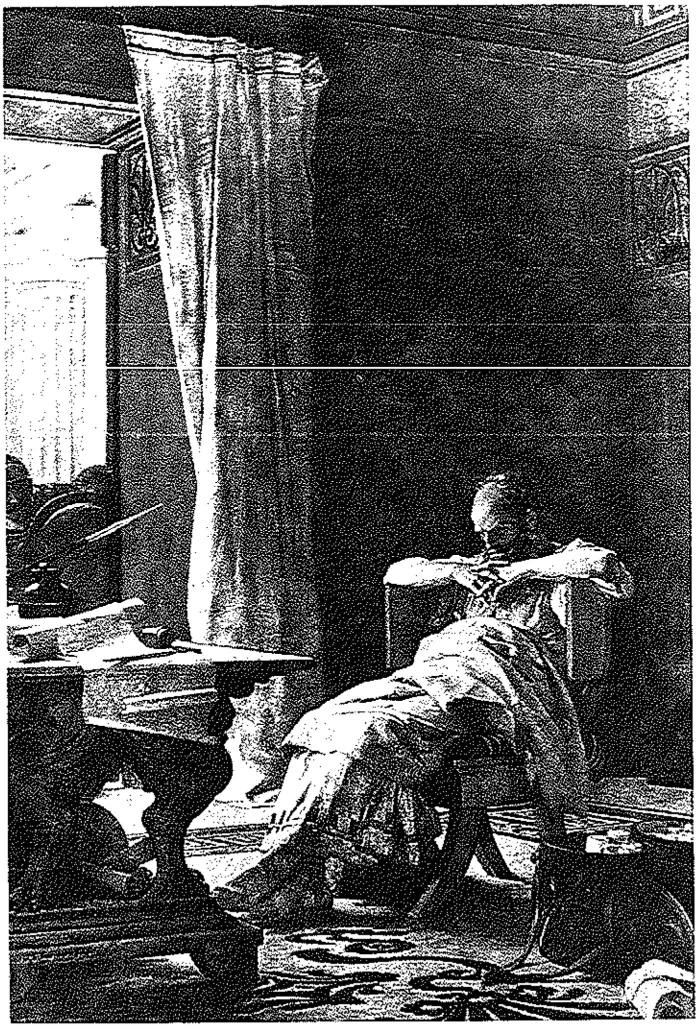
A importância e o real significado da obra de Arquimedes só podem ser devidamente apreciados numa análise que leve em conta a época em que ele viveu, a influência que sobre ele tiverem seus predecessores e a que ele iria exercer no desenvolvimento da Matemática dezoito século após sua morte. Procurando focalizar esses vários aspectos, pretendemos expor no presente artigo algumas facetas interessantes da obra do grande geômetra. O leitor interessado em maiores detalhes deve consultar os abalizados livros de Heath [10] e Dijksterhuis [5]. Van der Waerden [18] também faz uma excelente exposição sobre Arquimedes, concisa e bem equilibrada. Outra obra muito recomendável, com a vantagem de estar em português, é o livro de Aaboe [1], cujo capítulo 3 é todo ele dedicado a Arquimedes.

2. Sobre a vida e os escritos de Arquimedes

Alguns fatos pitorescos sobre a vida de Arquimedes estão relatados em [16], e também a este artigo remetemos o leitor. Já na antiguidade várias histórias foram escritas sobre Arquimedes, mas nem sempre é possível verificar a veracidade de muitas delas. Tem-se como certo que ele morreu em 212 a.C., fato este descrito em narrativas antigas, dentre as quais a de Plutarco (46-120), cujo livro de biografias [14] contém um capítulo dedicado a Marcelo, o general romano que comandou o saque de Siracusa em 212 a.c. Nessa biografia Plutarco fala longamente de Arquimedes (pags. 268 a 280 da edição brasileira; págs. 252 a 255 da edição "Great Books"), relatando inclusive três versões de sua morte no referido saque. Seu nascimento em 287 a.C. é a conclusão a que se chega por uma informação de que ele teria vivido 75 anos. Isto vem de um relato encontrado nos escritos de Joannes Tzetzes, um autor bizantino do século XII, portanto distante de Arquimedes cerca de 1.400 anos! Decerto Tzetzes se baseou em algum documento fidedigno, mas disto nada sabemos.

