

AUTOMÁTICA E MATEMÁTICA

Marcos A. da Silveira

1. Introdução

Uma das aplicações mais importantes da Matemática encontra-se na Automática, através da Teoria de Controle. Problemas como automação industrial, robótica, projeto de pilotos automáticos, servomecanismos e reguladores levam a questões matemáticas interessantes, algumas em aberto.

Neste artigo tentaremos dar uma idéia de parte desse campo. Procuraremos mostrar a Teoria de Controle como Matemática Aplicada, sem perder o vínculo com o problema concreto. Para tal, apresentaremos na seção 2 um problema de engenharia relativamente simples, que será o exemplo a ser resolvido por diferentes técnicas nas seções seguintes.

Todo problema de Matemática Aplicada passa por três etapas: modelagem matemática do problema (informal) inicial, resolução do problema matemático formal, interpretação dos resultados e ajuste da solução ao problema inicial. Se aplicamos a Matemática à resolução de problemas de Engenharia, a última etapa é crucial. Dois fatos podem ser realçados:

(i) A modelagem matemática pressupõe aproximações as mais diversas; portanto, a solução matemática não pode ser aplicada exatamente. Mais ainda, os dados iniciais fornecidos pelo engenheiro são sempre imprecisos, ou por dificuldades de medida, ou por desconhecimento do processo, ou porque o processo real varia. Portanto, a resolução deve prever o efeito destas variações, além de possibilitar ajustes finais da solução matemática do problema concreto.

(ii) A solução deverá ser compreendida pelo engenheiro da área. Modelos diferentes adaptam-se de formas diferentes à linguagem destes engenheiros; isto é, a modelagem matemática deve procurar conformar-se à linguagem destes engenheiros. Além disso, modelagens diferentes levam a problemas matemáticos diferentes, que são interessantes ao engenheiro na medida em que são solúveis, e dentro da precisão exigida originalmente.

Moral: uma boa resolução exige um compromisso precisão versus complexidade do modelo versus dificuldade de resolução, tudo casado com a solubilidade e a possibilidade de ajuste final. Sendo assim, não devemos estranhar que um mesmo problema prático seja tratado de formas diferentes por autores e engenheiros diferentes, e que, apesar de soluções conhecidas, continue a ser pesquisado. A questão é que o problema prático é o mesmo, mas os problemas matemáticos obtidos na etapa de modelagem são diferentes, e possuem propriedades diferentes.

Na seção 2 veremos um problema prático tradicional em cursos de Automática. Na seção 3 discutiremos seu modelo matemático habitual. Nas seções seguintes o problema concreto será colocado de duas maneiras diferentes, e resolvido. As resoluções levam a problemas matemáticos em aberto muito interessantes.

2. Exemplo de um Servomecanismo

Vejamos o problema do controle da posição de uma antena que gira em torno de um eixo vertical. Na realidade, este tipo de antena possui dois movimentos: o giratório e o basculamento do eixo. Trataremos apenas do primeiro. A posição da antena deve ser alterada para pontos diversos em tempos relativamente curtos, permanecendo parada em cada posição um tempo determinado pelo operador; e isto, mesmo sob o efeito de ventos ou de erros sistemáticos na alimentação do motor que faz girar o eixo!

O processo a ser controlado (Fig. 1) consiste da antena apoiada ao eixo de um motor elétrico (de corrente contínua), controlã -

vel a partir da tensão elétrica (medida em volts) aplicada a seus terminais, e de um *sensor* que mede a posição angular da antena ao longo do tempo. Usa-se aqui um potenciômetro acoplado a uma bateria, que transforma a variável medida (ângulo de rotação do eixo) em tensão elétrica proporcional ao ângulo medido.

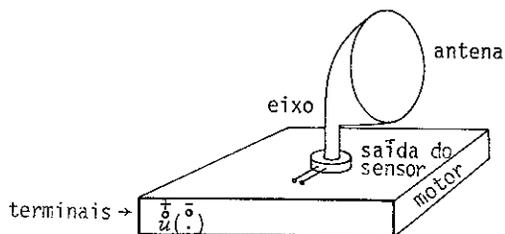


Fig. 1 - Descrição do processo

Uma restrição do problema é a de não haver a possibilidade de outro sensor. A variável a ser controlada (o ângulo de rotação da antena) é medida, mas em geral isso não basta. O movimento da antena, para ser determinado, precisa do conhecimento da velocidade e, talvez, de alguma variável interna do motor. Porém, em nosso problema, só podemos medir a posição angular. Esta restrição pode limitar em muito o desempenho exigível do sistema de controle.

Outra restrição é a de não poder haver *ultrapassagem*, isto é, se desejamos passar a antena de 10° para 20° , então a posição angular deve permanecer entre 10° e 20° no intervalo de tempo considerado. A ultrapassagem pode causar a quebra do sensor em sua construção habitual.

Finalmente, deseja-se que o movimento possa ser considerado terminado em 4 segundos. Quantifica-se assim a noção de "rapidez" do primeiro parágrafo desta seção.

Muitas outras exigências são cabíveis neste exemplo, tal como a potência máxima utilizada menor que um valor pré-especificado. As que fizemos acima são suficientes para um problema introdutório.

3. Modelando o Problema

Para a Teoria de Controle um *sistema* é uma função que transforma "sinais". Os sinais são funções do tempo representando alguma variável relevante, como a velocidade angular da antena, ou a posição angular, ou a intensidade do vento, ou a tensão elétrica nos terminais do motor. Entre os sinais distinguem-se as *entradas*, que representam a influência do ambiente externo no sistema, e as *saídas*, que representam a resposta do sistema a esta influência.

No exemplo, a tensão nos terminais do motor, a influência do vento e o erro sistemático de alimentação são entradas. A primeira chamaremos de *controle* — podemos escolher seus valores. As outras duas serão consideradas *perturbações*. A *saída* é aquilo que desejamos controlar — no caso, a posição angular da antena — ou as variáveis que podemos medir.

A Física nos ensina que existe uma relação entre as entradas e as saídas, mas esta relação *não* é uma função. Falta especificar as condições iniciais. Por exemplo, a posição inicial e a velocidade inicial da antena. Para simplificar supõem-se todas as condições iniciais nulas. Diz-se então que o sistema está *inicialmente relaxado*.

Chegamos ao modelo da *caixa preta* (Fig. 2), onde o processo é representado por uma função entrada → saída. No exemplo denominamos

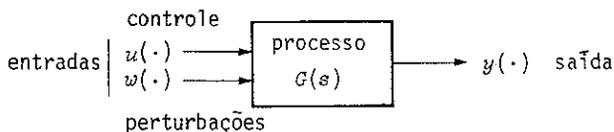


Fig. 2 - Modelo entrada-saída (caixa preta)

- $u(\cdot)$: tensão elétrica nos terminais do motor,
- $w_1(\cdot)$: erro sistemático de alimentação,
- $w_2(\cdot)$: influência do vento na posição da antena,
- $y(\cdot)$: posição angular da antena.

Um levantamento cuidadoso feito em uma antena particular levou-nos à seguinte equação:

$$\dot{z}(t) = -2z(t) + u(t) + w_1(t),$$

$$\dot{x}_1(t) = z(t),$$

$$y(t) = x_1(t) + w_2(t),$$

onde $x_1(\cdot)$ é a posição angular da antena, descartado o efeito da perturbação $w_2(\cdot)$ e z é a velocidade angular da antena. No levantamento do modelo as características do motor, a inércia da antena e os atritos no eixo foram levados em conta, porém desprezaram-se os efeitos de segunda ordem, como as perdas de tensão nas escovas do motor.

Habitualmente, sistemas lineares como o anterior são resolvidos usando-se a transformada de Laplace. Denotando por $\hat{u}(s)$ a transformada de Laplace de $u(t)$, $s \in \mathcal{C}$ e $t \in \mathbb{R}^+$, e considerando $x_1(0) = z(0) = \dot{z}(0) = 0$, o sistema anterior se transforma no seguinte:

$$s\hat{z}(s) = -2\hat{z}(s) + \hat{u}(s) + \hat{w}_1(s),$$

$$s\hat{x}_1(s) = \hat{z}(s),$$

$$\hat{y}(s) = \hat{x}_1(s) + \hat{w}_2(s);$$

ou, eliminando $\hat{x}_1(s)$,

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{s(s+2)} [\hat{u}(s) + \hat{w}_1(s)] + \hat{w}_2(s). \quad (1)$$

A expressão $g(s) = 1/[s(s+2)]$, que relaciona $\hat{u}(s)$ a $\hat{y}(s)$, chamamos de *função de transferência* do sistema. Outras funções de transferência aparecem, como as que relacionam w_1 a y (igual a $g(s)$); e w_2 a y (igual a 1).