Arquimedes viveu em Siracusa, mas acredita-se que ele tenha passado boa parte de sua vida em Alexandria, o mais importante centro de estudos da época, verdadeira capital do saber helenístico. Ali ele teria estudado com Euclides ou seus sucessores. De fato, todos os seus escritos, pelos temas que tratam, pelo conteúdo e pelo estilo, têm os traços característicos de um sábio de Alexandria. De resto, era seu costume enviar suas descobertas ao astrônomo Conon em Alexandria, a quem devotava grande admiração e amizade. Após a morte deste, Arquimedes passou a remeter seus trabalhos a Dositeo, discípulo de Conon, e também a Eratóstenes. Mais adiante reproduzimos trechos das cartas de Arquimedes a esses sábios.

Como aconteceu com muitas obras antigas, as de Arquimedes também se perderam ao longo dos séculos ou foram destruidas nos vários ataque que sofreu a biblioteca de Alexandria. (A propósito desse notável centro do saber antigo, recomendamos o excelente artigo de Langer [13].) O que hoje possuimos da obra do grande geô



Arquimedes, segundo poster feito na cidade de Siracusa, na Itália, por ocasião de uma conferência em homenagem ao geômetra grego, realizada de 11 a 16 de abril de 1961, com a participação de matemáticos, físicos e engenheiros de todo o mundo.

metra deriva de manuscritos copiados uns dos outros ao longo dos séculos e cujos ancestrais últimos datam da época do imperador Justiniano no século VI, portanto mais de 700 anos após a morte de Arquimedes! Esses manuscritos foram minuciosamente estudados e editados no final do século passado pelo eminente filólogo dinamarquês J.L. Heilberg. Em [1] o leitor encontrará uma relação das obras de Arquimedes que chegaram até nós. No começo do presente século o mesmo Heiberg faria uma descoberta sensacional de um novo livro do grande geômetra, até então desconhecido no mundo científico. É sobre isto que falaremos em seguida.

3. Sobre o livro "O Método"

Os escritos de Arquimedes são dotados de uma admirável estrutura lógica e que, por isso mesmo, nem sempre revelam os caminhos que guiaram o autor em suas descobertas. No dizer do matemático Wallis (1616-1703), citado por Heath, "é como se ele tivesse deliberadamente ocultado da posteridade o segredo de seu método de investigação". Referindo-se à obra de Gauss (1777-1855), cujos escritos também muitas vezes escondem os caminhos da descoberta, Sartorius explicava que a obra acabada é como um edifício, cuja construção requer os andaimes, mas que estes, uma vez retirados, não deixam traços de como foi feito o edifício.

Arquimedes, no entanto, faz referência a um método mecânico de descoberta quando, no prefácio de seu livro "A Quadratura da Parábola" êle diz a Dositeo que vai "comunicar-lhe (...) um certo teorema geométrico (...) que eu descobri primeiro por meios mecânicos". Esse "método mecânico" de Arquimedes na verdade sempre existiu e não foi por ele escondido, mas exposto em um de seus livros, escrito em forma de carta a Eratóstenes, porém perdido para a posteridade. O leitor pode, pois, imaginar o grande interesse e a curiosidade com que foi recebido o anúncio dessa descoberta no início do nosso século pelo mesmo Heiberg que editara as obras de Arquimedes. Tudo começou quando Heiberg soube, pela leitura de um artigo publicado em 1899, da existência de um palimpsesto descober to no Mosteiro do Santo Sepulcro em Jerusalém e levado para Constantinopla, o qual apresentava traços de alguma escrita matemática. Ele teve logo a suspeita de que se tratava de algum trabalho de Arquimedes, o que de fato ficou posteriormente comprovado pelos exames que fez do próprio palimpsesto em Constantinopla. Pelas descrições de Heath [10], baseadas nas do próprio Heiberg [12], vários livros de Arquimedes haviam sido escritos em pergaminho, no século X, totalizando perto de 200 folhas em coluna dupla. Posteriormente, o material fora usado para nele se escrever um livro de orações, removendo-se primeiro, tanto quanto possível, a escrita original. Heiberg conseguiu ler quase toda a escrita subjacente, verificando que o palimpsesto continha, além de obras conhecidas de Arquimedes, o texto inédito e quase completo do livro a que já nos referimos, conhecido pelo título de "O Método". Esse livro começa assim:

Arquimedes a Eratóstenes,

Saudações.