O sistema pode ser representado por suas funções de transferência. Os engenheiros possuem várias razões para trabalhar com $g(s)$ e uma delas merece ser citada, após alguma introdução.

Um pouco de raciocínio mostra que, no caso geral de sistemas lineares monovariáveis (isto é, com uma entrada e uma saída), a função de transferência $g(s)$ é uma função racional própria: $g(s) = n(s)/d(s)$, $n(\cdot)$ e $d(\cdot)$ polinômios com grau $d(s) \geq$ grau $n(s)$. Ou ainda, $\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = \text{constante}$. Uma função de transferência imprópria (grau $n(s) >$ grau $d(s)$) corresponde a um derivador, algo não realizável em engenharia, pois amplifica ruídos e perturbações.

Mais geralmente, se o sistema possui p saídas e m controles, aparece uma matriz de transferência $G(s)$, matrix $p \times m$ tendo por coeficientes funções racionais próprias.

Dentro da nomenclatura das funções de variável complexa, os polos de $g(s)$ são as raízes de $d(s)$, seu denominador. E os zeros de $g(s)$ são as soluções de $g(s) = 0$, isto é, $n(s) = 0$.

Teorema 1. Se os polos de $g(s)$ estão contidos em $\mathcal{C}^- = \{s \in \mathcal{C} : \text{Re}(s) < 0\}$, e se $u(t) = A \sin \omega t$, então $y(t) = y_1(t) + B \sin(\omega t + \phi)$, onde

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = 0, \quad B = A |g(i\omega)|, \quad \phi = \arg g(i\omega).$$

Concluimos que a resposta estacionária (isto é, considerada no limite $t = \infty$) do sistema a um sinal senoidal de frequência ω é outro sinal senoidal amplificado de $|g(i\omega)|$ e defasado de ϕ (a fase de $g(i\omega)$). Como sinais periódicos podem ser representados por somas de sinais senoidais (séries de Fourier), faz sentido dizer que um sistema é um transformador de sinais em frequência, com amplificação e defasagem diferentes para cada frequência, e dadas a partir de $g(i\omega)$.

Esta interpretação da função de transferência como a resposta em frequência tornou-se muito útil em eletrônica e em telecomunicações, tendo sido muito desenvolvida entre 1930 e 1950, quando apareceram os grandes sistemas de telecomunicações. Pense no proje

to de amplificadores de som, onde tudo é naturalmente especificado por frequências^(*)

Conhecendo o modelo matemático, podemos passar para o problema de controle em si e sua resolução.

4. Um Primeiro Problema Matemático

Considere um sistema descrito por sua função de transferência $g(s)$ e a estrutura de controle definida por (Fig. 3):

$$\hat{y}(s) = g(s)(\hat{u}(s) + \hat{w}_1(s)) + \hat{w}_2(s),$$

$$\hat{u}(s) = c(s)\hat{e}(s),$$

$$\hat{e}(s) = \hat{x}(s) - \hat{y}(s).$$

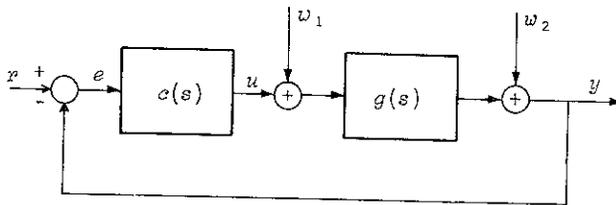


Fig. 3 - Um sistema de controle

Aqui fornecemos o controle $u(\cdot)$ por uma transformação do erro $e(\cdot)$ entre uma referência $r(\cdot)$ (um sinal com a forma desejada para a saída) e a saída $y(\cdot)$. Esta transformação terá de ser feita por um sistema com função de transferência própria $c(s)$, comumente chamada de *compensador*.

Desejamos que, quando $t \rightarrow \infty$, $y(t) \rightarrow r(t)$, isto é,

(*) A unidade de amplificação por frequência, medida em $20 \log |g(i\omega)|$ é chamada *decibel*.