Enviei-lhe em outra ocasião alguns teoremas descobertos por mim, meramente os enunciados, deixando-lhe a tarefa de descobrir as demonstrações então omitidas. (...) Vendo em você um dedicado estudioso, de considerável eminência em Filosofia e um admirador da pesquisa matemática, julguei conveniente escrever-lhe para explicar as peculiaridades de um certo método pelo qual é possível investigar alguns problemas de Matemática por meios mecânicos. (...) Certas coisas primeiro se tornaram claras para mim pelo método mecânico, embora depois tivessem de ser demonstradas pela Geometria, já que sua investigação pelo referido método não conduzisse a provas aceitáveis. Certamente é mais fácil fazer as demonstrações quando temos previamente adquirido, pelo método, algum conhecimento das questões do que sem esse conhecimento. (...) Estou convencido de que ele será valioso para a Matemática, pois pressinto que outros investigadores da atualidade ou do futuro descobrirão, pelo método aqui descrito, outras proposições que não me ocorreram.

Comentando o trecho final desta citação, D.E. Smith [11] observa que "talvez em toda a História da Matemática nenhuma verdade profética como essa jamais foi expressa em palavras. Parece até como se Arquimedes visse, numa visão, os métodos de Galileu, Cavalieri, Pascal, Newton, e muitos outros grandes matemáticos da Renascença e da atualidade".

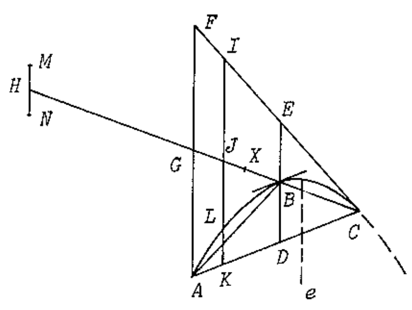
Vamos descrever, a seguir, apenas os dois primeiros problemas tratados por Arquimedes com recursos mecânicos, pois eles são suficientes para bem ilustrar a essência de seu método.

4. A área da parábola

Ainda no prefácio (carta a Eratóstenes) do livro "O Método" Arquimedes escreve:

> *Enunciarei o primeiro teorema que descobri por métodos mecânicos, isto é: qualquer segmento de parábola é quatro terços do triângulo com a mesma base e igual altura.*

Dada uma parábola ABC, com eixo e, seja D o ponto médio do segmento AC e B a interseção da parábola com a reta paralela a e passando pelo ponto D. O que se pretende estabelecer é que a área do segmento de parábola ABC é 4/3 da área do



triângulo ABC. Para isto traçamos a reta CF tangente à parábola em C. Por um ponto arbitrário L da parábola e também por A traçamos respectivamente os segmentos IK e AF paralelos ao eixo. Traçamos também, por C e B o segmento CH que encontra AF em G e tal que $CG = GH$. Por propriedade da parábola, $DB = BE$, de sorte que $IJ = JK$ e $AG = GF$. Ainda por propriedade da parábola podemos escrever:

$$\frac{KI}{KL} = \frac{AC}{AK}.$$

Mas

$$\frac{AC}{AK} = \frac{GC}{CJ} = \frac{GH}{GJ},$$

de forma que

$$\frac{KI}{KL} = \frac{GH}{GJ}.$$

Esta proporção, que em forma moderna pode-se escrever $KI \cdot GJ = KL \cdot GH$, nos diz que se interpretarmos HJ como uma alavanca de fulcro em G, então o segmento KI no extremo J equilibra o segmento LK (= MN) no extremo H. (Isto é a lei da alavanca, obtida pelo próprio Arquimedes em seu livro "Sobre o Equilíbrio de Figuras Planas".) Variando o ponto L ao longo do arco de parábola $ALBC$, obtemos o triângulo AFC como união de todos os segmentos do tipo KI e o segmento de parábola como união de todos os segmentos do tipo KL. Agora vem a parte heurística do método: considerando o triângulo AFC e o segmento de parábola ABC como reunião dos infinitos segmentos KI e KL respectivamente, presume-se que o segmento de parábola com seu centróide em H equilibrará o triângulo AFC onde ele se encontra, com centroide X: $GX=GC/3=GH/3$. Sendo p a área do segmento de parábola ABC e $a(AFC)$ a do triângulo AFC, teremos então:

$$\frac{a(AFC)}{p} = \frac{GH}{GX} = 3$$

Mas $a(AFC) = 4a(ABC)$, logo $p = 4a(ABC)/3$, que é o resultado desejado.

Arquimedes observa que esse argumento dá um bom indício de que a conclusão é verdadeira. Esta, porém, nas palavras do próprio

Arquimedes, "requer demonstração geométrica, que eu mesmo descobri e já publiquei" (no livro "A Quadratura da Parábola").

5. O volume da esfera

Vejamos agora como Arquimedes calculou pelo seu método mecânico, o volume da esfera. Na verdade, ele enuncia a seguinte (Proposição 2):

1) *O volume de qualquer esfera é quatro vezes o do cone com base igual a um grande círculo da esfera e altura igual ao raio da mesma esfera; e*

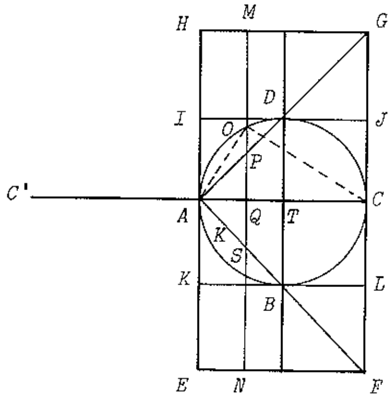
2) *O volume do cilindro com base igual a um grande círculo da esfera e altura igual ao diâmetro é* $1\frac{1}{2}$ *vezes o volume da esfera.*

Para estabelecer esses resultados, Arquimedes procede da seguinte maneira: seja $ABCD$ um círculo máximo da esfera, com diâmetros perpendiculares AC e BD. Imaginemos um outro círculo máximo no plano que passa por BD e é perpendicular a AC. Consideremos o cone dos segmentos de reta originando em A (vértice do cone) e passando pelo segundo círculo descrito acima, cone este tendo como base o círculo de diâmetro FG e que jaz num plano perpendicular a AC. Finalmente seja $EFGH$ o cilindro de base coincidente com a do cone descrito e eixo AC. Feitas essas construções, seja MN uma reta do plano ABD, perpendicular a AC e que corta o segmento AC no ponto Q. Teremos então:

$$QP^2 + QO^2 = AQ^2 + QO^2 = AO^2 = AQ \cdot AC;$$

portanto,

$$\frac{QP^2+QO^2}{QM^2} = \frac{AQ \cdot AC}{QM^2} = \frac{AQ \cdot AC}{AC^2} = \frac{AQ}{AC}.$$



Isto mostra que soma das áreas dos círculos de diâmetros PR e OS está para a área do círculo de diâmetro MN assim como AQ está para AC.

Vamos agora estender CA até C' de forma a termos $AC=AC'$ e considerar CC' como alavanca de fulcro em A. Novamente, pela lei da alavanca, a relação acima,

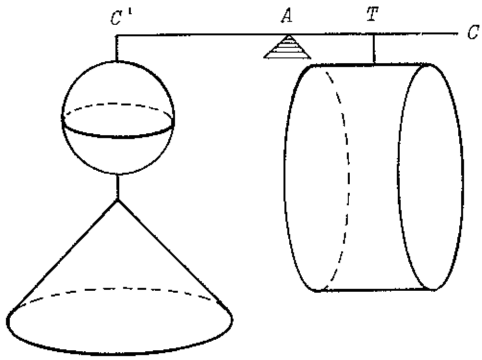
$$\frac{QP^2 + QO^2}{QM^2} = \frac{AQ}{AC'},$$

significa que os círculos de diâmetros PR e OS, quando transferidos para C', equilibram o círculo de diâmetro MN localizado em Q. Em seguida consideramos o cilindro como união dos círculos de diâmetro MN, Q variando de A até C; e analogamente para a esfera e o cone AFG, de sorte que concluimos que o cilindro, com centroide em T ($AT = AC/2$), estará em equilíbrio com a esfera e o cone transferidos para C', como ilustra a figura. Designando por V_E, C_o e C_i os volumes da esfera, do cone e do cilindro respectivamente, obtemos:

$$\frac{C_o + V_E}{C_i} = \frac{AT}{AC'} = \frac{1}{2},$$

ou seja,

$$C_i = 2\ (C_o + V_E).$$



Sabemos, por outro lado, que $C_i = 3C_O$; portanto, $C_O = 2V_E$. Mas como $FG = 2BD$, obtemos que $C_O = 8$ vol. (cone ABD). Daqui e de $C_O = 2V_E$ segue-se que

$$V_E = 4 \text{ vol. (cone } ABD).$$

(É claro que isto significa precisamente que $V_E = 4\pi r^3/3$, onde r é o raio da esfera.) Isto estabelece o resultado 1). Por outro lado,

$$\begin{aligned} \text{vol.(cil. } IJKL) &= 2 \text{ vol. (cil. } BDIK) \\ &= 6 \text{ vol. (cone } ABD) \\ &= \frac{3}{2} V_E, \end{aligned}$$

que é o resultado 2).