$e(t) \rightarrow e(\infty) = 0$. O valor de $e(\infty)$ é o erro (em regime estacionário). Se escolhermos corretamente $c(s)$, esse erro deverá ser nulo.

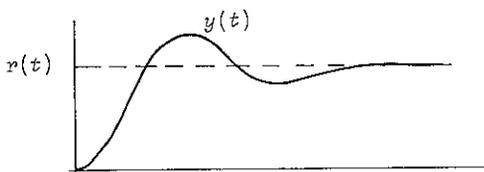


Fig. 4 - Erro estacionário nulo

Para tal precisaremos conhecer as relações entre os diversos sinais envolvidos, a saber:

$$\hat{y}(s) = \frac{c(s)g(s)}{1+c(s)g(s)} \hat{x}(s) + \frac{g(s)}{1+c(s)g(s)} \hat{w}_1(s) + \frac{1}{1+c(s)g(s)} \hat{w}_2(s)$$

$$\hat{e}(s) = \frac{1}{1+c(s)g(s)} \hat{x}(s) - \frac{g(s)}{1+c(s)g(s)} \hat{w}_1(s) - \frac{1}{1+c(s)g(s)} \hat{w}_2(s)$$

Qual é a referência no exemplo da seção 2? É a posição constante desejada para a antena, constante ao menos durante o "tempo de operação" (4 segundos). Escolheremos assim $x(t) = y_1 H(t)$ (onde $H(t)$ é a função de Heaviside, com $H(t) = 0$ para $t < 0$ e $H(t) = 1$ para $t > 0$), y_1 o valor desejado a ser especificado pelo operador da antena. Mudando y_1 muda a posição desta. As perturbações serão respostas constantes ao longo do tempo, mas de intensidade desconhecida! Isto é, $w_1(t) = \alpha H(t)$ e $w_2(t) = \beta H(t)$, α e β desconhecidos. Queremos que o efeito delas seja compensado pelo sistema de controle. Por último, queremos que tudo ocorra em 4 segundos sem ultrapassagem. Pode-se mostrar que isto implica em restringir os zeros de $1 + c(s)g(s)$ a uma região $\mathcal{D} \subset \bar{\mathcal{C}}$. No exemplo da seção 2, $\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{R} \mid s < -1\}$.

Utilizando o teorema do valor final da transformada de Laplace, isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{y}(s),$$

e o fato de que $\hat{H}(s) = 1/s$, podemos escrever matematicamente as condições acima.

Problema P1. Encontrar $c(s)$, função racional própria, tal que:

$$(i) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0; \quad \text{ou seja,} \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1+c(s)g(s)} \frac{\hat{y}_1}{s} = 0, \quad \forall y_1,$$

$$(ii) \quad \text{efeito de } w_1 \text{ e } w_2 \rightarrow 0; \quad \text{ou seja,}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{sg(s)}{1+c(s)g(s)} \frac{\alpha}{s} = 0, \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1+c(s)g(s)} \frac{\beta}{s} = 0, \quad \forall \alpha, \beta;$$

$$(iii) \quad \text{raízes de } 1+c(s)g(s) \in \mathcal{D}.$$

O leitor atento perceberá que usamos a linearidade do sistema, separando os efeitos de r , w_1 e w_2 . A mesma linearidade permite dizer que, se os limites são calculados para $y_1 = \alpha = \beta = 1$, então serão calculados para quaisquer y_1 , α e β . Assim suporemos, sem perda de generalidade, que $y_1 = \alpha = \beta = 1$.

Se $c(s) = n_c(s)/d_c(s)$, $n_c(\cdot)$ e $d_c(\cdot)$ polinômios com grau $n_c \leq$ grau d_c , lembrando que $g(s) = n(s)/d(s)$, podemos re-escrever as condições de P1 como:

$$(i) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d_c(s)d(s)}{d_c(s)d(s) + n_c(s)n(s)} = 0,$$

$$(ii) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d_c(s)}{d_c(s)d(s) + n_c(s)n(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d_c(s)d(s)}{d_c(s)d(s) + n_c(s)n(s)} = 0,$$

$$(iii) \quad \text{raízes de } d_c(s)d(s) + n_c(s)n(s) \in \mathcal{D}.$$

Como $s = 0 \notin \mathcal{D}$, $d_c(0)d(0) + n_c(0)n(0) \neq 0$, caso d_c e n_c sejam soluções de P1. Assim, se $d_c(0) = 0$, as condições (i) e (ii) serão automaticamente obedecidas! Conclusão: façamos $d_c(s) = s\tilde{d}_c(s)$.

Resta obter (iii), que fica sendo: encontrar $n_e(s)$ e $\tilde{d}_e(s)$ tais que grau $n_e \leq$ grau $\tilde{d}_e + 1$ com as raízes de \mathcal{D}

$$\tilde{d}_e(s) |sd(s)| + n_e(s)n(s)$$

pertencendo a \mathcal{D} . Mesmo para regiões \mathcal{D} simples não é trivial descrever o conjunto de soluções, permanecendo o problema geral em aberto. O que se faz atualmente é arbitrar um polinômio $\delta(s)$ com raízes em \mathcal{D} e procurar as soluções próprias de

$$\tilde{d}_e(s) [sd(s)] + n_e(s)n(s) = \delta(s) \quad (3)$$

Equações como (3) são chamadas de *diofantinas*, em homenagem a Diophante de Alexandria (séc. III D.C.), o primeiro a encontrar soluções inteiras para equações deste tipo sobre os números inteiros. Mas talvez fosse mais justo chamá-las de equações de Aryabata, já que esse matemático indiano foi o primeiro a fornecer a solução geral no início do século IV DC.

Enfim, equações diofantinas ou de Aryabata, sua resolução apoia-se em um teorema bem conhecido.

Teorema 2 (Bézout). Se $\delta(s) = 1$, (3) possui soluções polinomiais se e somente se $sd(s)$ e $n(s)$ são primos entre si.

Dai é fácil concluir o corolário seguinte.

Corolário 3. A equação (3) possui soluções polinomiais para qual quer $\delta(s)$ - em particular para aqueles com raízes em \mathcal{D} - se e somente se $sd(s)$ e $n(s)$ são primos entre si.

O corolário impõe apenas que $n(0) \neq 0$, ou que s e $n(s)$ sejam primos entre si, porque $\tilde{d}(s)$ e $n(s)$ não possuem raízes em comum por construção: basta escolher uma representação de $g(s)$ como fração irredutível.

Infelizmente nada garante que as soluções encontradas no corolário 3 forneçam um compensador próprio, com grau $\tilde{d}_e + 1 \geq$ grau n_e !

O problema geral permanece em aberto, mas a seguinte condição su ficiente fornece uma saída:

Teorema 4. Se grau $\delta \geq 2$ grau $[s\bar{d}] - 1$, então existem soluções própria de (3)

A apresentação da teoria com a solução geral de (3), a de monstração dos teoremas, e sua generalização para o caso matricial, com $G(s)$ matriz racional, e $n(s)$ e $\bar{d}(s)$ matrizes polinomiais, encontra-se em [1].

Aplicamos agora os teoremas ao nosso exemplo. Aqui $n(s) = 1$ e $\bar{d}(s) = s^2 + 2s$. O grau mínimo para δ será $2 \cdot 3 - 1 = 5$. Por simplicidade proporemos

$$\delta(s) = (s+2)^5 = s^5 + 10s^4 + 40s^3 + 80s^2 + 80s + 32.$$

A equação (3) particulariza-se em:

$$(s^3 + 2s^2)(s^2 + x_1s + x_0) + (y_3s^3 + y_2s^2 + y_1s + y_0) = \delta(s),$$

onde $\bar{d}_c(s) = s^2 + x_1s + x_0$, de forma que grau $\bar{d}_c +$ grau $d_c + 1 =$ grau $\delta = 5$, e $n_c(s) = y_3s^3 + y_2s^2 + y_1s + y_0$ com grau $n_c =$ grau $\bar{d}_c = 3$. Efetuando o produto, igualando os coeficientes grau a grau e resolvendo-se o sistema linear que então aparece chega-se ao compen - dor:

$$c(s) = \frac{n_c(s)}{\bar{d}_c(s)} = \frac{n_c(s)}{s\bar{d}_c(s)} = \frac{32s^2 + 80s + 32}{s^3 + 8s^2 + 24s}.$$

Esta solução não é apropriada em algumas aplicações, inclu sive porque é possível encontrar outras soluções de ordem menor; donde, menor número de coeficientes, mais simples o cálculo e me nor o preço da implementação física - argumento que nenhum enge nheiro despreza. Daí a necessidade de outras formulações.