Vejamos agora o que diz Arquimedes logo ao final dessa "demonstração":

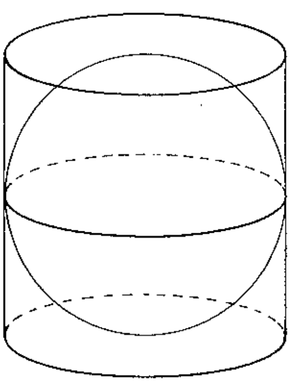
> *Deste teorema, segundo o qual o volume da esfera é quatro vezes o do cone tendo por base um círculo máximo da esfera e altura igual ao raio da esfera, eu concebi a idéia de que a superfície da esfera é quatro vezes a de um de seus círculos máximos; pois, a julgar pelo fato de que a área do círculo é igual à do triângulo que tem por base a circunferência e altura igual ao raio, vejo que, do mesmo modo, o volume da esfera é igual ao do cone com base igual à superfície da esfera e altura igual ao raio.*

Arquimedes revela aí a notável argúcia de seu raciocínio. No dizer de Aaboe ([1], p. 124), "este é o primeiro e um dos mais preciosos exemplos de ousada analogia na História da Matemática". Arquimedes compara a esfera em relação ao seu volume e sua área, com o círculo em relação à sua área e sua circunferência; e do resultado já obtido para o círculo (no tratado "A Medida de um Círculo"), com o resultado agora descoberto sobre a esfera, ele infere que a área da esfera é quatro vezes à de um de seus círculos máximos!

Pelo que se vê, Arquimedes primeiro obtém o volume da esfera para depois calcular sua área A_E. De fato, o final da citação acima significa que $V_E = \frac{1}{3} A_E r$, donde se obtém, juntamente com

$$V_E = 4 \text{ vol.(cone } ABD) - \frac{4}{3} (\pi r^2) r,$$

a fórmula da área da esfera: $A_E = 4\pi r^2$. Mas como observa Heath [10], p. 21 de "O Método"), em seu livro "Sobre a Esfera e o Cilindro I", Arquimedes calcular primeiro a área, na Prop. 33, depois o volume, na Prop. 34, o que mostra que "a ordem das proposições na versão final dos tratados do geômetra grego não segue necessariamente a ordem de suas descobertas".



$$\frac{V_E}{V_C} = \frac{V_E}{A_C} = \frac{2}{3}$$

"... entre o muito que inventou parece-me que o que mais apreciava era a demonstração da proporção que há entre o cilindro e a esfera nele contida, pelo que pediu a seus parentes que, quando morresse, mandassem colocar sobre sua sepultura um cilindro contendo uma esfera com uma inscrição da proporção pela qual o contido excede o conteúdo" (Plutarco). Cícero, quando servia na Sicília como questor, encontrou uma lápide com uma esfera inscrita num cilindro, pelo que julgou haver descoberto o túmulo de Arquimedes. Cuidou então de restaurá-lo, já que ele se encontrava totalmente abandonado. [Esta história é devida ao próprio Cícero, citado por Heath ([10], p. xviii).]

6. O rigor das demonstrações

Depois da exposição que fizemos nas seções anteriores, procurando mostrar como Arquimedes fazia descobertas utilizando seu método mecânico, devemos agora expor o lado rigoroso da obra do grande geômetra. Tomamos, como exemplo, o cálculo que ele fez da área da parábola, objeto de seu livro "A Quadratura da Parábola", que assim se inicia:

> *Arquimedes a Dositeo,*
>
> *Saudações*
>
> *Quando eu soube que Conon, que foi meu amigo em vida, estava morto, mas que V. era conhecido de Conon e também versado em Geometria, enquanto eu deplorava a perda não só de um amigo mas de um admirável matemático, decidi comunicar a V., como eu desejava enviar a Conon, um certo teorema geométrico que não tinha sido investigado antes mas que foi agora investigado por mim, e que eu descobri primeiro por métodos mecânicos e exibi por meios geométricos. Alguns geômetras tentaram estabelecer a possibilidade de achar a área retilínea igual a um dado círculo (...) Mas desconheço que qualquer de meus precessores tenha tentado a quadratura da parábola, cuja solução eu descobri agora... e que pressupõe o seguinte lema:*
>
> *(1) "Por repetidas adições a si mesmo, o excesso pelo qual a maior de duas áreas excede a menor pode exceder qualquer área finita dada.*

Arquimedes é digno de muita admiração quando diz que outros geômetras tentaram a quadratura do círculo, mas ninguém, ao que ele saiba, tentou a quadratura da parábola. Isto é notável! Não é a parábola mais complicada que o círculo? Não seria então de se esperar que sua quadratura fosse mais difícil que a daquele? Talvez os geômetras que tentavam e não conseguiam quadrar o círculo imaginassem que fosse mais difícil e portanto menos provável qualquer sucesso na resolução de quadraturas como a da parábola. Mas não Arquimedes! Frequentemente, quando não conseguimos resolver determinado problema, procuramos formular problema análogo mais simples, que possa ser resolvido. Arquimedes parece fazer o contrário...

A proposição (1) acima é a forma original do conhecido "Postulado de Arquimedes" (que aparece também no livro "Sobre a Esfera e o Cilindro I", onde figura como Postulado 5). Arquimedes observa, logo após o enunciado desse "lema" (assim ele designa o referido postulado) que os geômetras seus predecessores já o usaram em outras demonstrações. De fato, a Def. V.4 que aparece em Euclides [8] é praticamente a mesma coisa, e com ela se demonstra a Propo. X.1 (de Euclides) que diz:

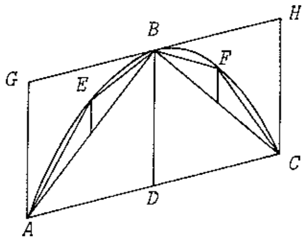
(2) *Dadas duas grandezas distintas, se da maior se subtrai mais que sua metade, e do restante mais que sua metade, e assim por diante, acabará restando uma grandeza menor que a menor das grandezas dadas.*

Para a demonstração que faremos a seguir, convém observar também que a Def. V.4 acima referida ou o Postulado (1) podem ser expressos nas seguintes formas equivalentes:

(3) *Dadas as grandezas A e B existe um múltiplo de A que supera B, isto é, $nA > B$.*

(4) *Dadas as grandezas A e B, existe um submúltiplo de B menor que A, isto é, $\frac{B}{n} < A$.*

Posto isto, vamos considerar agora a maneira como Arquimedes demonstra rigorosamente o resultado da Seç. 4 acima. Ele utiliza, como veremos, o chamado "método de exaustão", argumentando por "dupla redução ao absurdo". Esse método consiste no seguinte: pelo ponto médio D da base AC do segmento de parábola ABC traçamos a paralela ao eixo da parábola, que vai cortar a parábola em B. Repetimos a mesma construção referente aos segmentos AB e BC, obtendo os pontos E e F respectivamente, e assim por diante. A idéia é aproximar a área da parábola pela soma das áreas dos triângulos ABC, AEB, BFC, etc.



É propriedade da parábola que a tangente em B é paralela a AC, donde segue-se que a área do triângulo ABC que removemos do segmento de parábola é maior que a metade deste, pois tal área, que é igual à soma das áreas dos triângulos ABG e BCH, supera as áreas dos segmentos restantes de parábola AEB e BFC. De igual maneira, as áreas dos triângulos ABE e BCF superam a metade das áreas dos respectivos segmentos de parábola onde se inscrevem; e assim por diante. Isso vai permitir-nos utilizar a Prop. (2) acima e concluir que, após a retirada de um número suficientemente grande de triângulos inscritos, a área restante do segmento de parábola será menor que qualquer área dada de antemão.

Observamos agora que se prova, por propriedades da parábola, que as áreas dos triângulos removidos em cada etapa somam 1/4 do total das áreas dos triângulos removidos na etapa imediatamente precedente. Assim, se designarmos com a_n as somas das áreas dos triângulos removidos na n-ésima etapa (observe que a_1 é a área do triângulo ABC, a_2 é a soma das áreas dos triângulos ABE e BCF, etc.), teremos

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 + \frac{a_1}{4} + \frac{a_1}{4^2} + \dots + \frac{a_1}{4^n}.$$

Para lidar com esta soma Arquimedes prova que se a ela adicionarmos 1/3 do último termo a_n obtemos o número $= 4a_1/3$, independentemente de n. Isto se faz notando que

$$a_n + \frac{a_n}{3} = \frac{4a_n}{3} = \frac{a_{n-1}}{3}.$$

Então,

$$S_n + \frac{a_n}{3} = S_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{3} = \ldots = a_1 + \frac{a_1}{3} = \frac{4a_1}{3} = K.$$

Estamos agora prontos para terminar a demonstração com a dupla redução ao absurdo. Queremos provar que a área Z do segmento de parábola é igual a K, o que faremos provando, separadamente, que tanto a hipótese $Z > K$ como a hipótese $Z < K$ conduzem a absurdos.

1) **Hipótese** $Z > K$. Pelo lema (2), dadas as grandezas Z e $Z-K$, depois de um certo número n de etapas de remoções de triângulos, obteremos

$$Z - S_n < Z - K; \quad \text{logo,} \quad S_n > K,$$

o que é absurdo, pois $S_n + a_n/3 = K$.