5. Segunda Formulação

Nesta seção reescreveremos o problema inicial como um *problema de controle ótimo*, formulação muito popular na década de 60, devido à corrida espacial.

De início coloquemos o modelo matemático do processo na forma de uma equação diferencial de primeira ordem:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t), \quad (4)$$

$$y(t) = [1, 0] x(t) + w_2(t),$$

onde $x(t) = [x_1(t) \ \dot{x}_1(t)]^T$ e $\dot{x}_1(t) = z(t)$. Por comodidade no taremos as matrizes das equações acima de acordo com:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ew_1(t), \quad (6)$$

$$y(t) = Cx(t) + w_2(t). \quad (7)$$

As especificações de rastreamento, eliminação assintótica de perturbações e estabilidade podem ser alcançadas *indiretamente* através da minimização de um funcional da forma:

$$J(u) = \int_0^{\infty} \{ |e(t)|^2 + \rho |u(t)|^2 \} dt = \int_0^{\infty} \{ |r(t) - y(t)|^2 + \rho |u(t)|^2 \} dt.$$

O primeiro termo implica na minimização do erro $e(t)$ em sentido quadrático. Como o sistema é linear, isto levará a $y(t) \rightarrow r(t)$ se $t \rightarrow \infty$. O segundo termo busca evitar a saturação do processo, caso $|u(t)|$ chegue a valores muito altos. Na realidade, o segundo termo é necessário do ponto de vista matemático, pois sem ele o problema pode não ter solução (ou ter soluções impulsivas). O parâmetro ρ é um número real ajustando o compromisso entre os dois termos a serem minimizados.

Assim podemos formular o problema de controle como:

Problema P2. Encontrar um controle $u(\cdot)$ minimizando $J(u)$ sob as condições (6) e (7) e condição inicial dada.

Como $J(u)$ é uma função quadrática positiva, o mínimo existe, é único, e as condições de primeira ordem são necessárias e suficientes. Portanto, o controle ótimo é aquele que anula a derivada direcional de $J(u)$ em todas as direções. Chamando $\delta J(u, \delta u)$ a derivada direcional de $J(\cdot)$ sobre u na direção δu , temos a condição:

$$\delta J(u, \delta u) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (J(u + \epsilon \delta u) - J(u)) = 0 \quad \text{para todo } \delta u.$$

Substituindo a definição de $J(u)$ na equação acima e usando as equações (4) e (5) e a linearidade do sistema chega-se a:

$$\delta J(u, \delta u) = 2 \int_0^{\infty} \{ [x^T(t; u) C^T C - r^T(t) C] x(t; \delta u) - \rho u^T(t) \delta u \} dt,$$

que deverá ser nulo para todo δu . Seja $p(t; u)$ de quadrado integrável satisfazendo a equação

$$\dot{p}(t) = -A^T p(t) - x^T(t; u) C^T C + r^T(t) C. \quad (8)$$

Então $p(\infty, u) = 0$, e usando a fórmula de integração por partes a condição torna-se:

$$\int_0^{\infty} \{ [p(t; u)]^T [\dot{x}(t; \delta u) - Ax(t; \delta u)] + \rho u^T \delta u \} dt = 0;$$

ou, usando (6) - com $w_1 = 0$ por simplicidade, o que será revisto depois -

$$\int_0^{\infty} [B^T p(t; u) + \rho u(t)]^T \delta u dt = 0 \quad \forall \delta u.$$

Daí a condição de otimalidade final:

Teorema 5. A solução de P2 supondo $x(t)$ acessível e $E=0$ é dada por

$$u(t) = \rho^{-1} B^T p(t; u),$$

com $p(t; u)$ solução de (8) e $x(t; u)$ solução de (6).

As equações acima não são de fácil resolução, além de não fornecerem um controle $u(\cdot)$ função de $y(\cdot)$ ou $x(\cdot)$. Em um primeiro passo [4] prova o seguinte teorema:

Teorema 6. A solução de P2 é dada por

$$u(t) = -\rho^{-1} B^T [Px(t) + \eta(t)] \quad (9)$$

onde P é uma matriz simétrica semi-definida positiva solução da equação estacionária de Riccati:

$$PA + A^T P - PB\rho^{-1}B^T P + I = 0 \quad (10)$$

e $\eta(t)$ solução de

$$\dot{\eta}(t) = A^T \eta(t) + c^T r(t), \quad \eta(\infty) = 0. \quad (11)$$

Isto mostra que conhecendo-se $x(t)$ podemos calcular o controle ótimo instantaneamente, já que P e $\eta(t)$ podem ser calculados previamente. Na expressão (9) estamos realimentando o estado $x(t)$ do sistema, em geral não acessível. Como determinar uma boa estimativa de $x(t)$ conhecendo apenas $y(t)$, e em presença das perturbações $w_1(\cdot)$ e $w_2(\cdot)$?

Usa-se, neste caso, modelar as perturbações como processo estocásticos (variáveis aleatórias parametrizadas pelo tempo). Especificamente, supõem-se w_1 e w_2 ruídos brancos gaussianos de média zero e variâncias I e R , respectivamente, com $R > 0$, sendo $w_1(t)$ e $w_1(\tau)$ decorrelatadas se $t \neq \tau$. Neste caso o problema P2 é o de minimizar $E\{J(u)\}$, onde $E\{\cdot\}$ representa a esperança matemática (para esse e outros conceitos da teoria das probabilidades consultar [5]).

Demonstra-se que o problema recai na questão de encontrar a estimativa $\hat{x}(t)$ do estado $x(t)$ minimizando $E\{\|x(t) - \hat{x}(t)\|^2\}$. Este é o problema de filtragem ótimo, colocado por Kolmogoroff e Wiener na década de 40, e muito utilizado em Telecomunicações. Norbert Wiener resolveu o problema usando equações integrais e a transformada de Laplace. Na década de 60 Rudolf Kalman generalizou e resolveu o problema no contexto aqui exposto.

Teorema 7. O filtro (de Wiener) ótimo é dado por

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K[y(t) - c\hat{x}(t)] \quad (12)$$

$$K = QC^TR^{-1} \quad (\text{ganho do filtro ótimo})$$

onde Q é a solução simétrica semi-definida positiva de

$$AQ + QA^T - QC^TR^{-1}CQ + EE^T = 0. \quad (13)$$

Ainda mais, a solução de P2 generalizado é dada por

$$u(t) = -\rho^{-1}B^T[P\hat{x}(t) + \eta(t)],$$

P solução simétrica semi-definida positiva da equação (10) e $\eta(\cdot)$ solução de (11), $x(t)$ a saída do filtro ótimo (12).

Para resolver P2 constrói-se em separado a solução de dois problemas: a) o de controle ótimo conhecendo-se $x(t)$ (teorema 6), b) o de estimação ótima de $x(t)$, obtendo-se $\hat{x}(t)$ (a primeira parte do teorema 7)! Chega-se à estrutura de controle da Fig. 5.

Pode-se demonstrar o teorema 7 usando apenas a descrição por função de transferência, chegando à solução do problema por um caminho equivalente à resolução de (10) e (13). A técnica utilizada é a fatorização espectral da matriz $g(s)^Tg(-s)+R$ na forma $\Delta(s)\Delta^T(-s)$ [6].

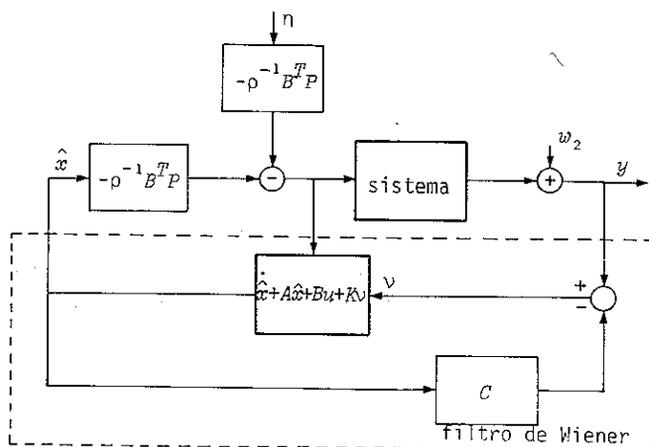


Fig. 5 - Solução de P2

Calculando-se as soluções de (10) e (13), após alguns bons truques numéricos, chega-se a:

$$K = \begin{bmatrix} 0,45 \\ 0,10 \end{bmatrix}$$

$$\rho^{-1} B^T P = \left[\sqrt{2+\sqrt{4-\rho}} + \sqrt{2-\sqrt{4-\rho}} \quad \sqrt{2+\sqrt{4-\rho}} - \sqrt{2-\sqrt{4-\rho}-2} \right].$$