2) **Hipótese** $Z < K$. Pela forma (4) do Postulado de Arquimedes, dadas as grandezas a e $K-Z$ podemos chegar a um $a_n = a_1/4^n$ menor que $K-Z$. Então,

$$K-S_n = \frac{a_n}{3} < K-Z; \quad \text{logo} \quad S_n > Z.$$

Mas isto também é absurdo.

7. Por que tanto rigor

A demonstração que acabamos de dar é bem típica do rigor que encontramos na obra de Arquimedes. Para nós hoje, ou para qualquer matemático dos tempos modernos, a soma da série de reduzidas S_n acima pode ser facilmente obtida, tomando-se o limite com $n \to \infty$. (Aliás, cabe notar, de passagem, que este é o primeiro exemplo de ocorrência de uma série infinita no desenvolvimento da Matemática.) Arquimedes, entretanto, não passa ao limite, preferindo um procedimento menos simples, porém, perfeitamente rigoroso.

Para bem entender por que os matemáticos gregos impuseram a si tão altos padrões de rigor, já ao tempo de Euclides, e mesmo um pouco antes, devemos lembrar o debate ocorrido nos séculos precedentes em torno das teorias do atomismo e continuidade da matéria [15]. Embora o escopo dessas idéias fosse primeiro o mundo físico, elas naturalmente abarcaram também o domínio matemático, onde as opiniões se dividiam e a polêmica acabou desembocando na crise de fundamentos provocada pela descoberta dos incomensuráveis (veja nossos artigos [2] e [3]).

O atomismo originou-se com Leucipo e Demócrito no século V a.C., mas foi Demócrito (460-370?) quem elaborou e divulgou as idéias ligadas a essa teoria, segundo a qual a matéria é constituída de elementos indivisíveis, os átomos. Demócrito foi também um geômetra eminente, a quem Arquimedes, no prefácio do livro "O Método", atribui a descoberta de que os volumes da pirâmide e do cone são um terço dos volumes do prisma e do cilindro respectivamente, embora as demonstrações desses resultados, ainda no dizer de Arquimedes, sejam devidas a Eudoxo. O atomismo em Geometria significava, por exemplo, que um sólido seria constituido de elementos indivisíveis. Mas o próprio Demócrito apontava a dificuldade dessa concepção com as seguintes considerações ([15], p. 83; [5], p. 320): imagine um cone cortado por um plano paralelo a sua base, produzindo dois círculos, um no cone menor resultante do corte e outro no tronco de cone logo abaixo. Pois bem, esses dois círculos são iguais ou diferentes? Se diferentes, então, como o mesmo fenômeno deve ocorrer em cada corte, devemos concluir que a superfície lateral do cone não é lisa, mas coberta de indentações; por outro lado, se os círculos fossem iguais, então seria sempre assim com todos os cortes semelhantes e, portanto, o cone não seria um cone e sim um cilindro! Schrödinger, na citação acima, sugere que raciocínios como este teriam levado Demócrito a estabelecer uma clara distinção entre os conceitos geométricos e suas imperfeitas realizações no mundo material, uma clara antecipação do idealismo de Platão.

São também dessa época os famosos paradoxos de Zeno ([4], p. 55), cujos objetivos precisos não são conhecidos, mas que tiveram o efeito de pôr às claras as dificuldades inerentes ao uso do infinito nos argumentos matemáticos. As consequências disso para o posterior desenvolvimento da nossa ciência apresentam-se sob um duplo aspecto. De um lado, a Geometria encontra na teoria das proporções de Eudoxo o instrumento adequado para lidar com as grandezas incomensuráveis; e de outro lado, o método de exaustão, também atribuído a Eudoxo, é o recurso eficaz para evitar o uso do infinito nas demonstrações. Assim, a Matemática se geometriza e se reveste de impecável rigor, exibindo nas obras de Arquimedes a expressão mais alta desse desenvolvimento.