Variando ρ , os autovalores do sistema são alterados. Como escolher ρ de forma que os autovalores pertençam a \mathcal{D} ? Este é um problema nem sempre resolvido de forma satisfatória.

A solução de P2 possui a mesma ordem que o sistema a ser controlado (ver a Fig. 5), o que pode ser excessivo (não o é em nosso exemplo particular). Além disso o ajuste é complicado, e não podemos utilizar diretamente as especificações de rapidez e ultrapassagem. Porém o método é aplicável a sistemas de grande porte, via computador.

6. Outras Formulações

A teoria (clássica) de controle ótimo tem sofrido muitas críticas devido à sua incapacidade de absorver especificações mais sofisticadas. Qualquer especificação nova implica restrições no problema de otimização, com soluções em malha fechada muito complexas ou desconhecidas. Pesquisadores como Youla [8], Zames [9] e Helton [2] propõem atualmente novas formulações do problema de controle ótimo, que conduzem a questões matemáticas bem interessantes, sem perder o atrativo prático^(*).

7. Conclusões

Mostramos que um problema de controle pode ser formalizado de maneiras diferentes, levando a problemas matemáticos diferentes. Qual o mais conveniente para o engenheiro? Depende da área em que este trabalha: se é engenheiro eletrônico preferirá a formulação da seção 4; se é engenheiro de telecomunicações ou mecânico a da seção 5.

O problema aqui discutido é um problema simples, estudado nos primeiros cursos universitários na área. Outros problemas existem, como os de filtragem, identificação e síntese de circuitos, apelando para técnicas matemáticas as mais diversas. Quem se interessar poderá estudar os livros de Vidyasagar [7], Callier e Desoer [1], Kailath [3] e os artigos citados, ou as Notas da IV Escola de Matemática Aplicada no CNPq [10], onde será introduzido a campos matemáticos de grande beleza e utilidade... fora da Matemática.

Referências

- [1] Callier, F.M. & Desoer, C.A. - *Multivariable Feedback Systems*, Springer Verlag, 1982.

(*) Utilizam a teoria dos espaços de Hardy e a teoria de interpolação nestes espaços, ou fatorizações convenientes.

- [2] Helton, J.V. - *Worst Case Analysis in the Frequency Domain: The H^∞ Approach to Control*, IEEE Trans. Aut. Control, vol. AC-30, nº 12, December 1985, pp. 1154-1170.
- [3] Kailath, T. - *Linear Systems*, Prentice Hall, 1980.
- [4] Kwakernak, H. & Sivan, R. - *Linear Optimal Control Systems*, John Wiley & Sons, 1972.
- [5] Papoulis, A. - *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw Hill, 1965.
- [6] Shaked, U. - *A general transfer-functions approach to the steady-state linear quadratic Gaussian stochastic control problem*, Int. J. Control, 1976, vol. 24, nº 6, pp. 711-800.
- [7] Vidyasagar, M. - *Control System Synthesis*, MIT Press, Cambridge (Massachusetts), 1985.
- [8] Youla, D.C. & Bongiorno Jr., J.J. - *A Feedback Theory of Two-Degree-of-Freedom Optimal Wiener-Hopf Design*, IEE Trans. Aut. Control, vol. AC-10, nº 7, July 1985, pp. 652-665.
- [9] Zames, G. & Francis, B.A. - *Feedback Minimax Sensitivity, and Optimal Robustness*, IEEE Trans. Aut. Control, vol. AC-28, nº 5, May 1983, pp. 585-601.
- [10] Vários Autores, *Notas da IV Escola de Matemática Aplicada do CNPq*, LNCC, Rio de Janeiro, 1984.

Departamento de Engenharia Elétrica, PUC/RJ
Rua Marquês de São Vicente 225, Gávea
22.453 Rio de Janeiro, RJ