8. Arquimedes e o futuro

O método de demonstração indireta, com dupla redução ao absurdo, embora proporcione rigor preciso, exige conhecimento prévio do que se pretende demonstrar, portanto não serve como instrumento de descoberta. O método mecânico de Arquimedes, ao contrário, permite, como vimos, descobrir resultados novos. Como ficou ilustrado nos exemplos que exibimos nas Seçs. 4 e 5, esse método exige a decomposição de figuras planas em segmentos retilíneos ou de volumes em áreas. Assim, os corpos geométricos são vistos como agregados de elementos "indivisíveis", como os segmentos retilíneos das figuras planas ou áreas no caso dos sólidos. Mas essa concepção atomística esbarrava nas dificuldades que o infinito trazia para o raciocínio matemático. Se um sólido é um agregado de figuras planas, poder-se-ia obter seu volume como a soma de uma infinidade de áreas? ou como a soma infinita de volumes infinitamente pequenos? Sem responder a perguntas como essas, Arquimedes utilizava seu método como instrumento útil de descoberta e manifesta-se convencido de sua eficácia nas mãos de outros matemáticos, de sua época ou do futuro. E aqui reside o que D. E. Smith considera uma verdade profética. Mas era preciso que decorressem mais de dezoito séculos para que a profecia se concretizasse. Como bem diz G̊arding ([7], p. 148), dentre as razões por que Arquimedes não teve seguidores imediatos estão seus dotes muito superiores, o efeito esterilizante que a conquista romana teve sobre a ciência grega em geral e a própria natureza do argumento indireto de demonstração que, como já dissemos, não se presta a descobertas novas.

O século XVII veria brotar de novo o método dos indivisíveis nas obras de Kepler, Galileu, Cavalieri e muitos outros matemáticos. Nessa época pós-renascentista, quando em Matemática o estudo das obras clássicas adquiria maior intensidade, os escritos de Arquimedes voltavam a ser conhecidos, estudados e admirados, exercendo grande influência na investigação matemática da época — na criação da nova análise dos indivisíveis — embora o método mecânico permanecesse desconhecido. O mesmo Wallis, que já citamos antes, observava que "era mais fácil inventar uma nova Análise do que redescobrir a antiga, tão bem escondida estava esta". A invenção desses novos métodos dos indivisíveis, sua evolução para o moderno Cálculo Diferencial e Integral e a explicação de como tudo isso pode ocorrer sem a ajuda direta do método de Arquimedes, é outra história muito interessante, mas que já não cabe mais nos limites deste artigo.

Referências

[1] A. Aaboe: *Episódios da História Antiga da Matemática*, Publicação SBM (1984).

[2] G. Ávila: *Eudoxo, Dedekind, Números Reais e Ensino de Matemática*, Revista do Professor de Matemática, nº 7 (1985) 5-10.

[3] G. Ávila: *Grandezas Incomensuráveis e Números Irracionais*, Revista do Professor de Matemática, nº 5 (1984) 6-11.

[4] C.B. Boyer: *História da Matemática*, Editora Edgard Blücher, São Paulo (1974).

[5] E.J. Dijksterhuis: *Archimedes*, Ejnar Munksgaard, Copenhagen (1956).

[6] H. Eves: *An Introduction to the History of Mathematics* (revised edition), Holt, Rinehardt and Winston (1964).

[7] L. Gårding: *Encontro com a Matemática*, Editora Universidade de Brasília.

[8] T.L. Heath: *Euclid's Elements*, 3 vols., Dover Publications.

[9] T.L. Heath: *Greek Mathematics*, vol. II, Dover Publications.

[10] T.L. Heath: *The Works of Archimedes*, Dover Publications.

[11] J.L. Heiberg: *Geometrical Solutions Derived from Mechanics*, A Treatise of Archimedes with an Introduction by David Eugene Smith, The Open Court Publishing Co., Chicago (1909).

[12] J.L. Heiberg: *Heres - Zeitschrift für Klassische Philologie*, vol. XLII (1907) 235 seq., Wiesbaden.

[13] R.E. Langer: *Alexandria, o Santuário da Matemática*, Revista Humanidades, Editora Universidade de Brasília, vol. II, nº 7 (1984) 57-70. (Este artigo é uma tradução de "Alexandria - Shrine of Mathematics, American Mathematical Monthly, vol. 48 (1941) 109-125.)

[14] Plutarco: *As Vidas dos Homens Ilustres*, vol. 3, Editora das Américas, São Paulo. Edição em inglês na coleção "Great Books of the Western World" da "Enciclopaedia Britannica Inc.", onde figura como vol. 14.

[15] E. Schrödinger, *Nature and the Greeks*, Cambridge University Press (1954).

[16] Severino de Souza: *Arquimedes e a Coroa do Rei*, Revista do Professor de Matemática, nº 9 (1986).

[17] C.L. Siegel: *On the History of the Frankfurt Mathematics Seminar*, The Mathematical Intelligencer, vol. 1 (1979) 223-230.

[18] B.L. vand der Waerden: *Science Awakening*, vol. I, Noordhoff International Publishing, Leyden (1975).

Instituto de Matemática, UNICAMP
13.100 Campinas, SP